



UNIVERSIDAD TÉCNICA DE AMBATO
FACULTAD DE INGENIERÍA CIVIL Y MECÁNICA
CARRERA DE INGENIERÍA CIVIL

TRABAJO EXPERIMENTAL PREVIO A LA OBTENCIÓN DEL
TÍTULO DE INGENIERA CIVIL

TEMA:

“DESARROLLO DE UNA APLICACIÓN BASADA EN MATLAB PARA EL
CÁLCULO DE CIMENTACIONES SOBRE UN LECHO ELÁSTICO”

AUTORA: Ana Gabriela Sánchez

TUTOR: Ing. Mg. Carlos Navarro

Ambato – Ecuador

2017

CERTIFICACIÓN DEL TUTOR

Yo, ING. MG. CARLOS PATRICIO NAVARRO PEÑAHERRERA, certifico que el presente trabajo bajo el tema: DESARROLLO DE UNA APLICACIÓN BASADA EN MATLAB PARA EL CÁLCULO DE CIMENTACIONES SOBRE UN LECHO ELÁSTICO, es de autoría de la Srta. Ana Gabriela Sánchez, el mismo que ha sido realizado bajo mi supervisión y tutoría.

Es todo cuanto puedo certificar en honor a la verdad.

Ambato, Julio del 2017

Ing. Mg. Carlos Navarro.
TUTOR

AUTORÍA

Yo, ANA GABRIELA SÁNCHEZ con C.I.: 1804372199, egresada de la Facultad de Ingeniería Civil y Mecánica de la Universidad Técnica de Ambato, certifico por medio de la presente que el trabajo experimental con el tema: **DESARROLLO DE UNA APLICACIÓN BASADA EN MATLAB PARA EL CÁLCULO DE CIMENTACIONES SOBRE UN LECHO ELÁSTICO**, es de mi completa autoría.

Ambato, Julio del 2017

Ana Gabriela Sánchez

DERECHOS DE AUTOR

Autorizo a la Universidad Técnica de Ambato, para que haga de este Trabajo Experimental o parte de él, un documento disponible para su lectura, consulta y procesos de investigación, según las Normas de la Institución.

Cedo los Derechos en línea patrimoniales de mi Trabajo Experimental con fines de difusión pública, además apruebo la reproducción de éste Trabajo Experimental dentro de las regulaciones de la Universidad, siempre y cuando ésta reproducción so suponga una ganancia económica y se realice respetando mis derechos de autor.

Ambato, Julio del 2017

Autora

Ana Gabriela Sánchez

APROBACIÓN DEL TRIBUNAL DE GRADO

Los miembros del tribunal examinador aprueban el informe de investigación, sobre el tema “DESARROLLO DE UNA APLICACIÓN BASADA EN MATLAB PARA EL CÁLCULO DE CIMENTACIONES SOBRE UN LECHO ELÁSTICO”, de la egresada Ana Gabriela Sánchez, de la Facultad de Ingeniería Civil y Mecánica.

Ambato, Julio del 2017

Por constancia firman

Ing. Mg. Byron Cañizares

Ing. Mg. Juan Garcés

DEDICATORIA

Especialmente éste proyecto se lo dedico a Dios, quien ha sido el pilar fundamental en mi vida, debido a que me acompaña en mi diario vivir y me da la fuerza para seguir luchando día a día.

Dedicado también a mi madre Mátida Sánchez, aquella mujer inteligente, valiente y luchadora que día a día se esfuerza por darme lo mejor; que sin lugar a dudas ha sido la mejor madre del mundo, brindándome siempre su amor, comprensión, paciencia y primordialmente su apoyo incondicional que ha sido fundamental para alcanzar mis metas.

A mis hermanos Luis y Fredy, quienes han sido también una parte importante para mi formación personal y profesional, brindándome su amor, paciencia y apoyo total.

A mis sobrinos Wellington y Steven también a mi cuñada Karina, por acompañarme y apoyarme en cada momento de mi vida.

Ana Sánchez

AGRADECIMIENTO

Fundamentalmente quiero agradecer a Dios, porque me ha dado la fortaleza para vencer los obstáculos de la vida y me ha ayudado a culminar una etapa más de mi vida, gracias por las bendiciones y las lecciones de vida que me brinda cada día.

Especialmente agradezco a mi madre Mèlida Sánchez que más que una madre ha sido mi mejor amiga, siempre ha estado pendiente de mí, y me ha ayudado en todo lo que le estaba a su alcance, gracias por sus sabios consejos y por su ejemplo de lucha y constancia, demostrándome que con la bendición de Dios es posible alcanzar los objetivos planteados.

A mis hermanos Luis y Fredy, a mis sobrinos y a mi cuñada, por ayudarme en todo lo que podían, más que todo mis sinceros agradecimientos por ese apoyo moral y sus consejos, que me han servido de mucho para no dejarme vencer por las dificultades.

A mis queridos amigos que me han acompañado en transecurso de mi vida, brindándome su amistad, cariño y apoyo, también a aquellos que a pesar de la distancia han estado pendientes de mí.

Agradezco a mi tutor académico, el Ing. Carlos Navarro por su profesionalismo y compromiso, también al Ing. Christian Medina gracias por compartir sus conocimientos y ser los guías durante el desarrollo del proyecto.

A todos los docentes de la Facultad, quienes han sido también una parte sustancial durante mi formación en la etapa universitaria.

Ana Sánchez

ÍNDICE GENERAL DE CONTENIDOS

A) PÁGINAS PRELIMINARES

PORTADA	I
CERTIFICACIÓN DEL TUTOR	II
AUTORÍA	III
DERECHOS DE AUTOR	IV
APROBACIÓN DEL TRIBUNAL DE GRADO	V
DEDICATORIA	VI
AGRADECIMIENTO	VII
ÍNDICE GENERAL DE CONTENIDOS	VIII
ÍNDICE DE TABLAS	XI
ÍNDICE DE FIGURAS	XII
RESUMEN EJECUTIVO	XIII
EXECUTIVE SUMMARY	XIV

B) TEXTO

CAPÍTULO I	1
ANTECEDENTES	1
1.1 TRABAJO EXPERIMENTAL	1
1.2 ANTECEDENTES	1
1.3 JUSTIFICACIÓN	3
1.4 OBJETIVOS	4

CAPÍTULO II	5
FUNDAMENTACIÓN	5
2.1 FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA	5
2.1.1 FACTORES QUE DETERMINAN EL TIPO DE CIMENTACIÓN	5
2.1.2 DESARROLLO HISTÓRICO DE LAS FUNDACIONES SUPERFICIALES	6
2.1.3 MÉTODO DEL COEFICIENTE DE BALASTO	8
2.1.4 CRITERIOS DE RIGIDEZ Y FLEXIBILIDAD	14
2.1.5 RIGIDEZ DEL TERRENO DE CIMENTACIÓN	15
2.1.6 RIGIDEZ DEL ELEMENTO DE CIMENTACIÓN	16
2.1.7 ASENTAMIENTOS	17
2.1.8 SUELOS DE CIMENTACIÓN	18
2.1.9 INTERACCIÓN SUELO-ESTRUCTURA	18
2.1.10 DETERMINACIÓN DE LOS PARÁMETROS DE DISEÑO	19
2.1.11 ANÁLISIS DE DATOS	20
2.1.12 VIGAS DE CIMENTACIÓN SOBRE MEDIOS ELÁSTICOS	21
2.2 HIPÓTESIS	28
2.3 SEÑALAMIENTO DE LAS VARIABLES DE LA HIPÓTESIS	28
2.3.1 VARIABLE INDEPENDIENTE	28
2.3.2 VARIABLE DEPENDIENTE	28
CAPÍTULO III	29
METODOLOGÍA	29
3.1 NIVEL O TIPO DE INVESTIGACIÓN	29
3.2 POBLACIÓN Y MUESTRA	29
3.3 OPERACIONALIZACIÓN DE VARIABLES	30
3.3.1 VARIABLE INDEPENDIENTE	30
3.3.2 VARIABLE DEPENDIENTE	31
3.4 PLAN DE RECOLECCIÓN DE INFORMACIÓN	32
3.5 PLAN Y PROCESAMIENTO DE ANÁLISIS	32

CAPÍTULO IV	33
ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN DE RESULTADOS	33
4.1 RECOLECCIÓN DE DATOS	33
4.1.1 EJEMPLO DE CÁLCULO CON UN VANO (RESOLUCIÓN MANUAL)	33
4.1.2 EJEMPLO DE CÁLCULO CON TRES VANOS (RESOLUCIÓN MANUAL)	57
4.1.3 EJEMPLOS REALIZADOS CON LA APLICACIÓN DESARROLLADA	103
4.2 ANÁLISIS DE RESULTADOS	110
4.3 VERIFICACIÓN DE HIPÓTESIS	115
CAPÍTULO V	117
CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES	117
5.1 CONCLUSIONES	117
5.2 RECOMENDACIONES	118
C) MATERIAL DE REFERENCIA	
1. BIBLIOGRAFÍA	119
2. ANEXOS	121

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1: <i>Parámetros elásticos para diferentes suelos</i>	6
Tabla 2: <i>Coefficiente de Balasto: Valores orientados para placa de carga de 30x30cm²</i>	11
Tabla 3: <i>Constantes de integración para vigas de sección constante</i>	26
Tabla 4: <i>Expresiones finales de fuerzas y deformaciones para vigas de sección constante sobre medio elástico</i>	27
Tabla 5: <i>Operacionalización de la variable independiente</i>	30
Tabla 6: <i>Operacionalización de la variable dependiente</i>	31
Tabla 7: <i>Plan de recolección de información</i>	32
Tabla 8: <i>Valores de las constantes de integración</i>	40
Tabla 9: <i>Valores de las expresiones finales de fuerzas y deformaciones</i>	47
Tabla 10: <i>Resumen de Resultados de la viga con un vano</i>	54
Tabla 11: <i>Valores de las constantes de integración primer elemento</i>	69
Tabla 12: <i>Valores de las constantes de integración segundo elemento</i>	70
Tabla 13: <i>Valores de las constantes de integración tercer elemento</i>	71
Tabla 14: <i>Valores de las expresiones finales de fuerzas y deformaciones primer elemento</i>	83
Tabla 15: <i>Valores de las expresiones finales de fuerzas y deformaciones segundo elemento</i>	83
Tabla 16: <i>Valores de las expresiones finales de fuerzas y deformaciones tercer elemento</i>	84
Tabla 17: <i>Resumen de Resultados de la viga con tres vanos</i>	99
Tabla 18: <i>Cuadro comparativo de los desplazamientos (un vano)</i>	110
Tabla 19: <i>Cuadro comparativo de los momentos (un vano)</i>	111
Tabla 20: <i>Cuadro comparativo de los cortantes (un vano)</i>	111
Tabla 21: <i>Cuadro comparativo de los giros (un vano)</i>	111
Tabla 22: <i>Cuadro comparativo de las presiones (un vano)</i>	112
Tabla 23: <i>Cuadro comparativo de los desplazamientos (tres vanos)</i>	112
Tabla 24: <i>Cuadro comparativo de los momentos (tres vanos)</i>	113
Tabla 25: <i>Cuadro comparativo de los cortantes (tres vanos)</i>	113
Tabla 26: <i>Cuadro comparativo de los giros (tres vanos)</i>	114
Tabla 27: <i>Cuadro comparativo de las presiones (tres vanos)</i>	115

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1: Gráfica presión vs. asentamiento	10
Figura 2: Placas sometidas a distintos tipos de carga	12
Figura 3: Molde de asentamiento en una fundación flexible	16
Figura 4: Asentamiento típico de una fundación rígida	16
Figura 5: Interacción suelo - estructura	19
Figura 6: Interacción suelo - estructura	22
Figura 7: Cargas actuantes en la viga de cimentación	24
Figura 8: Ejemplo de las cargas actuantes en la viga de cimentación	24
Figura 9: Ilustración gráfica del ejemplo de cálculo para viga de cimentación	33
Figura 10: Ilustración gráfica del corte de la viga	34
Figura 11: Ilustración gráfica de los grados de libertad	35
Figura 12: Ilustración gráfica del armado de la viga de cimentación	57
Figura 13: Ilustración gráfica del ejemplo de cálculo para viga de cimentación	57
Figura 14: Ilustración gráfica del corte de la viga	58
Figura 15: Ilustración gráfica de los grados de libertad	59
Figura 16: Ilustración gráfica del armado de la viga de cimentación	103
Figura 17: Ilustración gráfica de la presentación de la aplicación desarrollada	103
Figura 18: Ilustración gráfica del inicio de la aplicación desarrollada	104
Figura 19: Ilustración gráfica de la segunda pantalla de la aplicación desarrollada	104
Figura 20: Ilustración gráfica del ingreso de valores en la aplicación desarrollada	105
Figura 21: Ilustración gráfica del cuadro de resultados de la aplicación desarrollada	105
Figura 22: Ilustración gráfica de los diagramas dados por la aplicación desarrollada	106
Figura 23: Ilustración gráfica de las áreas de acero calculadas por la aplicación desarrollada	106

RESUMEN EJECUTIVO

TEMA:

DESARROLLO DE UNA APLICACIÓN BASADA EN MATLAB PARA EL CÁLCULO DE CIMENTACIONES SOBRE UN LECHO ELÁSTICO

AUTORA: Ana Gabriela Sánchez

TUTOR: Ing. Mg. Carlos Navarro

FECHA: Julio 2017

En el presente proyecto de investigación se realizó una aplicación basada en el lenguaje de programación de MATLAB, en base a esto se codificó y se elaboró la interfaz gráfica (GUI) para el cálculo de vigas de cimentación sobre lecho elástico. Dicha aplicación permite agilizar los procesos de cálculo para así obtener resultados de una forma más eficaz y confiable.

Los datos a ingresar en la aplicación desarrollada (programa) son: el número de vanos, la longitud de los mismos, el Coeficiente de Balasto del suelo, Módulo de elasticidad del material, las dimensiones de la viga (base y altura de la sección transversal), las cargas y momentos de servicio actuantes en la misma. Una vez ingresado los datos, la aplicación utiliza el método matricial para resolver la viga de cimentación y se obtienen resultados correspondientes a los desplazamientos verticales, giros, momentos, cortantes y presiones ejercidas en el suelo en diferentes puntos, según la discretización que se le asigne a cada vano.

Para garantizar que los resultados obtenidos mediante la aplicación desarrollada son válidos, se realizó la comparación de los mismos con los resultados de los cálculos manuales; en donde se obtuvo que el margen de error se encuentra alrededor del 1%, es decir que los valores obtenidos por medio de la aplicación son totalmente verídicos.

EXECUTIVE SUMMARY

TOPIC:

DEVELOPMENT OF A MATLAB BASED APPLICATION FOR THE CALCULATION OF FOUNDATIONS ON AN ELASTIC BED

AUTHOR: Ana Gabriela Sánchez

TUTOR: Ing. Mg. Carlos Navarro

DATE: July, 2017

In this research project, an application was made based on the programming language of MATLAB, based on this, the coding and GUI were developed for the calculation of foundation beams on elastic bed. This application allows faster calculation processes to obtain results in a more efficient and reliable way.

The data to be entered in the developed application (software) are: the number of spans, their length, the Ballast Coefficient of the soil, the material's Modulus of Elasticity, the dimensions of the beam (base and height of the cross section), the loads and service moments acting on it. Once the data is entered, the application uses the matrix method to solve the foundation beam and obtain results corresponding to the vertical displacements, rotations, moments, shears and pressures exerted on the soil at different points, according to the discretization assigned at every span.

To ensure that the results obtained through the developed application are valid, a comparison was made with the results of the manual calculations; Where it was obtained that the margin of error is around 1%, means that the values obtained by the application are totally true.

CAPÍTULO I

ANTECEDENTES

1.1 TRABAJO EXPERIMENTAL

DESARROLLO DE UNA APLICACIÓN BASADA EN MATLAB PARA EL CÁLCULO DE CIMENTACIONES SOBRE UN LECHO ELÁSTICO

1.2 ANTECEDENTES

Hace algunos años muchos de los cálculos realizados por el hombre eran mediante métodos manuales y el uso de calculadoras. Con el continuo avance tecnológico y mediante la creación de las computadoras muchas de dichas actividades fueron automatizadas, acarreando consigo una de las capacidades más importantes como es la programación; con ésta invención muchas de las acciones de cálculo en la ingeniería que en el pasado se realizaban manualmente y tomando mucho tiempo, ahora se han simplificado y optimizado, de tal manera que se ha agilitado los largos períodos de cálculo que en la mayoría de casos resultan ser repetitivos para la obtención de resultados finales confiables. [1]

En las últimas décadas se ha desarrollado en el mercado diversos programas para cada tipo de actividad, pero en su gran mayoría éstos son muy sofisticados y en ciertos casos inaccesibles para el público. En lo que se refiere al campo de la Ingeniería Civil existe una amplia gama de aplicaciones tecnológicas para cálculos estructurales, análisis de costo, etc. Todas estas aplicaciones son muy útiles tanto para los estudiantes como para los profesionales, pero generalmente no son muy accesibles para los mismos debido a que los precios de las licencias originales son muy elevados. [1]

En nuestro país existe una gran diversidad de suelos, de los cuales es necesario poseer el conocimiento adecuado para así establecer el tipo de cimentación a implementar en cada caso. Una de las más utilizadas son las cimentaciones superficiales, especialmente en la región Interandina, pero en regiones como la Costa, el Oriente y en ciertas partes de la Sierra se encuentran estratos de suelos que no poseen las propiedades necesarias para que puedan soportar las cargas que demanda la estructura, especialmente si son edificios, pilas de puentes, etc. Entonces, para dichos casos se debe tomar en cuenta la utilización de cimentaciones sobre lechos elásticos, para así solucionar la necesidad de construcción sobre suelos con poca capacidad de carga. [2], [3]

En lo que respecta a las cimentaciones, que es la parte más importante de la construcción, debido a que su fin primordial es la transmisión del peso de la estructura al terreno natural; las aplicaciones computacionales disponibles en el mercado poseen ciertas características limitantes mencionadas anteriormente, además, algunas veces se presentan dificultades en la introducción de datos debido al desconocimiento del manejo del programa, por lo cual se puede llevar a cabo la interpretación errónea de los resultados obtenidos. [1]

Uno de los programas disponibles en nuestro medio para el cálculo de cimentaciones superficiales es por ejemplo SAFE que es de la misma empresa creadora del programa SAP2000, Computer and Structure; también se encuentran disponibles hojas de cálculo online en EXCEL. Pero más aún no existe un complemento para el cálculo de cimentaciones sobre lecho elástico que permita mejorar el diseño estructural. Convirtiéndose así en una alternativa y un instrumento útil para los futuros ingenieros civiles. [2]

Por lo tanto, para agilizar los cálculos en el diseño de cimentaciones en medios elásticos en base a métodos matriciales, se pretende implementar una aplicación que tomará en cuenta los parámetros constructivos, las características del suelo y las cargas provenientes de la estructura; para así reducir el tiempo de trabajo y evitar errores en

los cálculos, que por lo general es común cuando se realizan manualmente especialmente al formar las matrices. [1]

1.3 JUSTIFICACIÓN

En la actualidad una de las herramientas fundamentales para el avance de la Ingeniería Civil es el desarrollo y la utilización de programas que ayuden a optimizar el tiempo de cálculo para así evitar los métodos tediosos e iterativos que a su vez pueden conllevar a errores en los resultados. Además uno de los aspectos más importantes en los que el ingeniero civil debe enfocarse, es sin duda, en las cimentaciones de las obras estructurales, ya que éstas pueden definir la funcionalidad de las mismas. [2]

Debido a las exigencias y la competitividad en el medio de trabajo para los nuevos profesionales, es de vital importancia complementar el conocimiento con los avances tecnológicos y dar paso a nuevas técnicas de cálculo de cimentaciones. En lo que respecta al uso software para cimentaciones en medios elásticos se ha prestado muy poca atención en la realización de programas que permitan acelerar los procesos de cálculo y que provean resultados confiables. Generalmente en el país se encuentran distintos tipos de hojas de cálculo y algunos software con ciertas limitaciones debido a que solamente se enfocan en el cálculo de cimentaciones superficiales por el método tradicional, es por ello que surge la necesidad implementar el uso de un software con la aplicación de matrices de modo que permita agilizar dichos procesos. [3], [4]

Asimismo un aspecto importante que se debe considerar, es que en nuestro medio así como existen suelos con una buena capacidad de carga, también existen suelos de baja capacidad portante, los cuales por lo general se presentan en la Región de la Costa y el Oriente. Por lo cual nos obliga a tener conocimientos de cimentaciones profundas para poder construir estructuras de gran altura en este tipo de suelo. [3]

Actualmente en la Facultad de Ingeniería Civil y Mecánica en la Carrera de Ingeniería Civil se ha observado que no se cuenta con dicho software para la optimización de

cálculo de cimentaciones en lechos elásticos, pero debido a que la información se encuentra disponible se pueden desarrollar nuevas opciones que permitan innovar en las herramientas tecnológicas de cálculo y así ahorrar tiempo y esfuerzo.

Tomando en cuenta los parámetros anteriores, se pretende desarrollar un programa que permita introducir una nueva herramienta para el cálculo de cimentaciones en medios elásticos, lo cual promete una gran proyección a futuro, la misma que abarcará el diseño vigas en lechos elásticos y un manual de uso de esta herramienta tecnológica.

1.4 OBJETIVOS

1.4.1 General:

Desarrollar una aplicación basada en MATLAB para el cálculo de cimentaciones sobre un lecho elástico.

1.4.2 Específicos:

- ❖ Optimizar el tiempo cálculo de vigas sobre lecho elástico con la implementación del programa.
- ❖ Elaborar una herramienta académica que permita el estudio de cimentaciones sobre medios elásticos.
- ❖ Brindar a los usuarios un programa de fácil manejo el cual brinde resultados confiables.
- ❖ Comparar analíticamente los resultados obtenidos con el programa y mediante la resolución manual.
- ❖ Determinar el porcentaje de error que existe entre los resultados obtenidos, para así verificar la confiabilidad del programa.

CAPÍTULO II

FUNDAMENTACIÓN

2.1 FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

La naturaleza, sin la ayuda del hombre, ha proporcionado los materiales sobre o dentro de los cuales el ingeniero cimienta sus estructuras. El ingeniero, para preparar un proyecto, debe saber cuáles son los materiales que están presentes y qué propiedades poseen. Los suelos pueden clasificarse en grupos dentro de los cuales, las propiedades mecánicas son algo parecidas. Por lo tanto, la correcta clasificación de los materiales del subsuelo es un paso importante para cualquier trabajo de cimentación. [5]

Cualquier obra o construcción de ingeniería requiere de una investigación del terreno. La investigación puede abarcar desde un examen sencillo de la superficie el suelo con o sin excavación superficial de prueba hasta un estudio detallado del suelo y las condiciones de los mantos freáticos. La extensión del trabajo va a depender de la importancia y la planeación de la cimentación de la estructura, de la complejidad de las condiciones del suelo y de la información disponible del comportamiento en caso de existir cimentaciones en suelos similares. [6]

2.1.1 Factores que determinan el tipo de cimentación

El tipo de cimentación más adecuado para una estructura dada, depende de varios factores, como su fundición, las cargas que debe soportar, las condiciones del subsuelo y el costo de la cimentación comparado con el costo de la superestructura, éstas razones son las que se consideras principales, aunque si existen otras consideraciones. [5]

Se recomienda al ingeniero seguir los siguientes pasos:

1. Obtener información aproximada con respecto a la naturaleza de la superestructura y de las cargas que se van a transmitir a las cimentaciones.
2. Determinar las condiciones del subsuelo en forma general.

3. Considerar brevemente cada uno de los tipos acostumbrados de cimentación, para juzgar si pueden construirse en las condiciones reales; si serían capaces de soportar las cargas necesarias y si pudieran experimentar asentamientos perjudiciales.
4. Hacer estudios detallados y aún anteproyectos de las alternativas más prometedoras. Para hacer estos estudios puede ser necesario tener información adicional con respecto a las cargas y condiciones del subsuelo. También puede ser necesario hacer estimaciones más refinadas de los asentamientos, para predecir el comportamiento de la estructura.
5. Preparar una estimación del costo de cada alternativa variable de cimentación, y elegir el tipo que represente la transacción más aceptable entre el funcionamiento y el costo. [5]

Tabla 1: *Parámetros elásticos para diferentes suelos*

TIPO DE SUELO	MÓDULO DE ELASTICIDAD		RELACIÓN DE POISSON (μ_s)
	MN/m ²	Lb/pulg ²	
Arena Suelta	10.50 – 24.00	1500 – 3500	0.20 – 0.40
Arena densa media	17.25 – 27.60	2500 – 4000	0.25 – 0.40
Arena densa	34.50 – 55.20	5000 – 8000	0.30 – 0.45
Arena limosa	10.35 – 17.25	1500 – 2500	0.20 – 0.40
Arena y grava	69.00 – 172.50	10000 – 25000	0.15 – 0.35
Arcilla suave	4.10 – 20.70	600 – 3000	–
Arcilla media	20.70 – 41.40	3000 – 6000	0.20 – 0.50
Arcilla firme	41.40 – 96.60	6000 – 14000	–

Fuente: Principios de Ingeniería de Cimentaciones Braja. M. Das

2.1.2 Desarrollo Histórico de las Fundaciones Superficiales

La preocupación del constructor por el comportamiento de las fundaciones ha sido de suma importancia, hasta épocas relativamente recientes se ve la preocupación de

analizar científicamente el comportamiento de las fundaciones, tratando de establecer principios generales que ayuden a su vez al establecimiento de normas tanto para el proyecto, así como para la construcción de campo. [1]

Durante mucho tiempo, la tecnología de las fundaciones se estableció solamente bajo bases empíricas, debido a que solamente el constructor por su experiencia tomaba decisiones respecto al tipo de fundación a realizar, asumiendo aspectos que tal vez en la mayoría de casos resultaba reales, pero en otros aspectos era contradictorio.

Hoy en día debido a los avances tecnológicos, resulta poco razonable seguir usando tan pobres medios y prescindir de dichos avances recientes en el conocimiento del campo, los mismos que resultan de gran ayuda para la toma de decisiones acertadas.

Sin lugar a dudas, no se puede dejar de lado la experiencia del ingeniero constructor, puesto que debido a sus conocimientos experimentales ha adquirido el arte de fundar. Por lo cual, es necesario que vayan de la mano el conocimiento experimental y la tecnología.

Con el paso del tiempo surgió la necesidad de establecer un valor seguro del esfuerzo que era posible dar al suelo de un determinado lugar, con lo cual se realizaron los estudios necesarios y así se crearon las leyes de Código o Normas, que en muchas partes aún se mantienen. Sin embargo, de debe tomar en cuenta que existe variaciones de suelo en todo el planeta, por lo que es importante reconocer en que zona se encuentra y no generalizar lo que establece dicho Código o Norma.

Las Teorías de Capacidad de Carga, desarrolladas a partir de 1920, proporcionan una base más o menos científica al estudio de las fundaciones y combinadas con el creciente conocimiento de los suelos y sus propiedades mecánicas, además con el mejoramiento de las técnicas de medición de campo han permitido en la actualidad el desarrollo de una metodología de proyecto y construcción de fundaciones mucho más racional y avanzada. Dichas teorías conjuntamente con la clasificación y estudio de suelos y tomando en cuenta el comportamiento de fundaciones construidas, proporcionan una base común, que hace posible el intento de generalizar el conocimiento sobre las fundaciones. [1]

2.1.3 Método del Coeficiente de Balasto

2.1.3.1 El Modelo de Winkler

El método de cálculo más utilizado para modelizar la interacción entre estructuras de cimentación y terreno es el que supone el suelo equivalente a un número infinito de resortes elásticos, cuya rigidez denominada coeficiente de balasto (k_s), corresponde con el cociente entre la presión de contacto (p) y el desplazamiento o asiento (δ): [8]

Ecuación 1: Definición del Coeficiente de Balasto

$$k_s = \frac{p}{\delta}$$

La denominación de balasto nace a partir del análisis de las traviesas del ferrocarril donde se utilizó por primera vez esta teoría. El balasto es la capa de grava que se tiende sobre la explanación de los ferrocarriles para asentar y sujetar las traviesas. A este modelo de interacción se le conoce generalmente como modelo de Winkler debido al nombre de su creador, y tiene múltiples aplicaciones, no sólo en el campo de las cimentaciones. [8]

La aplicación de la Teoría del Coeficiente de Balasto ha tenido aceptación en los últimos tiempos, debido a que permite una fácil asimilación del modelo de la interacción cimiento-terreno dentro del cual se han implementado los métodos matriciales de cálculo. Como tal se incluyen resortes en los nudos con la rigidez correspondiente al balasto. [8]

En el quehacer del cálculo y diseño de cimentaciones superficiales tiene aplicación la teoría de Winkler al dimensionamiento de elementos tales como vigas flotantes o de cimentación y losas de cimentación que trabajan sobre un corte horizontal de terreno, pero también para elementos tales como pantallas para excavaciones o tablestacas que trabajan sobre un corte vertical. Por lo que son útiles los coeficientes de balasto vertical y horizontal bajo el mismo concepto. [8]

2.1.3.2 Cimentaciones en Lechos Elásticos

El módulo de Balasto es una relación conceptual entre la presión del suelo y la deflexión que es ampliamente utilizado en el análisis estructural de los miembros de la fundación. Se utiliza para las zapatas continuas, esteras, y varios tipos de pilotes. [3]

Por otra parte, el módulo de Balasto también se define como una magnitud asociada a la rigidez del terreno. Su aplicación se encuentra sobre todo en el campo de la ingeniería civil ya que permite conocer el asentamiento de una edificación pesada en el terreno, así como también la distribución de esfuerzos en ciertos elementos de cimentación. Se mide aplicando una carga vertical sobre una superficie y midiendo el hundimiento o desplazamiento a partir de la carga aplicada. [3]

2.1.3.3 Determinación del módulo de reacción del subsuelo

Al abordar un estudio de cimentaciones, o de estructuras embebidas en el terreno, se utiliza el modelo matemático de Winkler (o del coeficiente de balasto), para definir el comportamiento del terreno. Debiendo tomar en cuenta que K_s no es una propiedad fundamental del suelo. Esta magnitud también depende de muchos otros factores, como son:

- La anchura del área cargada.
- La profundidad del área cargada debajo de la superficie.
- Tiempo.
- La posición de la carga. [3]

Consideraciones:

- Se parte de la hipótesis ideal de suelos homogéneos.
- No se tiene en cuenta la interacción entre cimientos próximos.
- Depende de la superficie de la cimentación: relación entre tensiones y asientos.
- El Coeficiente de Balasto es inversamente proporcional al asiento.

- Se determina en laboratorio, mediante ensayo de placa de carga de diferentes diámetros D (generalmente 30x30cm). [3]

La ecuación empírica para la obtención del Coeficiente de Balasto, planteada por Joseph Bowles

Ecuación 2: Coeficiente de Balasto

$$k_s = 120 * FS * q_a \text{ Tn/m}^3$$

$$k_s = 12 * FS * q_a \text{ K/ft}^3$$

$$k_s = 40 * FS * q_a \text{ KN/m}^3$$

Donde:

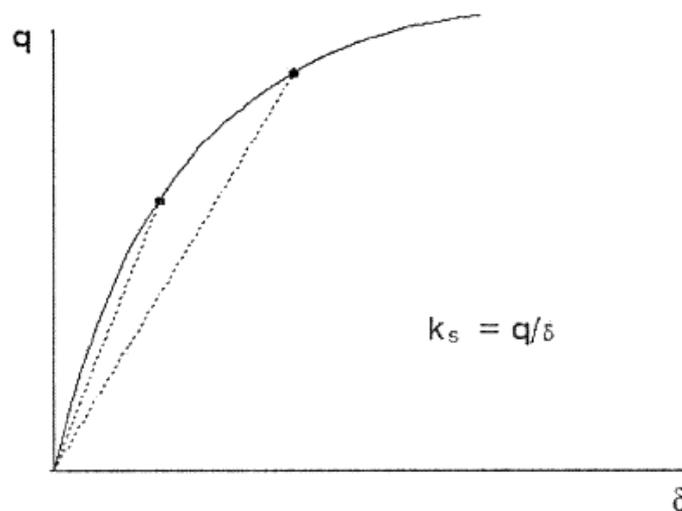
K_s = coeficiente de balasto

FS = factor de seguridad

q_a = Capacidad Portante (E.Bowles, 2002) *Cap. 9 pág. 503*

Una de las maneras de determinar K_s es experimentalmente mediante un ensayo de carga sobre una placa metálica normalizada apoyada en el suelo donde se determinan los asentamientos generados por un incremento de presiones al aumentar la carga en la fundación. Los resultados del ensayo se grafican en una curva de presión-asentamiento como se indica en la siguiente figura. [9]

Figura 1: Gráfica presión vs. asentamiento



Fuente: J. Curvelo

Generalmente en la práctica, la Ecuación no es lineal debido al comportamiento del suelo, fenómenos locales de plastificación del suelo de soporte, efectos de borde como la concentración de esfuerzos en los suelos cohesivos y el bajo confinamiento en los suelos granulares, los cuales generan una distribución no lineal de presiones de contacto suelo-placa. [9]

A continuación se presenta una tabla con los valores del Coeficiente de Balasto para diferentes clases de suelo

Tabla 2: *Coeficiente de Balasto: Valores orientados para placa de carga de 30x30cm²*

CLASES DE SUELO	K/cm³	CLASES DE SUELO	K/cm³
Suelo ligero de turba y cenagoso	0.5 – 1.0	Humus firmemente estratificado con arena y pocas piedras	8.0 – 10.0
Suelo pesado de turba y cenagoso	1.0 – 1.5	Humus firmemente estratificado con arena y muchas piedras	10.0 – 12.0
Arena fina de ribera o playa	1.0 – 1.5	Arcilla seca dura	> 10.0
Arena floja seca	1.0 – 1.3	Margas arcillosas	20.0 – 40.0
Arena floja húmeda	0.8 – 1.0	Gravilla arenosa floja	4.0 – 8.0
Arena media seca	3.0 – 9.0	Gravilla arenosa compacta	9.0 – 25.0
Arena media húmeda	2.0 – 6.0	Grava fina con mucha arena fina	8.0 – 10.0
Arena compacta seca	9.0 – 20.0	Grava media con arena fina	10.0 – 12.0
Arena compacta húmeda	7.0 – 13.0	Grava media con arena gruesa	12.0 – 15.0
Capa de humus, arena y grava	1.0 – 2.0	Grava gruesa con arena gruesa	15.0 – 20.0

Arcilla mojada	2.0 – 3.0	Grava gruesa con poca arena	
Arcilla húmeda	4.0 – 5.0	Rocas blandas o algo alteradas	> 30.0
Arcilla seca	6.0 – 9.0	Rocas sanas	> 500.0

Fuente: Johanna Caizachana

El Modelo de Winkler se apoya en la mecánica estructural según la cual establece que para una viga prismática se tiene las siguientes ecuaciones: [9]

$$M = EI \frac{d^2y}{dx^2}$$

$$V = \frac{dM}{dx}$$

$$q = \frac{dV}{dx}$$

Donde:

M = Momento flector

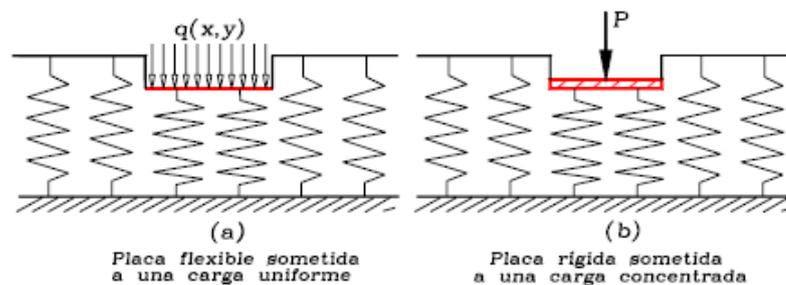
EI = Rigidez

y = Deflexión

x = Abscisa

V = Fuerza Cortante

Figura 2: Placas sometidas a distintos tipos de carga



Fuente: J. Curvelo

Según el planteamiento de Winkler, los esfuerzos son proporcionales a las deformaciones: [9]

$$q = -y * K * B$$

Luego

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} + ky = 0$$

Es decir, se obtiene la siguiente ecuación diferencial de la viga sobre una fundación elástica. Se la toma como solución general:

$$y = (C_1 \cos \lambda x + C_2 \sen \lambda x) e^{\lambda x} + (C_3 \cos \lambda x + C_4 \sen \lambda x) e^{-\lambda x}$$

La misma que es función de:

$$\lambda = \sqrt[4]{\frac{Bk_s}{4EI}}$$

Donde:

λ = Factor de amortiguación del sistema cimiento-suelo de soporte, con dimensión L^{-1}
Los resultados obtenidos al utilizar el método de Winkler dependen del valor de λ y en lo que corresponde a fuerzas internas de la fundación el valor de K_s no es muy influyente en los resultados, es decir, su determinación errónea varía menos del 20% los resultados.

Se ha definido la longitud característica o longitud elástica $\frac{1}{\lambda}$, como una medida de la interacción entre la viga y el suelo de fundación. Su valor es grande cuando la rigidez de la viga es mayor que la del suelo de soporte, y pequeño cuando la rigidez del suelo de soporte es mayor que la de la viga. [9]

2.1.3.4 Ventajas del Modelo

- Las expresiones matemáticas de la interacción suelo-estructura son muy simples lo que ha permitido aplicar con frecuencia el método en vigas, placas, pilotes y diferentes elementos flexibles de contención.
- Los momentos flectores y esfuerzos en una viga o placa han mostrado poca sensibilidad a la selección del módulo de reacción.
- Es posible evaluar los resultados de modelos más complejos al compararlos con los resultados producto del uso del modelo de Winkler [9]

2.1.3.5 Desventajas del Modelo

- La representación del sistema desacoplado de “resortes-suelo” no corresponde al comportamiento suelo-estructura real.
- La existencia de la gran variedad de recomendaciones para la determinación del módulo de reacción de la subrasante dificulta la elección del método.
- Su uso no es apropiado para modelar condiciones de contorno complejas o donde el comportamiento del suelo sea no lineal o dependa del estado de esfuerzos. En este caso lo más recomendable es utilizar otros modelos y procedimientos más complejos, como en problemas de placas, pilotes y elementos flexibles de contención.
- Cuando se desea evaluar asentamientos o desplazamientos de la fundación o cuando estos dominan el diseño no es recomendable utilizar el modelo de Winkler. [9]

2.1.4 Criterios de Rigidez y Flexibilidad

En los problemas de mecánica se asume que todos los materiales sufren deformaciones en mayor o menor magnitud bajo la aplicación de un cierto esquema de cargas en su contorno. Los suelos, a pesar de ser medios no homogéneos, no son ajenos a esta característica.

Su principal diferencia frente a materiales convencionales como el concreto o el acero se encuentra en que la ley que liga esfuerzos con deformaciones tiene un carácter fuertemente no lineal, dificultando por lo general la resolución de una variedad de problemas.

Se debe mencionar que ciertos problemas relacionados con la Mecánica del suelo se resuelven mediante el método analítico de equilibrio límite, que consiste en suponer una superficie de rotura y establecer en el contorno de ella qué condiciones de resistencia son necesarias para mantener el equilibrio. Su uso es frecuente en los análisis de estabilidad de cimentaciones superficiales, estructuras de retención o de estabilidad de taludes.

Antes de pasar al estudio de la forma en que se distribuyen en el suelo las tensiones y deformaciones originadas en el terreno por cargas aplicadas en el exterior conviene, prestar atención a lo que en la práctica se denomina como presión de contacto, es decir, la presión que transmite la base de una cimentación sometida a una carga en su cara superior sobre el suelo en el que se apoya. [8]

La distribución de esta presión dependerá:

- De la rigidez del terreno de cimentación
- Del cociente rigidez de la cimentación–rigidez del terreno de cimentación.

2.1.5 Rigidez del terreno de cimentación

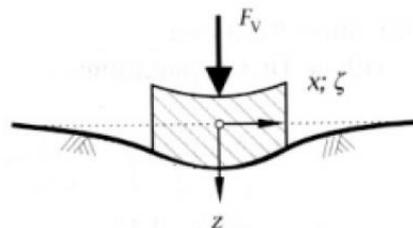
Por lo general son inferiores al del elemento de cimentación. Cuando el terreno sobre el que se apoya una superestructura es una roca competente la rigidez del terreno se expresa a través de la presión de contacto demostrando que puede asumir esfuerzos sin llegar a la falla; cuando la competencia del terreno es menor, al no poder soportar unos

esfuerzos tan elevados se rompe, redistribuyendo lateralmente las tensiones de manera que la tensión máxima y por ende su rigidez es menor que en el caso anterior. En la mayoría de los casos la distribución de tensiones se asume como uniforme. [8]

2.1.6 Rigidez del elemento de cimentación

La forma del asentamiento es determinado por la rigidez del elemento de cimentación. Si la fundación es flexible $[EI]$ tiende a 0 (ver figura 3), entonces el suelo de fundación y la estructura se deforman de igual forma y se forma el molde de asentamiento. La distribución de tensiones en la base podrá asumirse como uniforme. Ejemplo: rellenos sanitarios, terraplenes, plateas de cimentación. [8]

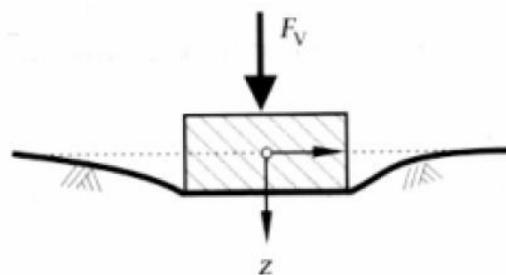
Figura 3: Molde de asentamiento en una fundación flexible



Fuente: J. Berrocal

De ser predominante la rigidez de la cimentación $[EI]$ tiende al infinito (Figura 4), la fundación se asienta en el terreno de manera uniforme siendo por lo tanto iguales en toda la base de la fundación. La distribución de tensiones es creciente hacia los extremos. Ejemplo: cimentaciones aisladas. [8]

Figura 4: Asentamiento típico de una fundación rígida



Fuente: J. Berrocal

2.1.7 Asentamientos

El asentamiento de un suelo es la acción de acomodarse, por la reducción de los espacios intersticiales (entre las partículas de suelo), el efecto resultante es que el suelo se compacta, reduciendo así su volumen. Se define también como la deformación vertical en la superficie de un terreno proveniente de la aplicación de cargas o debido al peso propio de las capas. [2]

2.1.7.1 Tipos de Asentamientos

- Inmediatos: por deformación elástica (suelos arenosos o suelos arcillosos no saturados).
- Por densificación: debidos a la salida del agua del suelo (suelos arcillosos).
- Por flujo lateral: desplazamiento de las partículas del suelo desde las zonas más cargadas hacia las menos cargadas (suelos no cohesivos). [2]

2.1.7.2 Causas de los Asentamientos

- Cargas estáticas: presión transmitida por las estructuras, por el propio peso del suelo, etc.
- Cargas dinámicas: clavado de estacas, terremotos, etc.
- Erosión del subsuelo
- Variaciones del nivel del agua: rebajes [2]

2.1.7.3 Efectos de los Asentamientos

Daños a la estructura del suelo, cambios en la apariencia, funcionalidad y estabilidad. El asentamiento ocasiona grietas en los cimientos, pilares de la losa o soportes de la estructura. Estas grietas causan fisuras en las paredes interiores del edificio y hacen que el asentamiento de las puertas del edificio, ventanas y molduras, queden disparejas. [2]

2.1.8 Suelos de Cimentación

Las cargas que transmite la cimentación a las capas del terreno causan tensiones y por tanto, deformaciones en la capa del terreno soporte. Como en todos los materiales, la deformación depende de la tensión y de las propiedades del terreno soportante, tiene lugar siempre y su suma produce asentamientos de las superficies de contacto entre la cimentación y el terreno. [2]

La conducta del terreno bajo tensión está afectada por su densidad y por las proporciones relativas de agua y aire que llenan sus huecos.

Estas propiedades varían con el tiempo y dependen de otros muchos factores como son:

- Variación del volumen de huecos como consecuencia de la compactación del terreno.
- Variación del volumen de huecos como consecuencia del desplazamiento de las partículas.
- Variación del volumen de huecos como consecuencia de la deformación de las partículas del terreno.

Debido a las interacciones de suelos y cimientos, las características de los suelos o terrenos sobre los que se construye influyen de modo determinante en la selección del tipo y tamaño de los cimientos usados; estos últimos a su vez, afectan significativamente el diseño de la superestructura, el tiempo de construcción del edificio y en consecuencia, los costos de la obra.

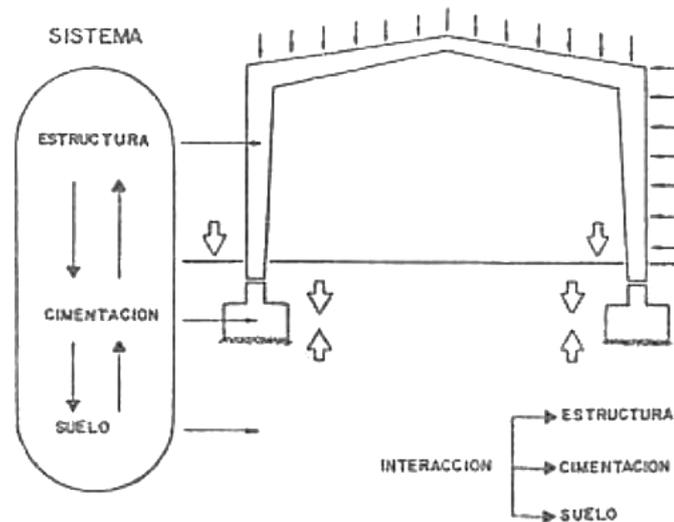
Por tanto, para lograr una edificación segura y económica es fundamental disponer de cierto conocimiento de la mecánica de suelos y del diseño de cimentaciones. [2]

2.1.9 Interacción suelo-estructura

El objetivo es realizar un análisis estructural de la subestructura y superestructura considerando el efecto de la rigidez de la masa del suelo. En las cimentaciones sobre

suelos compresibles surge la necesidad de determinar los hundimientos totales y diferenciales, dichos hundimientos dependen de la compresibilidad del suelo y de la rigidez o flexibilidad de la estructura de cimentación. [11]

Figura 5: Interacción suelo - estructura



Fuente: C. Magdaleno

2.1.10 Determinación de los Parámetros de Diseño

En la revista Geotechnique publicada en 1955, Terzaghi dio a conocer los coeficientes de reacción vertical del terreno a emplearse en el estudio de vigas horizontales como parte del diseño de cimentaciones superficiales así como los coeficientes de reacción horizontal a emplearse en los análisis de estructuras verticales, muros pantalla, pilotes, tablestacas, etc. Igualmente estableció las primeras formulaciones aplicables tanto a suelos cohesivos y suelos friccionales para un amplio rango de casos concretos, a la vez que define lineamientos adicionales para derivar conceptos al caso de suelos intermedios.

Para situaciones en las que el terreno resulte heterogéneo en sentido horizontal, será recomendable emplear herramientas de cálculo que permitan introducir coeficientes de balasto variables capaces de reproducir dicha heterogeneidad.

Gibson (1967) demostró que el Modelo de Winkler se vincula con el modelo elástico heterogéneo e incompresible, es decir con el coeficiente de Poisson igual a 0.5, correspondiendo una variación lineal del módulo de Young con la profundidad y valor nulo en la superficie.

J. Verdeyen (1964) expuso los criterios básicos para el tratamiento de la teoría de la viga flotante recogiendo las propuestas originales de Terzaghi relacionadas con el coeficiente de balasto en unidades convencionales.

Actualmente para adoptar el coeficiente de balasto, se tiende a establecer relaciones con el módulo de deformación del terreno, lo cual equivale a adoptar unos parámetros ficticios que relacionan la presión con la deformación que se producen en casos sencillos. El módulo de deformación aun no correspondiendo exactamente al comportamiento del terreno por no ser perfectamente elástico, sí constituye un parámetro más o menos constante, cuya estimación puede hacerse analíticamente. [3]

2.1.11 Análisis de datos

En el diseño ingenieril de una cimentación, para que sea exitosa y obtener un diseño eficiente y seguro depende de un correcto análisis de los datos del estudio de suelo.

El especialista en suelos siempre realiza las recomendaciones según caso, pero el Ingeniero debe solicitar los datos que se necesite para cada diseño, por ejemplo si la cimentación está en un lecho elástico se debe solicitar curvas de plasticidad, límite líquido, límite plástico y porcentaje de humedad.

Hay que tomar en cuenta el tipo de Cimentación recomendada por el especialista de Suelo, sin olvidarnos de verificar siempre la cota de desplante.

Otro aspecto importante son los asentamientos producidos por el sistema de cimentación elegido, teniendo también en cuenta los asentamientos diferenciales que puedan producirse.

Se tendrá en cuenta las recomendaciones del estudio de suelo para las etapas de excavación y construcción. De ser necesario se solicitará la revisión de las recomendaciones por parte de los Ingenieros Calculistas y una reunión a fin de dar los

conceptos en caso de que se presenten algunas dificultades para el diseño estructural, tanto para la vida útil del edificio como para las etapas constructivas. [2]

2.1.12 Vigas de Cimentación sobre medios elásticos

La ecuación diferencial que gobierna el comportamiento de vigas sobre suelo que se considera elástico, es la siguiente: [10]

$$\frac{d^4y}{dx^4} + \frac{ks * B * w}{EI} = \frac{P_o}{EI}$$

Donde:

y: Componente de desplazamiento vertical de un punto situado a una distancia x de la viga de cimentación

ks: Coeficiente de Balasto del suelo

B: Ancho de la viga de cimentación

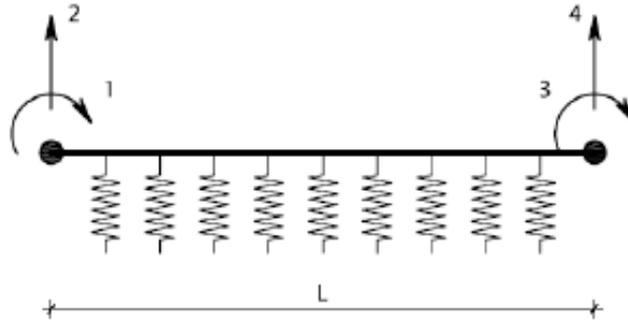
EI: Rigidez a flexión

P_o: Carga vertical que gravita sobre la viga

2.1.12.1 Matriz de rigidez de un elemento

En la figura 6 se indica el sistema de coordenadas locales de un elemento de la viga de cimentación. Para las cimentaciones horizontales las coordenadas globales son iguales a las coordenadas locales. Para la solución matricial se considera que la componente de desplazamiento vertical y es positiva si va hacia arriba y los giros son positivos si van en sentido horario. [10]

Figura 6: Interacción suelo - estructura



Fuente: Roberto Aguiar Falconí

Se procede primero por enumerar el giro en el nudo inicial, luego el desplazamiento vertical en el mismo nudo inicial, luego se enumera el giro y el desplazamiento vertical en el nudo final.

Ahora se pasa a definir la matriz de rigidez de un elemento, para su identificación \mathbf{k} (minúscula y negrilla) y k (minúscula y sin negrilla) es un elemento de la matriz de rigidez. [10]

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} k & -b & a & b_o \\ -b & t & -b_o & -t_o \\ a & -b_o & k & b \\ b_o & -t_o & b & t \end{bmatrix}$$

Las ecuaciones a aplicar para la obtención de los elementos de la matriz de rigidez son las siguientes:

$$k = \frac{2EI}{\lambda} * \frac{CS - sc}{S^2 - s^2}$$

$$b = \frac{2EI}{\lambda^2} * \frac{S^2 + s^2}{S^2 - s^2}$$

$$a = \frac{2EI}{\lambda} * \frac{Cs - Sc}{S^2 - s^2}$$

$$b_o = \frac{4EI}{\lambda^2} * \frac{Ss}{S^2 - s^2}$$

$$t = \frac{4EI}{\lambda^3} * \frac{CS + sc}{S^2 - s^2}$$

$$t_o = \frac{4EI}{\lambda^3} * \frac{Sc + Cs}{S^2 - s^2}$$

Las fórmulas a aplicar para calcular las rigideces de flexión de cada miembro aplicando las funciones trigonométricas e hiperbólicas son:

$$s = \text{sen} \frac{L}{\lambda} \qquad c = \text{cos} \frac{L}{\lambda}$$

$$S = \text{senh} \frac{L}{\lambda} \qquad C = \text{cosh} \frac{L}{\lambda}$$

Donde:

S: Seno hiperbólico de la relación de la distancia de cada vano para la longitud característica.

C: Coseno hiperbólico de la relación de la distancia de cada vano para la longitud característica.

s: Seno en radianes de la relación de la distancia de cada vano para la longitud característica.

c: Coseno en radianes de la relación de la distancia de cada vano para la longitud característica.

L: Distancia (longitud) de cada vano o tramo.

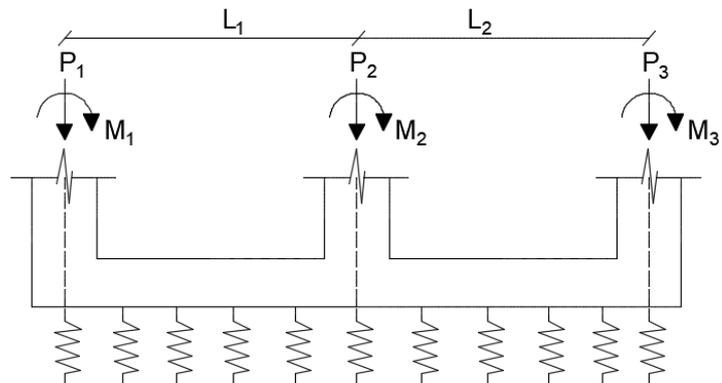
2.1.12.2 Matriz de rigidez de la estructura

Para hallar la matriz de rigidez de la estructura que se representará con **K** (negrilla y mayúscula), se debe primero encontrar la matriz de rigidez de cada uno de los elementos **k**, luego se determinará el vector de colocación para las vigas de cimentación que se refiere a los grados de libertad (giro y desplazamiento vertical) del nudo inicial y final respectivamente, que se explicará más adelante con un ejemplo. Finalmente, se debe ensamblar la matriz de rigidez de cada elemento y así se hallará la matriz de rigidez de la estructura. [10]

2.1.12.3 Vectores de Cargas (Q) y de Coordenadas Generalizadas (q)

En la figura 7 se indica un esquema de las cargas y los momentos actuantes en la viga de cimentación.

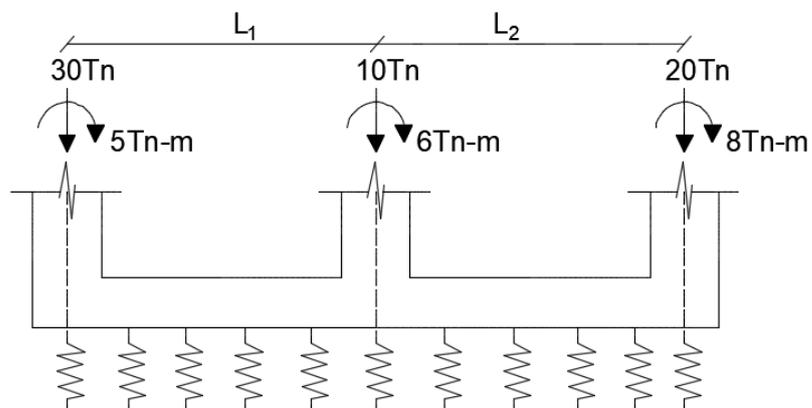
Figura 7: Cargas actuantes en la viga de cimentación



Fuente: Ana Sánchez

Se debe armar el vector de cargas con las cargas actuantes en los nudos y se debe ver en que coordenada actúa dicha carga, si es en el mismo sentido de la coordenada es positivo, caso contrario será negativo. Por ejemplo:

Figura 8: Ejemplo de las cargas actuantes en la viga de cimentación



Fuente: Ana Sánchez

Quedaría de la siguiente forma:

$$Q = \begin{bmatrix} 5 \\ -30 \\ 6 \\ -10 \\ 8 \\ -20 \end{bmatrix}$$

Para hallar el vector de coordenadas generalizadas se debe resolver el sistema de ecuaciones lineales, en la que la matriz de rigidez de la estructura K es la matriz de coeficientes y el vector Q es el término independiente. [10]

Es decir, una vez obtenida la matriz de la estructura y hallada la inversa de dicha matriz se procederá a realizar la siguiente operación:

$$q = K^{-1} * Q$$

Donde:

q : Vector de coordenadas generalizadas

K^{-1} : Inversa de la matriz de la estructura

Q : Vector de cargas

Dando como resultado una matriz de la siguiente forma:

$$q = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ Y_1 \\ \theta_2 \\ Y_2 \\ \dots \\ \dots \\ \theta_n \\ Y_n \end{bmatrix}$$

Donde:

θ : Giro o rotación a flexión (rad)

Y: Desplazamiento vertical (cm), debe tomarse con signo positivo.

2.1.12.4 Constantes de integración

Para poder conocer los valores de giro, desplazamiento vertical, la presión que transmite al suelo, el momento y corte en los puntos interiores de la viga es necesario aplicar el siguiente formulario, ya con los valores obtenidos de giros y desplazamientos verticales del vector de coordenadas generalizadas (q).

Tabla 3: Constantes de integración para vigas de sección constante

	Factor	Y_1	$\lambda\theta_1$	Y_2	$\lambda\theta_2$
A1 =	1	1	0	0	0
A2 =	$\frac{1}{S^2 - s^2}$	-(SC+sc)	- s^2	Sc+C _s	- S _s
A3 =	$\frac{1}{S^2 - s^2}$	SC+sc	S^2	-(Sc+C _s)	S _s
A4 =	$\frac{1}{S^2 - s^2}$	-(S^2+s^2)	-(SC-sc)	2S _s	Sc-C _s

Fuente: Roberto Aguiar Falconí

La interpretación de cada una de las ecuaciones descritas en la tabla 3, queda de la siguiente forma:

$$A_1 = 1 * [(1 * Y_1)]$$

$$A_2 = \frac{1}{S^2 - s^2} * [(-(SC + sc) * Y_1) + (-s^2) * \lambda\theta_1 + ((Sc + Cs) * Y_2) + (-Ss) * \lambda\theta_2]$$

$$A_3 = \frac{1}{S^2 - s^2} * [(SC + sc) * Y_1 + (S^2) * \lambda\theta_1 + -(Sc + Cs) * Y_2 + (Ss) * \lambda\theta_2]$$

$$A_4 = \frac{1}{S^2 - s^2} * [-(S^2 + s^2) * Y_1 + -(SC - sc) * \lambda\theta_1 + (2Ss * Y_2) + -(Ss - Cs) * \lambda\theta_2]$$

Una vez obtenidos dichos valores se procede a reemplazar en las expresiones finales de fuerzas y deformaciones para vigas de sección constante sobre medio elástico, presentadas en la tabla 4.

A continuación se presenta la solución de la ecuación diferencial presentada para la viga de cimentación:

Tabla 4: Expresiones finales de fuerzas y deformaciones para vigas de sección constante sobre medio elástico

	Factor	$C'c'$	$S'c'$	$C's'$	$S's'$
$y =$	1	A1	A2	A3	A4
$\emptyset =$	$1/\lambda$	A2+A3	A1+A4	-A1+A4	-A2+A3
$M =$	$2EI/\lambda^2$	-A4	-A3	A2	A1
$V =$	$2EI/\lambda^3$	A2-A3	A1-A4	A1+A4	A2+A3

Fuente: Roberto Aguiar Falconí

La interpretación de cada una de las ecuaciones descritas en la tabla 4, queda de la siguiente forma:

$$y_i = 1 * [(A1 * C'c') + (A2 * S'c') + (A3 * C's') + (A4 * S's')]$$

$$\emptyset_i = \frac{1}{\lambda} * [((A2 + A3) * C'c') + ((A1 + A4) * S'c') + (-(A1 + A4) * C's') + (-(A2 + A3) * S's')]$$

$$M_i = \frac{2EI}{\lambda^2} * [(-A4 * C'c') + (-A3 * S'c') + (A2 * C's') + (A1 * S's')]$$

$$V_i = \frac{2EI}{\lambda^3} * [((A2 - A3) * C'c') + ((A1 - A4) * S'c') + ((A1 + A4) * C's') + ((A2 + A3) * S's')]$$

$$\mu = \frac{x}{\lambda}$$

$$C' = \cosh(\mu) \quad S' = \sinh(\mu)$$

$$c' = \cos(\mu) \quad s' = \sen(\mu)$$

Donde:

y_i : Desplazamiento vertical de un punto situado a una distancia x de la viga de cimentación, es positivo si va hacia abajo.

\emptyset_i : Giro de un punto situado a una distancia x de la viga de cimentación, es positivo si es horario.

M_i : Momento a flexión de un punto situado a una distancia x de la viga de cimentación, es positivo si genera tracción en la parte inferior de la viga.

V_i : Fuerza Cortante de un punto situado a una distancia x de la viga de cimentación.

A1, A2, A3, A4: Constantes de integración, las mismas que se calculan en función de las condiciones de borde.

2.1.12.5 Presión en el suelo

La presión que se transmite al suelo se obtiene de la multiplicación del desplazamiento vertical por el coeficiente de balasto del suelo. [10]

$$Pr = y * ks$$

Donde:

Pr: Presión ejercida en el suelo

y: Desplazamiento vertical

ks: Coeficiente de Balasto del suelo

El valor de la presión en ningún caso será negativa, debido a que el suelo no trabaja a tracción; por lo que deberá ser menor o igual a la presión admisible del suelo (q_{adm}). En el caso de no cumplir estas condiciones, se recomienda aumentar la sección de la viga.

2.2 HIPÓTESIS

El desarrollo de una aplicación basada en MATLAB si influye en el tiempo de cálculo de cimentaciones sobre un lecho elástico.

2.3 SEÑALAMIENTO DE LAS VARIABLES DE LA HIPÓTESIS

2.3.1 Variable independiente

Desarrollo de una aplicación basada en MATLAB

2.3.2 Variable dependiente

Cálculo de cimentaciones sobre un lecho elástico.

CAPÍTULO III

METODOLOGÍA

3.1 NIVEL O TIPO DE INVESTIGACIÓN

El presente proyecto se enfocará en los siguientes niveles de investigación: explicativa y aplicada.

Es de nivel explicativa debido a que se trata de buscar la relación causa-efecto que se genera en el cálculo de cimentaciones sobre lecho elástico al realizarlo mediante un proceso manual y mediante el uso de una aplicación basada en MATLAB.

Es aplicada debido a que se aplicará los conocimientos y principios básicos de cimentaciones para el desarrollo de la aplicación (software), el mismo que facilitará los cálculos y así disminuir el tiempo del mismo, con el fin de proporcionar una herramienta de fácil acceso tanto para estudiantes e ingenieros.

3.2 POBLACIÓN Y MUESTRA

4.1.1 Población

Cimentaciones

4.1.2 Muestra

Ejercicios de cimentaciones sobre lecho elástico

3.3 OPERACIONALIZACIÓN DE VARIABLES

3.3.1 Variable Independiente

Desarrollo de una aplicación basada en MATLAB

Tabla 5: Operacionalización de la variable independiente

Conceptualización	Dimensiones	Indicadores	Ítems	Técnicas e Instrumentos
MATLAB realiza es una secuencia de instrucciones y procesos que emite órdenes para la realización de determinadas tareas al computador, con el uso correcto del lenguaje de programación se realiza la codificación para resolver determinadas tareas de una forma más rápida y eficaz.	Uso del lenguaje de programación	<ul style="list-style-type: none"> - Código de programación - Método de cálculo - Lenguajes informáticos 	¿Cómo aplicar el lenguaje de programación para codificar el método de cálculo?	Investigación bibliográfica.
	Facilitar y agilizar los procesos de cálculo	<ul style="list-style-type: none"> - Obtención de los resultados confiables - Rapidez al obtener los resultados 	¿Cómo dicha aplicación permitirá agilizar y optimizar los procesos de cálculo para obtener resultados confiables?	Investigación bibliográfica.

Fuente: Ana Sánchez.

3.3.2 Variable Dependiente

Cálculo de cálculo de cimentaciones sobre un lecho elástico.

Tabla 6: Operacionalización de la variable dependiente

Conceptualización	Dimensiones	Indicadores	Ítems	Técnicas e Instrumentos
Una de las aplicaciones de la teoría elástica que estudia la relación entre el esfuerzo y la deformación de una estructura en relación con el suelo sobre el cual está asentada, es aquella que trata de representar el medio soportante como un medio continuo elástico. Dicho modelo supone que la deflexión del suelo debe ser satisfecho por el equilibrio de fuerzas verticales.	Viga de cimentación	<ul style="list-style-type: none"> - Coeficiente de Balasto del suelo - Longitud característica - Módulo de elasticidad del material - Inercia de la sección - Ancho de la sección con la que se trabaja - Presión ejercida 	¿Cuáles son las fórmulas a aplicar para obtener la presión ejercida en el suelo?	Investigación bibliográfica.
	Matriz de Rigidez	<ul style="list-style-type: none"> - Propiedades de los materiales - Geometría de los elementos - Condiciones de apoyo o soporte de la estructura - Solicitaciones de carga externa 	¿Cómo se plantean las condiciones de cada elemento? ¿Cómo se forma la matriz de rigidez?	Investigación bibliográfica.
	Soluciones en los puntos de la viga	<ul style="list-style-type: none"> - Desplazamientos - Giros - Momentos - Cortantes 	¿Qué fórmulas se aplican para resolver la viga?	Investigación bibliográfica.

Fuente: Ana Sánchez

3.4 PLAN DE RECOLECCIÓN DE INFORMACIÓN

Tabla 7: Plan de recolección de información

Preguntas Básicas	Explicación
1. ¿Para qué?	Disminuir el tiempo de cálculo y agilizar el proceso de cálculo de cimentaciones sobre medio elástico, con el fin de obtener resultados precisos de una manera eficaz.
2. ¿De qué personas u objetos?	De cimentaciones sobre lecho elástico, sometidas a carga puntual y momento.
3. ¿Sobre qué aspectos?	Coeficiente de Balasto, Módulo de Elasticidad, Inercia de la sección, Matrices de Rigidez, Condiciones de apoyo, Presión ejercida en el suelo, Desplazamientos verticales, Momentos y Cortantes a una distancia determinada.
4. ¿Quién?	Ana Gabriela Sánchez.
5. ¿Dónde?	En la Universidad técnica de Ambato en la Biblioteca de la Facultad de Ingeniería Civil y Mecánica.
6. ¿Cómo?	Investigación Bibliográfica.

Fuente: Ana Sánchez

3.5 PLAN Y PROCESAMIENTO DE ANÁLISIS

Se seguirá un plan estructurado de la siguiente manera:

- 1) Revisión de la bibliografía
- 2) Identificación del lenguaje de programación
- 3) Desarrollo de la aplicación basada en MATLAB
- 4) Resolución de ejercicios de manera manual
- 5) Resolución de ejercicios con la aplicación desarrollada
- 6) Análisis y comparación entre resultados
- 7) Verificación de hipótesis

CAPÍTULO IV

ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN DE RESULTADOS

4.1 RECOLECCIÓN DE DATOS

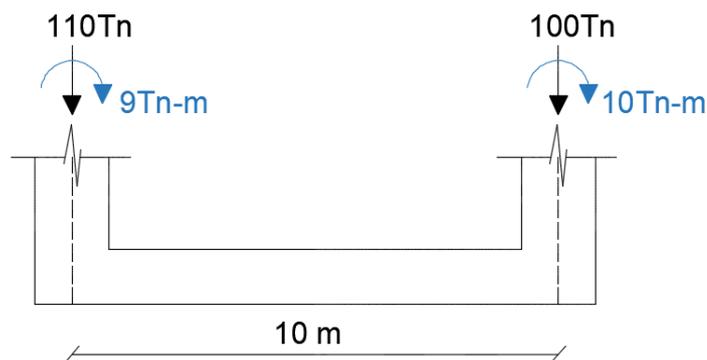
Los ejercicios que se van a resolver serán desarrollados mediante dos métodos: el primero se realizará de forma manual, y como segundo método se empleará la aplicación (software) desarrollado en MATLAB para posteriormente realizar un análisis comparativo de los resultados obtenidos.

Para desarrollar los ejercicios de manera manual se utilizarán las definiciones y ecuaciones que se trataron en el capítulo 2 del presente escrito. Primero se resolverá la viga con un solo tramo o vano y otro ejercicio con tres tramos.

4.1.1 EJEMPLO DE CÁLCULO CON UN VANO (RESOLUCIÓN MANUAL)

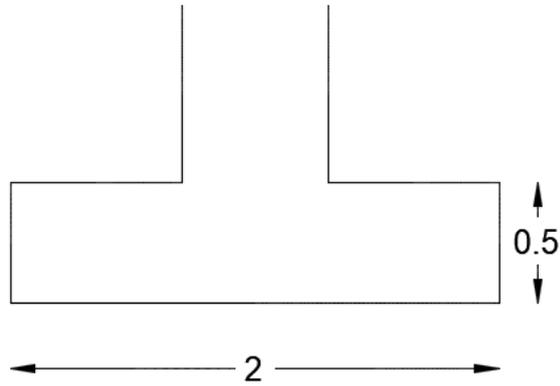
Resolver la siguiente viga de cimentación indicada en la figura 9. La viga tiene una base de 2.0 m y un peralte de 50 cm, la longitud del vano es de 15.0 m. Se encuentra sobre un suelo cuyo Coeficiente de Balasto (ks) es 1200 Tn/m^3 . El Módulo de Elasticidad del material tiene un valor $E= 2.5E6 \text{ Tn/m}^2$

Figura 9: Ilustración gráfica del ejemplo de cálculo para viga de cimentación



Fuente: Ana Sánchez

Figura 10: Ilustración gráfica del corte de la viga



Fuente: Ana Sánchez

Datos:

- $E = 2.5E6 \text{ Tn/m}^2$
- $k_s = 1200 \text{ Tn/m}^3$
- $L = 10 \text{ m}$
- $B = 2.0 \text{ m}$
- $H = 0.5 \text{ m}$

Solución:

1. Número de tramos o vanos (n)

$$n = 1$$

2. Determinar los grados de libertad de la estructura (#GDL)

$$\#GDL = 2 * n + 2$$

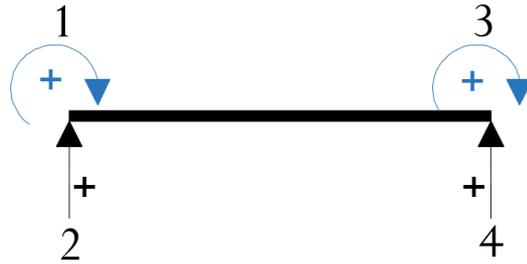
$$\#GDL = 2 * 1 + 2$$

$$\#GDL = 4$$

3. Realizar un esquema para enumerar los grados de libertad

Se debe enumerar primero el giro y luego el desplazamiento

Figura 11: Ilustración gráfica de los grados de libertad



Fuente: Ana Sánchez

4. Enumerar los vectores de colocación para cada elemento

El vector de colocación son los grados de libertad del elemento y sirve para encontrar la matriz de rigidez del elemento, para luego hallar por ensamblaje directo la matriz de rigidez de la estructura.

En este caso se tiene un solo elemento, por lo tanto:

$$\text{Elemento 1:} \quad \text{Vc} \quad 1 - 2 - 3 - 4$$

5. Determinar el valor de la inercia (I)

$$I = \frac{B * H^3}{12}$$

$$I = \frac{2.0 \text{ m} * (0.50\text{m})^3}{12}$$

$$I = 0.0208 \text{ m}^4$$

6. Cálculo de la longitud característica de la viga (λ)

$$\lambda = \sqrt[4]{\frac{4 * E * I}{k_s * B}}$$

$$\lambda = \sqrt[4]{\frac{4 * 2.5E6 \frac{Tn}{m^2} * 0.0208m^4}{1200 \frac{Tn}{m^3} * 2.0m}}$$

$$\lambda = 3.0524 \text{ m}$$

7. Cálculo de las rigideces a flexión para cada miembro

$$S = \sinh \frac{L}{\lambda}$$

$$S = \sinh \frac{10 \text{ m}}{3.05 \text{ m}}$$

$$S = 13.2179$$

$$C = \cosh \frac{L}{\lambda}$$

$$C = \cosh \frac{10 \text{ m}}{3.05 \text{ m}}$$

$$C = 13.2556$$

$$s = \sin \frac{L}{\lambda}$$

$$s = \sin \frac{10 \text{ m}}{3.05 \text{ m}}$$

$$s = -0.1341$$

$$c = \cos \frac{L}{\lambda}$$

$$c = \cos \frac{10 \text{ m}}{3.05 \text{ m}}$$

$$c = -0.9910$$

8. Cálculo de los elementos de la matriz de rigidez

$$k = \frac{2EI}{\lambda} * \frac{CS - sc}{S^2 - s^2}$$

$$k = \frac{2 * 2.5E6 * 0.0208}{3.0524} * \frac{(13.2556 * 13.2179) - (-0.1341 * -0.9910)}{13.2179^2 - (-0.1341)^2}$$

$$k = 34201.5931$$

$$b = \frac{2EI}{\lambda^2} * \frac{S^2 + s^2}{S^2 - s^2}$$

$$b = \frac{2 * 2.5E6 * 0.0208}{3.0524^2} * \frac{13.2179^2 + (-0.1341)^2}{13.2179^2 - (-0.1341)^2}$$

$$b = 11182.6433$$

$$a = \frac{2EI}{\lambda} * \frac{Cs - Sc}{S^2 - s^2}$$

$$a = \frac{2 * 2.5E6 * 0.0208}{3.0524} * \frac{(13.2556 * -0.1341) - (13.2179 * -0.9910)}{13.2179^2 - (-0.1341)^2}$$

$$a = 2211.4014$$

$$b_o = \frac{4EI}{\lambda^2} * \frac{Ss}{S^2 - s^2}$$

$$b_o = \frac{4 * 2.5E6 * 0.0208}{3.0524^2} * \frac{13.2179 * -0.1341}{13.2179^2 - (-0.1341)^2}$$

$$b_o = -226.9595$$

$$t = \frac{4EI}{\lambda^3} * \frac{CS + sc}{S^2 - s^2}$$

$$t = \frac{4 * 2.5E6 * 0.0208}{3.0524^3} * \frac{(13.2556 * 13.2179) + (-0.1341 * -0.9910)}{13.2179^2 - (-0.1341)^2}$$

$$t = 7352.9494$$

$$t_o = \frac{4EI}{\lambda^3} * \frac{Sc + Cs}{S^2 - s^2}$$

$$t_o = \frac{4 * 2.5E6 * 0.0208}{3.0524^3} * \frac{(13.2179 * -0.9910) + (13.2556 * -0.1341)}{13.2179^2 - (-0.1341)^2}$$

$$t_o = -623.8404$$

9. Armar la matriz de rigidez del elemento

$$k = \begin{bmatrix} k & -b & a & b_o \\ -b & t & -b_o & -t_o \\ a & -b_o & k & b \\ b_o & -t_o & b & t \end{bmatrix}$$

$$k = \begin{bmatrix} 34201.5931 & -11182.6433 & 2211.4014 & -226.9595 \\ -11182.6433 & 7352.9494 & 226.9595 & 623.8404 \\ 2211.4014 & 226.9595 & 34201.5931 & 11182.6433 \\ -226.9595 & 623.8404 & 11182.6433 & 7352.9494 \end{bmatrix}$$

10. Matriz de rigidez de la estructura (K)

En este caso la matriz de rigidez del elemento k es la matriz de rigidez de la estructura K , debido a que solamente existe un vano.

$$K = \begin{bmatrix} 34201.5931 & -11182.6433 & 2211.4014 & -226.9595 \\ -11182.6433 & 7352.9494 & 226.9595 & 623.8404 \\ 2211.4014 & 226.9595 & 34201.5931 & 11182.6433 \\ -226.9595 & 623.8404 & 11182.6433 & 7352.9494 \end{bmatrix}$$

11. Calcular la inversa de la matriz de la estructura (K^{-1})

$$K^{-1} = \begin{bmatrix} 5.882E-5 & 8.946E-5 & -4.991E-6 & 1.816E-6 \\ 8.9462E-5 & 0.0027 & -1.816E-6 & -1.769E-5 \\ -4.991E-6 & -1.816E-6 & 5.882E-5 & -8.946E-5 \\ 1.815E-6 & -1.769E-5 & -8.946E-5 & 0.00027 \end{bmatrix}$$

12. Formar el vector de cargas (Q): Colocando los valores de cargas y momentos actuantes en los nudos

$$Q = \begin{bmatrix} 9 \\ -110 \\ 10 \\ -100 \end{bmatrix}$$

13. Hallar el vector de coordenadas generalizadas

$$q = K^{-1} * Q$$

$$q = \begin{bmatrix} -9.543E-3 \\ -2.754E-2 \\ 9.689E-3 \\ -2.629E-2 \end{bmatrix} \text{ cada valor representa } \rightarrow \begin{bmatrix} \theta_1 \\ Y_1 \\ \theta_2 \\ Y_2 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto:

$$\theta_1 = -9.543E - 3$$

$$Y_1 = 2.754E - 2$$

$$\theta_2 = 9.689E - 3$$

$$Y_2 = 2.629E - 2$$

Nota: Los desplazamientos (Y) deben tomarse positivos para los cálculos.

14. Cálculo de las constantes de integración del tramo

Según la Tabla 3:

	Factor	Y_1	$\lambda\theta_1$	Y_2	$\lambda\theta_2$
A1 =	1	1	0	0	0
A2 =	$\frac{1}{S^2 - s^2}$	-(SC+sc)	-s ²	Sc+Cs	-Ss
A3 =	$\frac{1}{S^2 - s^2}$	SC+sc	S ²	-(Sc+Cs)	Ss
A4 =	$\frac{1}{S^2 - s^2}$	-(S ² +s ²)	-(SC-sc)	2Ss	Sc-Cs

$$\lambda\theta_1 = 3.0524 * 9.543E - 3 = -2.9128E - 2$$

$$\lambda\theta_2 = 3.0524 * 9.543E - 3 = 2.9575E - 2$$

$$Y_1 = 2.7541E - 2$$

$$Y_2 = 2.6294E - 2$$

$$C * S = 13.2256 * 13.2179 = 175.2115$$

$$s * c = -0.1341 * -0.9910 = 0.1329$$

$$S * c = 13.2179 * -0.9910 = -13.0984$$

$$C * s = 13.2556 * -0.1341 = -1.7782$$

$$S^2 - s^2 = 13.2179^2 - (-0.1341^2) = 174.6942$$

$$\frac{1}{S^2 - s^2} = \frac{1}{174.6942} = 0.0057$$

Tabla 8: Valores de las constantes de integración

	Factor	Y_1	$\lambda\theta_1$	Y_2	$\lambda\theta_2$
A1 =	1	1	0	0	0
A2 =	0.0057	-175.3444	- 0.0180	-14.8766	1.7731
A3 =	0.0057	175.3444	174.7122	14.8766	-1.7731
A4 =	0.0057	-175.7302	-175.0785	-3.5463	-11.3202

Fuente: Ana Sánchez

$$A_1 = 1 * [(1 * 2.7541E - 2)]$$

$$A_1 = 2.7541E - 2$$

$$A_2 = 0.0057 * [((-175.344 * 2.7541E - 2) + (-0.0180 * -2.9128E - 2) + (-14.8766 * 2.6294E - 2) + (1.7731 * 2.9575E - 2)]$$

$$A_2 = -2.9580E - 2$$

$$A_3 = 0.0057 * [(175.3444 * 2.7541E - 2) + (174.7122 * -2.9128E - 2) + (14.8766 * 2.6294E - 2) + (-1.7731 * 2.9575E - 2)]$$

$$A_3 = 4.5161E - 4$$

$$A_4 = 0.0057 * [(-(-174.7302 * 2.7541E - 2) + (-175.0785 * -2.9128E - 2) + (-3.5463 * 2.6294E - 2) + (-11.3202 * 2.9575E - 2)]$$

$$A_4 = -8.0498E - 4$$

15. Cálculo de las expresiones finales de fuerzas y deformaciones para vigas de sección constante.

Según la Tabla 4:

	Factor	$C'c'$	$S'c'$	$C's'$	$S's'$
$y =$	1	A1	A2	A3	A4
$\phi =$	$1/\lambda$	A2+A3	A1+A4	-A1+A4	-A2+A3
$M =$	$2EI/\lambda^2$	-A4	-A3	A2	A1
$V =$	$2EI/\lambda^3$	A2-A3	A1-A4	A1+A4	A2+A3

Nota: Se recomienda que la discretización del tramo sea en partes iguales. En este caso será dividida en 5 partes.

Para $x = 0$ m

$$\mu = \frac{x}{\lambda}$$

$$\mu = \frac{0 \text{ m}}{3.0524 \text{ m}}$$

$$\mu = 0$$

$$C' = \cosh(\mu)$$

$$C' = \cosh(0)$$

$$C' = 1$$

$$S' = \sinh(\mu)$$

$$S' = \sinh(0)$$

$$S' = 0$$

$$c' = \cos(\mu)$$

$$c' = \cos(0)$$

$$c' = 1$$

$$s' = \text{sen}(\mu)$$

$$s' = \text{sen}(0)$$

$$s' = 0$$

$$C' * c' = 1 * 1 = 1$$

$$S' * c' = 0 * 1 = 0$$

$$C' * s' = 1 * 0 = 0$$

$$S' * s' = 0 * 0 = 0$$

Para $x = 2 \text{ m}$

$$\mu = \frac{x}{\lambda}$$

$$\mu = \frac{2 \text{ m}}{3.0524 \text{ m}}$$

$$\mu = 0.6552$$

$$C' = \text{cosh}(\mu)$$

$$C' = \text{cosh}(0.6552)$$

$$C' = 1.2225$$

$$S' = \text{senh}(\mu)$$

$$S' = \text{senh}(0.6552)$$

$$S' = 0.7031$$

$$c' = \cos(\mu)$$

$$c' = \cos(0.6552)$$

$$c' = 0.7929$$

$$s' = \text{sen}(\mu)$$

$$s' = \text{sen}(0.6552)$$

$$s' = 0.6093$$

$$C' * c' = 1.2225 * 0.7929 = 0.9693$$

$$S' * c' = 0.7031 * 0.7929 = 0.5575$$

$$C' * s' = 1.2225 * 0.6093 = 0.7449$$

$$S' * s' = 0.7031 * 0.6093 = 0.4284$$

Para x = 4 m

$$\mu = \frac{x}{\lambda}$$

$$\mu = \frac{4 \text{ m}}{3.0524 \text{ m}}$$

$$\mu = 1.3105$$

$$C' = \cosh(\mu)$$

$$C' = \cosh(1.3105)$$

$$C' = 1.9888$$

$$S' = \sinh(\mu)$$

$$S' = \sinh(1.3105)$$

$$S' = 1.7191$$

$$c' = \cos(\mu)$$

$$c' = \cos(1.3105)$$

$$c' = 0.2574$$

$$s' = \text{sen}(\mu)$$

$$s' = \text{sen}(1.3105)$$

$$s' = 0.9663$$

$$C' * c' = 1.9888 * 0.2574 = 0.5119$$

$$S' * c' = 1.7191 * 0.2574 = 0.4425$$

$$C' * s' = 1.9888 * 0.9663 = 1.9218$$

$$S' * s' = 1.7191 * 0.9663 = 1.6612$$

Para $x = 6 \text{ m}$

$$\mu = \frac{x}{\lambda}$$

$$\mu = \frac{6 \text{ m}}{3.0524 \text{ m}}$$

$$\mu = 1.9657$$

$$C' = \cosh(\mu)$$

$$C' = \cosh(1.9657)$$

$$C' = 3.6399$$

$$S' = \sinh(\mu)$$

$$S' = \sinh(1.9657)$$

$$S' = 3.4999$$

$$c' = \cos(\mu)$$

$$c' = \cos(1.9657)$$

$$c' = -0.3847$$

$$s' = \text{sen}(\mu)$$

$$s' = \text{sen}(1.9657)$$

$$s' = 0.9230$$

$$C' * c' = 3.6399 * -0.3847 = -1.4003$$

$$S' * c' = 3.4999 * -0.3847 = -1.3464$$

$$C' * s' = 3.6399 * 0.9230 = 3.3598$$

$$S' * s' = 3.4999 * 0.9230 = 3.2305$$

Para $x = 8 \text{ m}$

$$\mu = \frac{x}{\lambda}$$

$$\mu = \frac{8 \text{ m}}{3.0524 \text{ m}}$$

$$\mu = 2.6209$$

$$C' = \cosh(\mu)$$

$$C' = \cosh(2.6209)$$

$$C' = 6.9105$$

$$S' = \sinh(\mu)$$

$$S' = \sinh(2.6209)$$

$$S' = 6.8378$$

$$c' = \cos(\mu)$$

$$c' = \cos(2.6209)$$

$$c' = -0.8675$$

$$s' = \text{sen}(\mu)$$

$$s' = \text{sen}(2.6209)$$

$$s' = 0.4975$$

$$C' * c' = 6.9105 * -0.8675 = -5.9948$$

$$S' * c' = 6.8378 * -0.8675 = -5.9317$$

$$C' * s' = 6.9105 * 0.4975 = 3.4378$$

$$S' * s' = 6.8378 * 0.4975 = 3.4016$$

Para x = 10 m

$$\mu = \frac{x}{\lambda}$$

$$\mu = \frac{10 \text{ m}}{3.0524 \text{ m}}$$

$$\mu = 3.2761$$

$$C' = \text{cosh}(\mu)$$

$$C' = \text{cosh}(3.2761)$$

$$C' = 13.2556$$

$$S' = \text{senh}(\mu)$$

$$S' = \text{senh}(3.2761)$$

$$S' = 13.2179$$

$$c' = \cos(\mu)$$

$$c' = \cos(3.2761)$$

$$c' = -0.9910$$

$$s' = \text{sen}(\mu)$$

$$s' = \text{sen}(3.2761)$$

$$s' = -0.1341$$

$$C' * c' = 13.2556 * -0.9910 = -13.1358$$

$$S' * c' = 13.2179 * -0.9910 = -13.0984$$

$$C' * s' = 13.2556 * -0.1341 = -1.7782$$

$$S' * s' = 13.2119 * -0.1341 = -1.7731$$

$$\frac{2 * E * I}{\lambda^2} = \frac{2 * 2.5E6 - 0.0208}{3.0524^2} = 11180.33989$$

$$\frac{2 * E * I}{\lambda^3} = \frac{2 * 2.5E6 - 0.0208}{3.0524^3} = 3662.84150$$

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{3.0524} = 0.32761$$

Tabla 9: Valores de las expresiones finales de fuerzas y deformaciones

	Factor	C'c'	S'c'	C's'	S's'
y =	1	0.02754	-0.02958	0.00045	-0.00080
Ø =	0.32761	-0.02913	0.02674	-0.02835	0.03003
M =	11180.33989	0.00080	-0.00045	-0.02958	0.02754
V =	3662.84150	-0.03003	0.02835	0.02674	-0.02913

Fuente: Ana Sánchez

Para x = 0 m

$$y_0 = 1 * [(A1 * C'c') + (A2 * S'c') + (A3 * C's') + (A4 * S's')]$$

$$y_0 = 1[(0.02754 * 1) + (-0.02958 * 0) + (0.00045 * 0) + (-0.00080 * 0)]$$

$$y_0 = 2.754 \text{ cm}$$

$$\phi_0 = \frac{1}{\lambda} * [((A2 + A3) * C'c') + ((A1 + A4) * S'c') + (-(A1 + A4) * C's') + (-(A2 + A3) * S's')]$$

$$\phi_0 = 0.32761 * [((-0.02913 * 1) + (0.02674 * 0) + (-0.02835 * 0) + (0.03003 * 0)]$$

$$\phi_0 = -0.0095 \text{ rad}$$

$$M_0 = \frac{2EI}{\lambda^2} * [(-A4 * C'c') + (-A3 * S'c') + (A2 * C's') + (A1 * S's')]$$

$$M_0 = 11180.33989[(0.00080 * 1) + (-0.00045 * 0) + (-0.02958 * 0) + (0.02754 * 0)]$$

$$M_0 = 9.00 \text{ Tn} - m$$

$$V_0 = \frac{2EI}{\lambda^3} * [((A2 - A3) * C'c') + ((A1 - A4) * S'c') + ((A1 + A4) * C's') + ((A2 + A3) * S's')]$$

$$V_0 = 3662.84150 * [((-0.03003 * 1) + (0.02835 * 0) + (0.02674 * 0) + (-0.02913 * 0)]$$

$$V_0 = -110.00 \text{ Tn}$$

$$Pr_0 = y * ks$$

$$Pr_0 = 0.02754m * 1200Tn/m^3$$

$$Pr_0 = 33.050 \text{ Tn}/m^2$$

Para x = 2 m

$$y_2 = 1 * [(A1 * C'c') + (A2 * S'c') + (A3 * C's') + (A4 * S's')]$$

$$y_2 = 1[(0.02754 * 0.9693) + (-0.02958 * 0.5575) + (0.00045 * 0.7449) + (-0.00080 * 0.4284)]$$

$$y_2 = 1.019 \text{ cm}$$

$$\phi_2 = \frac{1}{\lambda} * [((A2 + A3) * C'c') + ((A1 + A4) * S'c') + (-(A1 + A4) * C's') + (-(A2 + A3) * S's')]$$

$$\phi_2 = 0.32761 * [((-0.02913 * 0.9693) + (0.02674 * 0.5575) + (-0.02835 * 0.7449) + (0.03003 * 0.4284)]$$

$$\phi_2 = -0.0071 \text{ rad}$$

$$M_2 = \frac{2EI}{\lambda^2} * [(-A4 * C'c') + (-A3 * S'c') + (A2 * C's') + (A1 * S's')]$$

$$M_2 = 11180.33989[(0.00080 * 0.9693) + (-0.00045 * 0.5575) + (-0.02958 * 0.7449) + (0.02754 * 0.4284)]$$

$$M_2 = -108.508 \text{ Tn} - m$$

$$V_2 = \frac{2EI}{\lambda^3} * [((A2 - A3) * C'c') + ((A1 - A4) * S'c') + ((A1 + A4) * C's') + ((A2 + A3) * S's')]$$

$$V_2 = 3662.84150 * [((-0.03003 * 0.9693) + (0.02835 * 0.5575) + (0.02674 * 0.7449) + (-0.02913 * 0.4284)]$$

$$V_2 = -21.50 \text{ Tn}$$

$$Pr_2 = y * ks$$

$$Pr_2 = 0.0102m * 1200Tn/m^3$$

$$Pr_2 = 12.235 Tn/m^2$$

Para x = 4 m

$$y_4 = 1 * [(A1 * C'c') + (A2 * S'c') + (A3 * C's') + (A4 * S's')]$$

$$y_4 = 1[(0.02754 * 0.5119) + (-0.02958 * 0.4425) + (0.00045 * 1.9218) + (-0.00080 * 1.6612)]$$

$$y_4 = 0.054 \text{ cm}$$

$$\phi_4 = \frac{1}{\lambda} * [((A2 + A3) * C'c') + ((A1 + A4) * S'c') + (-(A1 + A4) * C's') + (-(A2 + A3) * S's')]$$

$$\phi_4 = 0.32761 * [((-0.02913 * 0.5119) + (0.02674 * 0.4425) + (-0.02835 * 1.9218) + (0.03003 * 1.6612)]$$

$$\phi_4 = -0.0025 \text{ rad}$$

$$M_4 = \frac{2EI}{\lambda^2} * [(-A4 * C'c') + (-A3 * S'c') + (A2 * C's') + (A1 * S's')]$$

$$M_4 = 11180.33989[(0.00080 * 0.5119) + (-0.00045 * 0.4425) + (-0.02958 * 1.9218) + (0.02754 * 1.6612)]$$

$$M_4 = -121.671 Tn - m$$

$$V_4 = \frac{2EI}{\lambda^3} * [((A2 - A3) * C'c') + ((A1 - A4) * S'c') + ((A1 + A4) * C's') + ((A2 + A3) * S's')]$$

$$V_4 = 3662.84150 * [((-0.03003 * 0.5119) + (0.02835 * 0.4425) + (0.02674 * 1.9218) + (-0.02913 * 1.6612)]$$

$$V_4 = 0.601 \text{ Tn}$$

$$Pr_4 = y * ks$$

$$Pr_4 = 0.00054 \text{ m} * 1200 \text{ Tn/m}^3$$

$$Pr_4 = 0.649 \text{ Tn/m}^2$$

Para x = 6 m

$$y_6 = 1 * [(A1 * C'c') + (A2 * S'c') + (A3 * C's') + (A4 * S's')]$$

$$y_6 = 1[(0.02754 * -1.4003) + (-0.02958 * -1.3464) + (0.00045 * 3.3598) + (-0.00080 * 3.2305)]$$

$$y_6 = 0.018 \text{ cm}$$

$$\phi_6 = \frac{1}{\lambda} * [((A2 + A3) * C'c') + ((A1 + A4) * S'c') + (-(A1 + A4) * C's') + (-(A2 + A3) * S's')]$$

$$\phi_6 = 0.32761 * [((-0.02913 * -1.4003) + (0.02674 * -1.3464) + (-0.02835 * 3.3598) + (0.03003 * 3.2305)]$$

$$\phi_6 = 0.0022 \text{ rad}$$

$$M_6 = \frac{2EI}{\lambda^2} * [(-A4 * C'c') + (-A3 * S'c') + (A2 * C's') + (A1 * S's')]$$

$$M_6 = 11180.33989[(0.00080 * -1.4003) + (-0.00045 * -1.3464) + (-0.02958 * 3.3598) + (0.02754 * 3.2305)]$$

$$M_6 = -122.184 \text{ Tn} - m$$

$$V_6 = \frac{2EI}{\lambda^3} * [((A2 - A3) * C'c') + ((A1 - A4) * S'c') + ((A1 + A4) * C's') + ((A2 + A3) * S's')]$$

$$V_6 = 3662.84150 * [((-0.03003 * -1.4003) + (0.02835 * -1.3464) + (0.02674 * 3.3598) + (-0.02913 * 3.2305)]$$

$$V_6 = -1.404 \text{ Tn}$$

$$Pr_6 = y * ks$$

$$Pr_6 = 0.000177 \text{ m} * 1200 \text{ Tn/m}^3$$

$$Pr_6 = 0.213 \text{ Tn/m}^2$$

Para x = 8 m

$$y_8 = 1 * [(A1 * C'c') + (A2 * S'c') + (A3 * C's') + (A4 * S's')]$$

$$y_8 = 1[(0.02754 * -5.9948) + (-0.02958 * -5.9317) + (0.00045 * 3.4378) + (-0.00080 * 3.4016)]$$

$$y_8 = 0.917 \text{ cm}$$

$$\phi_8 = \frac{1}{\lambda} * [((A2 + A3) * C'c') + ((A1 + A4) * S'c') + (-(A1 + A4) * C's') + (-(A2 + A3) * S's')]$$

$$\phi_8 = 0.32761 * [((-0.02913 * -5.9948) + (0.02674 * -5.9317) + (-0.02835 * 3.4378) + (0.03003 * 3.4016)]$$

$$\phi_8 = 0.0068 \text{ rad}$$

$$M_8 = \frac{2EI}{\lambda^2} * [(-A4 * C'c') + (-A3 * S'c') + (A2 * C's') + (A1 * S's')]$$

$$M_8 = 11180.33989[(0.00080 * -5.9948) + (-0.00045 * -5.9317) + (-0.02958 * 3.4378) + (0.02754 * 3.4016)]$$

$$M_8 = -113.492 \text{ Tn} - m$$

$$V_8 = \frac{2EI}{\lambda^3} * [((A2 - A3) * C'c') + ((A1 - A4) * S'c') + ((A1 + A4) * C's') + ((A2 + A3) * S's')]$$

$$V_8 = 3662.84150 * [((-0.03003 * -5.9948) + (0.02835 * -5.9317) + (0.02674 * 3.4378) + (-0.02913 * 3.4016)]$$

$$V_8 = 17.295 \text{ Tn}$$

$$Pr_8 = y * ks$$

$$Pr_8 = 0.009168 \text{ m} * 1200 \text{ Tn/m}^3$$

$$Pr_8 = 11.001 \text{ Tn/m}^2$$

Para x = 10 m

$$y_{10} = 1 * [(A1 * C'c') + (A2 * S'c') + (A3 * C's') + (A4 * S's')]$$

$$y_{10} = 1 * [(0.02754 * -13.1358) + (-0.02958 * -13.0984) + (0.00045 * -1.7782) + (-0.00080 * -1.7731)]$$

$$y_{10} = 2.629 \text{ cm}$$

$$\phi_{10} = \frac{1}{\lambda} * [((A2 + A3) * C'c') + ((A1 + A4) * S'c') + (-(A1 + A4) * C's') + (-(A2 + A3) * S's')]$$

$$\phi_{10} = 0.32761 * [((-0.02913 * -13.1358) + (0.02674 * -13.0984) + (-0.02835 * -1.7782) + (0.03003 * -1.7731)]$$

$$\phi_{10} = 0.0097 \text{ rad}$$

$$M_{10} = \frac{2EI}{\lambda^2} * [(-A4 * C'c') + (-A3 * S'c') + (A2 * C's') + (A1 * S's')]$$

$$M_{10} = 11180.33989[(0.00080 * -13.1358) + (-0.00045 * -13.0984) + (-0.02958 * -1.7782) + (0.02754 * -1.7731)]$$

$$M_{10} = -10.00 \text{ Tn} - m$$

$$V_{10} = \frac{2EI}{\lambda^3} * [((A2 - A3) * C'c') + ((A1 - A4) * S'c') + ((A1 + A4) * C's') + ((A2 + A3) * S's')]$$

$$V_{10} = 3662.84150 * [((-0.03003 * -13.1358) + (0.02835 * -13.0984) + (0.02674 * -1.7782) + (-0.02913 * -1.7731)]$$

$$V_{10} = 100.00 \text{ Tn}$$

$$Pr_{10} = y * ks$$

$$Pr_{10} = 0.02629 \text{ m} * 1200 \text{ Tn/m}^3$$

$$Pr_{10} = 31.552 \text{ Tn/m}^2$$

Tabla 10: Resumen de Resultados de la viga con un vano

DISTANCIA x (m)	DESPLAZAMIENTO Y (cm)	MOMENTO M (Tn-m)	CORTANTE V (Tn)	PRESIÓN P (Tn/m ²)	GIRO ϕ G (rad)
0	2.754	9.000	-110.000	33.050	-0.0095
2	1.020	-108.508	-21.500	12.235	-0.0071
4	0.054	-121.671	0.601	0.649	-0.0025
6	0.018	-122.184	-1.404	0.213	0.0022
8	0.917	-113.492	17.295	11.001	0.0068
10	2.629	-10.000	100.000	31.552	0.0097

Fuente: Ana Sánchez

16. Chequeo de las presiones con el esfuerzo admisible del suelo (q_{adm})

Entonces, si se tiene según el estudio de suelos un $q_{adm} = 34 \text{ Tn/m}^2$, se debe verificar con el mayor valor de las presiones obtenidas, éste valor debe ser menor o igual que el q_{adm} .

$$\begin{aligned} Pr &\leq q_{adm} \\ 33.05 \text{ Tn/m}^2 &\leq 34 \text{ Tn/m}^2 \rightarrow \text{OK} \end{aligned}$$

En caso de no cumplir dicha condición se procederá a rediseñar nuevamente la viga, aumentando la sección de la misma. Se recomienda aumentar el peralte.

17. Cálculo del área de acero (A_s)

Datos:

$$b = 200 \text{ cm}$$

$$H = 50 \text{ cm}$$

$$r = 8 \text{ cm}$$

$$f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$$

$$f'_c = 240 \text{ kg/cm}^2$$

$$\phi = 0.9 \text{ (Diseño)}$$

- Cálculo de d

$$d = H - r$$

$$d = 50 \text{ cm} - 8 \text{ cm}$$

$$d = 42 \text{ cm}$$

- Cálculo de K

$$K = 0.85 * f'_c * b * d$$

$$K = 0.85 * 240 \frac{kg}{cm^2} * 200cm * 42 cm$$

$$K = 1713600$$

- Cálculo del Momento de Diseño (M_d)

$$M_d = M_u * 1.5$$

$$M_d = 122.184 Tn - m * 1.5$$

$$M_d = 183.273 Tn - m$$

- Cálculo de As mínimo

$$\rho_{min} = \frac{14}{fy}$$

$$\rho_{min} = \frac{14}{4200}$$

$$\rho_{min} = 0.0033$$

$$As_{min} = \rho_{min} * b * d$$

$$As_{min} = 0.0033 * 200 cm * 42 cm$$

$$As_{min} = 27.72 cm^2$$

- Cálculo de As

$$As = \frac{K}{fy} \left[1 - \sqrt{1 - \frac{2 * M_d}{\phi * K * d}} \right]$$

$$As = \frac{1713600}{4200} \left[1 - \sqrt{1 - \frac{2 * 183.273 * 10^5}{0.9 * 1713600 * 42}} \right]$$

$$As_T = 139.18 cm^2 \rightarrow 12\emptyset 24 + 12\emptyset 30$$

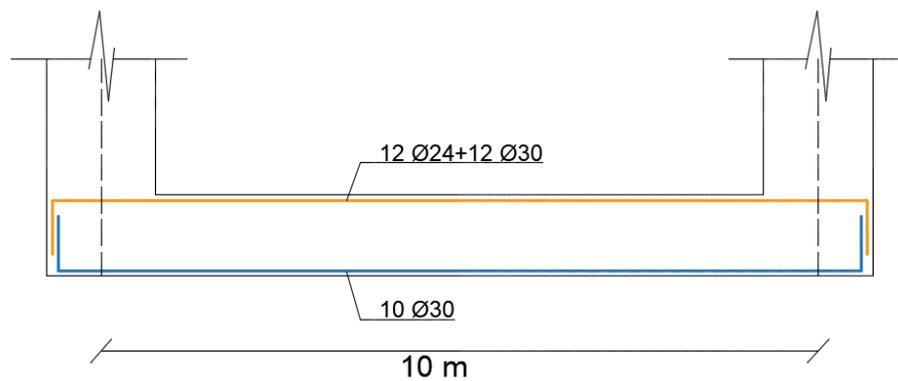
- Cálculo de A_s (compresión)

$$A_{s_c} = 50\% A_{s_T}$$

$$A_{s_c} = 69.59 \text{ cm}^2 \rightarrow 10\emptyset 30$$

18. Armado viga

Figura 12: Ilustración gráfica del armado de la viga de cimentación

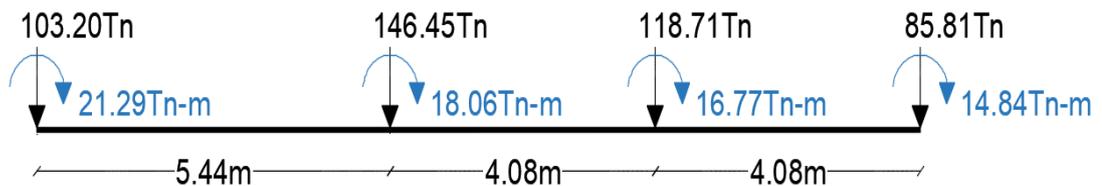


Fuente: Ana Sánchez

4.1.2 EJEMPLO DE CÁLCULO CON TRES VANOS (RESOLUCIÓN MANUAL)

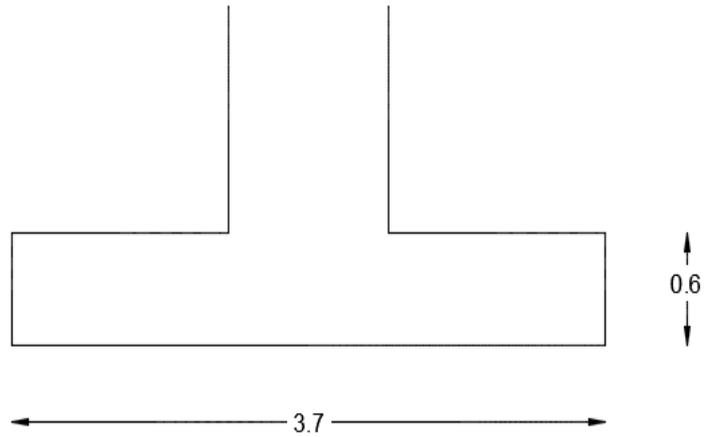
Resolver la siguiente viga de cimentación indicada en la figura 9. La viga tiene una base de 2.0 m y un peralte de 50 cm, la longitud del vano es de 15.0 m. Se encuentra sobre un suelo cuyo Coeficiente de Balasto (ks) es 1200 Tn/m^3 . El Módulo de Elasticidad del material tiene un valor $E = 2.5E6 \text{ Tn/m}^2$

Figura 13: Ilustración gráfica del ejemplo de cálculo para viga de cimentación



Fuente: Ana Sánchez

Figura 14: Ilustración gráfica del corte de la viga



Fuente: Ana Sánchez

Datos:

- $E = 2.5E6 \text{ Tn/m}^2$
- $k_s = 1300 \text{ Tn/m}^3$
- $L_T = 13.60 \text{ m}$
- $B = 3.70 \text{ m}$
- $H = 0.60 \text{ m}$

Solución:

1. Número de tramos o vanos (n)

$$n = 3$$

2. Determinar los grados de libertad de la estructura (#GDL)

$$\#GDL = 2 * n + 2$$

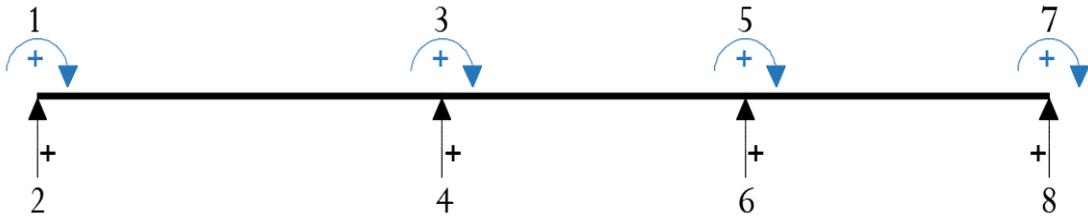
$$\#GDL = 2 * 3 + 2$$

$$\#GDL = 8$$

3. Realizar un esquema para enumerar los grados de libertad

Se debe enumerar primero el giro y luego el desplazamiento

Figura 15: Ilustración gráfica de los grados de libertad



Fuente: Ana Sánchez

4. Enumerar los vectores de colocación para cada elemento

El vector de colocación son los grados de libertad del elemento y sirve para encontrar la matriz de rigidez de cada elemento, para luego hallar por ensamblaje directo la matriz de rigidez de la estructura.

En este caso se tiene tres elementos, por lo tanto:

Elemento 1: Vc 1 – 2 – 3 – 4

Elemento 2: Vc 3 – 4 – 5 – 6

Elemento 3: Vc 5 – 6 – 7 – 8

5. Determinar el valor de la inercia (I)

$$I = \frac{B * H^3}{12}$$

$$I = \frac{3.70m * (0.60m)^3}{12}$$

$$I = 0.0666 m^4$$

6. Cálculo de la longitud característica de la viga (λ)

$$\lambda = \sqrt[4]{\frac{4 * E * I}{ks * B}}$$

$$\lambda = \sqrt[4]{\frac{4 * 2.5E6 \frac{Tn}{m^2} * 0.0666m^4}{1300 \frac{Tn}{m^3} * 3.70m}}$$

$$\lambda = 3.4303 \text{ m}$$

7. Cálculo de las rigideces a flexión para cada miembro

Primer tramo L = 5.44 m

$$S = \sinh \frac{L}{\lambda}$$
$$S = \sinh \frac{5.44 \text{ m}}{3.4303 \text{ m}}$$
$$S = 2.3394$$

$$C = \cosh \frac{L}{\lambda}$$
$$C = \cosh \frac{5.44 \text{ m}}{3.4303 \text{ m}}$$
$$C = 2.5441$$

$$s = \sin \frac{L}{\lambda}$$
$$s = \sin \frac{5.44 \text{ m}}{3.4303 \text{ m}}$$
$$s = 0.9999$$

$$c = \cos \frac{L}{\lambda}$$
$$c = \cos \frac{5.44 \text{ m}}{3.4303 \text{ m}}$$
$$c = -0.0151$$

Segundo tramo L = 4.08 m

$$S = \sinh \frac{L}{\lambda}$$
$$S = \sinh \frac{4.08 \text{ m}}{3.4303 \text{ m}}$$
$$S = 1.4904$$

$$C = \cosh \frac{L}{\lambda}$$

$$C = \cosh \frac{4.08 \text{ m}}{3.4303 \text{ m}}$$

$$C = 1.7948$$

$$s = \operatorname{sen} \frac{L}{\lambda}$$

$$s = \operatorname{sen} \frac{4.08 \text{ m}}{3.4303 \text{ m}}$$

$$s = 0.9281$$

$$c = \cos \frac{L}{\lambda}$$

$$c = \cos \frac{4.08 \text{ m}}{3.4303 \text{ m}}$$

$$c = 0.3722$$

Tercer tramo L = 4.08 m

$$S = \operatorname{senh} \frac{L}{\lambda}$$

$$S = \operatorname{senh} \frac{4.08 \text{ m}}{3.4303 \text{ m}}$$

$$S = 1.4904$$

$$C = \cosh \frac{L}{\lambda}$$

$$C = \cosh \frac{4.08 \text{ m}}{3.4303 \text{ m}}$$

$$C = 1.7948$$

$$s = \operatorname{sen} \frac{L}{\lambda}$$

$$s = \operatorname{sen} \frac{4.08 \text{ m}}{3.4303 \text{ m}}$$

$$s = 0.9281$$

$$c = \cos \frac{L}{\lambda}$$

$$c = \cos \frac{4.08 \text{ m}}{3.4303 \text{ m}}$$

$$c = 0.3722$$

8. Cálculo de los elementos de la matriz de rigidez de cada elemento

Primer tramo L = 5.44 m

$$k = \frac{2EI}{\lambda} * \frac{CS - sc}{S^2 - s^2}$$

$$k = \frac{2 * 2.5E6 * 0.0666}{3.4303} * \frac{(2.5441 * 2.3394) - (0.9999 * -0.0151)}{2.3394^2 - 0.9999^2}$$

$$k = 129497.7872$$

$$b = \frac{2EI}{\lambda^2} * \frac{S^2 + s^2}{S^2 - s^2}$$

$$b = \frac{2 * 2.5E6 * 0.0666}{3.4303^2} * \frac{2.3394^2 + 0.9999^2}{2.3394^2 - 0.9999^2}$$

$$b = 40950.4592$$

$$a = \frac{2EI}{\lambda} * \frac{Cs - Sc}{S^2 - s^2}$$

$$a = \frac{2 * 2.5E6 * 0.0666}{3.4303} * \frac{(2.5441 * 0.9999) - (2.3394 * -0.0151)}{2.3394^2 - 0.9999^2}$$

$$a = 55974.7618$$

$$b_o = \frac{4EI}{\lambda^2} * \frac{Ss}{S^2 - s^2}$$

$$b_o = \frac{4 * 2.5E6 * 0.0666}{3.4303^2} * \frac{2.3394 * 0.9999}{2.3394^2 - 0.9999^2}$$

$$b_o = 29598.5661$$

$$t = \frac{4EI}{\lambda^3} * \frac{CS + sc}{S^2 - s^2}$$

$$t = \frac{4 * 2.5E6 * 0.0666}{3.4303^3} * \frac{(2.5441 * 2.3394) + (0.9999 * -0.0151)}{2.3394^2 - 0.9999^2}$$

$$t = 21899.2263$$

$$t_o = \frac{4EI}{\lambda^3} * \frac{Sc + Cs}{S^2 - s^2}$$

$$t_o = \frac{4 * 2.5E6 * 0.0666}{3.4303^3} * \frac{(2.3394 * -0.0151) + (2.5441 * 0.9999)}{2.3394^2 - 0.9999^2}$$

$$t_o = 9253.7934$$

Segundo tramo L = 4.08 m y Tercer tramo L = 4.08 m

$$k = \frac{2EI}{\lambda} * \frac{CS - sc}{S^2 - s^2}$$

$$k = \frac{2 * 2.5E6 * 0.0666}{3.4303} * \frac{(1.7948 * 1.4904) - (0.9281 * 0.3722)}{1.4904^2 - 0.9281^2}$$

$$k = 166304.6839$$

$$b = \frac{2EI}{\lambda^2} * \frac{S^2 + s^2}{S^2 - s^2}$$

$$b = \frac{2 * 2.5E6 * 0.0666}{3.4303^2} * \frac{1.4904^2 + 0.9281^2}{1.4904^2 - 0.9281^2}$$

$$b = 64158.7186$$

$$a = \frac{2EI}{\lambda} * \frac{Cs - Sc}{S^2 - s^2}$$

$$a = \frac{2 * 2.5E6 * 0.0666}{3.4303} * \frac{(1.7948 * 0.9281) - (1.4904 * 0.3722)}{1.4904^2 - 0.9281^2}$$

$$a = 79324.6152$$

$$b_o = \frac{4EI}{\lambda^2} * \frac{Ss}{S^2 - s^2}$$

$$b_o = \frac{4 * 2.5E6 * 0.0666}{3.4303^2} * \frac{1.4904 * 0.9281}{1.4904^2 - 0.9281^2}$$

$$b_o = 57580.1717$$

$$t = \frac{4EI}{\lambda^3} * \frac{CS + sc}{S^2 - s^2}$$

$$t = \frac{4 * 2.5E6 * 0.0666}{3.4303^3} * \frac{(1.7948 * 1.4904) + (0.9281 * 0.3722)}{1.4904^2 - 0.9281^2}$$

$$t = 36650.8736$$

$$t_o = \frac{4EI}{\lambda^3} * \frac{Sc + Cs}{S^2 - s^2}$$

$$t_o = \frac{4 * 2.5E6 * 0.0666}{3.4303^3} * \frac{(1.4904 * 0.3722) + (1.7948 * 0.9281)}{1.4904^2 - 0.9281^2}$$

$$t_o = 26945.8654$$

9. Armar la matriz de rigidez de cada elemento

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} k_i & -b_i & a_i & b_{oi} \\ -b_i & t_i & -b_{oi} & -t_{oi} \\ a_i & -b_{oi} & k_i & b_i \\ b_{oi} & -t_{oi} & b_i & t_i \end{bmatrix}$$

Para el elemento 1 → L= 5.44 m

$$\mathbf{k}_1 = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 129497.7872 & -40950.4592 & 55794.7618 & 29598.5661 \\ -40950.4592 & 21899.2263 & -29598.5661 & -9253.7934 \\ 55794.7618 & -29598.5661 & 129497.7872 & 40950.4592 \\ 29598.5661 & -9253.7934 & 40950.4592 & 21899.2263 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Para el elemento 2 → L= 4.08 m

$$\mathbf{k}_2 = \begin{matrix} & \begin{matrix} 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 166304.6839 & -64158.7186 & 79324.6152 & 57580.1717 \\ -64158.7186 & 36650.8736 & -57580.1717 & -26945.8654 \\ 79324.6152 & -57580.1717 & 166304.6839 & 64158.7186 \\ 57580.1717 & -26945.8654 & 64158.7186 & 36650.8736 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Para el elemento 3 → L= 4.08 m

$$k_3 = \begin{matrix} & \begin{matrix} 5 & 6 & 7 & 8 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 166304.6839 & -64158.7186 & 79324.6152 & 57580.1717 \\ -64158.7186 & 36650.8736 & -57580.1717 & -26945.8654 \\ 79324.6152 & -57580.1717 & 166304.6839 & 64158.7186 \\ 57580.1717 & -26945.8654 & 64158.7186 & 36650.8736 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

10. Armar la matriz de rigidez de la estructura (K)

K =

129497.78718	-40950.45925	55974.76178	29598.56605	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
-40950.45925	21899.22626	-29598.56605	-9253.79343	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
55974.76178	-29598.56605	295802.47106	-23208.25937	79324.61522	57580.17171	0.00000	0.00000
29598.56605	-9253.79343	-23208.25937	58550.09985	-57580.17171	-26945.86539	0.00000	0.00000
0.00000	0.00000	79324.61522	-57580.17171	332609.36775	0.00000	79324.61522	57580.17171
0.00000	0.00000	57580.17171	-26945.86539	0.00000	73301.74717	-57580.17171	-26945.86539
0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	79324.61522	-57580.17171	166304.68388	64158.71862
0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	57580.17171	-26945.86539	64158.71862	36650.87358

11. Calcular la inversa de la matriz de la estructura (K^{-1})

K^{-1} =

2.06481E-05	3.5391E-05	-2.41222E-08	-7.54251E-06	-1.37689E-06	-2.89922E-06	-1.10657E-06	1.96873E-06
3.539E-05	1.213E-04	7.195E-06	-6.134E-07	-1.39543E-06	-7.3325E-06	-1.96873E-06	2.4774E-07
-2.412E-08	7.195E-06	5.410E-06	-1.720E-07	-9.96381E-07	-5.40187E-06	-1.43779E-06	1.10787E-07
-7.543E-06	-6.134E-07	-1.720E-07	3.248E-05	5.97777E-06	1.27554E-05	4.83663E-06	-8.48022E-06
-1.377E-06	-1.395E-06	-9.964E-07	5.978E-06	6.14384E-06	-3.14757E-07	2.38258E-06	-1.40545E-05
-2.89922E-06	-7.3325E-06	-5.40187E-06	1.27554E-05	-3.14757E-07	3.23746E-05	6.11706E-06	1.35883E-05
-1.10657E-06	-1.96873E-06	-1.43779E-06	4.83663E-06	2.38258E-06	6.11706E-06	2.06481E-05	-3.5391E-05
1.96873E-06	2.4774E-07	1.10787E-07	-8.48022E-06	-1.40545E-05	1.35883E-05	-3.5391E-05	0.000121308

12. Formar el vector de cargas (Q): Colocando los valores de cargas y momentos actuantes en los nudos

$$Q = \begin{bmatrix} 21.29 \\ -103.20 \\ 18.06 \\ -146.45 \\ 16.77 \\ -118.71 \\ 14.84 \\ -85.81 \end{bmatrix}$$

13. Hallar el vector de coordenadas generalizadas

$$q = K^{-1} * Q$$

$$q = \begin{bmatrix} -0.00197 \\ -0.01075 \\ -0.00003 \\ -0.00547 \\ 0.00060 \\ -0.00619 \\ 0.00210 \\ -0.01152 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ Y_1 \\ \theta_2 \\ Y_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ Y_1 \\ \theta_2 \\ Y_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ Y_1 \\ \theta_2 \\ Y_2 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto:

Para el elemento 1 → L= 5.44 m

$$\theta_1 = -0.00197$$

$$Y_1 = 0.01075$$

$$\theta_2 = -0.00003$$

$$Y_2 = 0.00547$$

Para el elemento 2 → L= 4.08 m

$$\theta_1 = -0.00003$$

$$Y_1 = 0.00547$$

$$\theta_2 = 0.00060$$

$$Y_2 = 0.00619$$

Para el elemento 3 → L= 4.08 m

$$\theta_1 = 0.00060$$

$$Y_1 = 0.00619$$

$$\theta_2 = 0.00210$$

$$Y_2 = 0.01152$$

Nota: Los desplazamientos (Y) deben tomarse positivos para los cálculos.

14. Cálculo de las constantes de integración del tramo

Según la Tabla 3:

	Factor	Y_1	$\lambda\theta_1$	Y_2	$\lambda\theta_2$
A1 =	1	1	0	0	0
A2 =	$\frac{1}{S^2 - s^2}$	-(SC+sc)	-s ²	Sc+Cs	-Ss
A3 =	$\frac{1}{S^2 - s^2}$	SC+sc	S ²	-(Sc+Cs)	Ss
A4 =	$\frac{1}{S^2 - s^2}$	-(S ² +s ²)	-(SC-sc)	2Ss	Sc-Cs

Para el elemento 1 → L= 5.44 m

$$\lambda\theta_1 = 3.4303 * -0.00197 = -6.7676E - 3$$

$$\lambda\theta_2 = 3.4303 * -0.00003 = -9.0542E - 5$$

$$Y_1 = 1.0749E - 2$$

$$Y_2 = 5.4710E - 3$$

$$C * S = 2.5441 * 2.3394 = 5.9517$$

$$s * c = 0.9999 * -0.0151 = -0.0151$$

$$S * c = 2.3394 * -0.0151 = -0.0353$$

$$C * s = 2.5441 * 0.9999 = 2.5439$$

$$S^2 - s^2 = 2.3394^2 - 0.9999^2 = 4.4729$$

$$\frac{1}{S^2 - s^2} = \frac{1}{4.4729} = 0.2236$$

Tabla 11: Valores de las constantes de integración primer elemento

	Factor	Y_1	$\lambda\theta_1$	Y_2	$\lambda\theta_2$
A1 =	1	1	0	0	0
A2 =	0.2236	-5.9366	-0.9998	2.5086	-2.3391
A3 =	0.2236	5.9366	5.4727	-2.5086	2.3391
A4 =	0.2236	-6.4724	-5.9668	4.6782	-2.5791

Fuente: Ana Sánchez

$$A_1 = 1 * [(1 * 1.0749E - 2)]$$

$$A_1 = 1.0794 - 2$$

$$A_2 = 0.2236 * [((-5.9366 * 1.0749E - 2) + (-0.9998 * -6.7676E - 3) + (2.5086 * 5.4710E - 3) + (-2.3391 * -9.0542E - 5)]$$

$$A_2 = -9.6384E - 3$$

$$A_3 = 0.2236 * [(5.93366 * 1.0749E - 2) + (5.4727 * -6.7676E - 3) + (-2.5086 * 5.4710E - 3) + (2.3391 * -9.0542E - 5)]$$

$$A_3 = 2.8709E - 3$$

$$A_4 = 0.2236 * [((-6.4724 * 1.0749E - 2) + (-5.9668 * -6.7676E - 3) + (4.6782 * 5.4710E - 3) + (-2.5791 * -9.0542E - 5)]$$

$$A_4 = -7.5231E - 4$$

Para el elemento 2 → L= 4.08 m

$$\lambda\theta_1 = 3.4303 * -0.00003 = -9.0542E - 5$$

$$\lambda\theta_2 = 3.4303 * -0.00060 = -2.0686E - 3$$

$$Y_1 = 5.4710E - 3$$

$$Y_2 = 6.1943E - 3$$

$$C * S = 1.7948 * 1.4904 = 2.6748$$

$$s * c = 0.9281 * 0.3722 = 0.3455$$

$$S * c = 1.4904 * 0.3722 = 0.5547$$

$$C * s = 1.7948 * 0.9281 = 1.6658$$

$$S^2 - s^2 = 1.4904^2 - 0.9281^2 = 1.3597$$

$$\frac{1}{S^2 - s^2} = \frac{1}{1.3597} = 0.7355$$

Tabla 12:

Tabla 12: Valores de las constantes de integración segundo elemento

	Factor	Y_1	$\lambda\theta_1$	Y_2	$\lambda\theta_2$
A1 =	1	1	0	0	0
A2 =	0.7355	-3.0203	-0.8615	2.2205	-1.3833
A3 =	0.7355	3.0203	2.2212	-2.2205	1.3833
A4 =	0.7355	-3.0826	-2.3293	2.7665	-1.1111

Fuente: Ana Sánchez

$$A_1 = 1 * [(1 * 5.4710E - 3)]$$

$$A_1 = 5.4710E - 3$$

$$A_2 = 0.7355 * [((-3.0203 * 5.4710E - 3) + (-0.8615 * -9.0542E - 5) + (2.2205 * 6.1943E - 3) + (-1.3833 * 2.0686E - 3)]$$

$$A_2 = -4.0838E - 3$$

$$A_3 = 0.7355 * [(3.0203 * 5.4710E - 3) + (2.2212 * -9.0542E - 5) + (-2.2205 * 6.1943E - 3) + (1.3833 * 2.0686E - 3)]$$

$$A_3 = 3.9933E - 3$$

$$A_4 = 0.7355 * [((-3.0826 * 5.4710E - 3) + (-2.3293 * -9.0542E - 5) + (2.7665 * 6.1943E - 3) + (-1.1111 * 2.0686E - 3)]$$

$$A_4 = -1.3353E - 3$$

Para el elemento 3 → L= 4.08 m

$$\lambda\theta_1 = 3.4303 * -0.00060 = 2.0686E - 3$$

$$\lambda\theta_2 = 3.4303 * -0.00210 = 7.2120E - 3$$

$$Y_1 = 6.1943E - 3$$

$$Y_2 = 1.1523E - 2$$

$$C * S = 1.7948 * 1.4904 = 2.6748$$

$$s * c = 0.9281 * 0.3722 = 0.3455$$

$$S * c = 1.4904 * 0.3722 = 0.5547$$

$$C * s = 1.7948 * 0.9281 = 1.6658$$

$$S^2 - s^2 = 1.4904^2 - 0.9281^2 = 1.3597$$

$$\frac{1}{S^2 - s^2} = \frac{1}{1.3597} = 0.7355$$

Tabla 13: Valores de las constantes de integración tercer elemento

	Factor	Y_1	$\lambda\theta_1$	Y_2	$\lambda\theta_2$
A1 =	1	1	0	0	0
A2 =	0.7355	-3.0203	-0.8615	2.2205	-1.3833
A3 =	0.7355	3.0203	2.2212	-2.2205	1.3833
A4 =	0.7355	-3.0826	-2.3293	2.7665	-1.1111

Fuente: Ana Sánchez

$$A_1 = 1 * [(1 * 6.1943E - 3)]$$

$$A_1 = 6.1943E - 3$$

$$A_2 = 0.7355 * [((-3.0203 * 6.1943E - 3) + (-0.8615 * 2.0686E - 3) + (2.2205 * 1.1523E - 2) + (-1.3833 * 7.2120E - 3)]$$

$$A_2 = -3.5885E - 3$$

$$A_3 = 0.7355 * [(3.0203 * 6.1943E - 3) + (2.2212 * 2.0686E - 3) + (-2.2205 * 1.1523E - 2) + (1.3833 * 7.2120E - 3)]$$

$$A_3 = 5.6570E - 3$$

$$A_4 = 0.7355 * [((-3.0826 * 6.1943E - 3) + (-2.3293 * 2.0686E - 3) + (2.7665 * 1.1523E - 2) + (-1.1111 * 7.2120E - 3)]$$

$$A_4 = -3.4448E - 5$$

15. Cálculo de las expresiones finales de fuerzas y deformaciones para vigas de sección constante.

Según la Tabla 4:

	Factor	$C'c'$	$S'c'$	$C's'$	$S's'$
$y =$	1	A1	A2	A3	A4
$\phi =$	$1/\lambda$	A2+A3	A1+A4	-A1+A4	-A2+A3
$M =$	$2EI/\lambda^2$	-A4	-A3	A2	A1
$V =$	$2EI/\lambda^3$	A2-A3	A1-A4	A1+A4	A2+A3

Nota: Se recomienda que la discretización de cada tramo (elemento) sea en partes iguales. En este caso será dividida en 4 partes.

[Para el elemento 1 \$\rightarrow L= 5.44 \text{ m}\$](#)

[Para \$x = 0 \text{ m}\$](#)

$$\mu = \frac{x}{\lambda}$$

$$\mu = \frac{0 \text{ m}}{3.4303 \text{ m}}$$

$$\mu = 0$$

$$C' = \cosh(\mu)$$

$$C' = \cosh(0)$$

$$C' = 1$$

$$S' = \sinh(\mu)$$

$$S' = \sinh(0)$$

$$S' = 0$$

$$c' = \cos(\mu)$$

$$c' = \cos(0)$$

$$c' = 1$$

$$s' = \sin(\mu)$$

$$s' = \sin(0)$$

$$s' = 0$$

$$C' * c' = 1 * 1 = 1$$

$$S' * c' = 0 * 1 = 0$$

$$C' * s' = 1 * 0 = 0$$

$$S' * s' = 0 * 0 = 0$$

Para $x = 1.36 \text{ m}$

$$\mu = \frac{x}{\lambda}$$

$$\mu = \frac{1.36 \text{ m}}{3.4303 \text{ m}}$$

$$\mu = 0.3695$$

~ 73 ~

$$C' = \cosh(\mu)$$

$$C' = \cosh(0.3695)$$

$$C' = 1.0796$$

$$S' = \sinh(\mu)$$

$$S' = \sinh(0.3695)$$

$$S' = 0.4069$$

$$c' = \cos(\mu)$$

$$c' = \cos(0.3695)$$

$$c' = 0.9224$$

$$s' = \sin(\mu)$$

$$s' = \sin(0.3695)$$

$$s' = 0.3624$$

$$C' * c' = 1.0796 * 0.9224 = 0.9959$$

$$S' * c' = 0.4069 * 0.9224 = 0.3754$$

$$C' * s' = 1.0796 * 0.3624 = 0.3913$$

$$S' * s' = 0.4069 * 0.3624 = 0.1475$$

Para x = 2.72 m

$$\mu = \frac{x}{\lambda}$$

$$\mu = \frac{2.72 \text{ m}}{3.4303 \text{ m}}$$

~ 74 ~

$$\mu = 0.7929$$

$$C' = \cosh(\mu)$$

$$C' = \cosh(0.7929)$$

$$C' = 1.3312$$

$$S' = \sinh(\mu)$$

$$S' = \sinh(0.7929)$$

$$S' = 0.8787$$

$$c' = \cos(\mu)$$

$$c' = \cos(0.7929)$$

$$c' = 0.7018$$

$$s' = \sin(\mu)$$

$$s' = \sin(0.7929)$$

$$s' = 0.7124$$

$$C' * c' = 1.3312 * 0.7018 = 0.9342$$

$$S' * c' = 0.8787 * 0.7018 = 0.6166$$

$$C' * s' = 1.3312 * 0.7124 = 0.9484$$

$$S' * s' = 0.8787 * 0.7124 = 0.6260$$

Para x = 4.08 m

$$\mu = \frac{x}{\lambda}$$

$$\mu = \frac{4.08 \text{ m}}{3.4303 \text{ m}}$$

$$\mu = 1.1894$$

$$C' = \cosh(\mu)$$

$$C' = \cosh(1.1894)$$

$$C' = 1.7948$$

$$S' = \sinh(\mu)$$

$$S' = \sinh(1.1894)$$

$$S' = 1.4904$$

$$c' = \cos(\mu)$$

$$c' = \cos(1.1894)$$

$$c' = 0.3722$$

$$s' = \sin(\mu)$$

$$s' = \sin(1.1894)$$

$$s' = 0.9282$$

$$C' * c' = 1.7948 * 0.3722 = 0.6680$$

$$S' * c' = 1.4904 * 0.3722 = 0.5547$$

$$C' * s' = 1.7948 * 0.9282 = 1.6658$$

$$S' * s' = 1.4904 * 0.9282 = 1.3833$$

[Para x = 5.44 m](#)

$$\mu = \frac{x}{\lambda}$$

$$\mu = \frac{5.44 \text{ m}}{3.4303 \text{ m}}$$

$$\mu = 1.5859$$

$$C' = \cosh(\mu)$$

$$C' = \cosh(1.5859)$$

$$C' = 2.5441$$

$$S' = \sinh(\mu)$$

$$S' = \sinh(1.5859)$$

$$S' = 2.3394$$

$$c' = \cos(\mu)$$

$$c' = \cos(1.5859)$$

$$c' = -0.0151$$

$$s' = \sin(\mu)$$

$$s' = \sin(1.5859)$$

$$s' = 0.9999$$

$$C' * c' = 2.5441 * -0.0151 = -0.0383$$

$$S' * c' = 2.3394 * -0.0151 = -0.0353$$

$$C' * s' = 2.5441 * 0.9999 = 2.5439$$

$$S' * s' = 2.3394 * 0.9999 = 2.3391$$

$$\frac{2 * E * I}{\lambda^2} = \frac{2 * 2.5E6 - 0.0666}{3.4303^2} = 28299.55830$$

$$\frac{2 * E * I}{\lambda^3} = \frac{2 * 2.5E6 - 0.0666}{3.4303^3} = 8249.87501$$

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{3.4303} = 0.29152$$

Para el elemento 2 → L= 4.08 m y 3 → L= 4.08 m

Para x = 0 m

$$\mu = \frac{x}{\lambda}$$

$$\mu = \frac{0 \text{ m}}{3.4303 \text{ m}}$$

$$\mu = 0$$

$$C' = \cosh(\mu)$$

$$C' = \cosh(0)$$

$$C' = 1$$

$$S' = \sinh(\mu)$$

$$S' = \sinh(0)$$

$$S' = 0$$

$$c' = \cos(\mu)$$

$$c' = \cos(0)$$

$$c' = 1$$

$$s' = \text{sen}(\mu)$$

$$s' = \text{sen}(0)$$

$$s' = 0$$

$$C' * c' = 1 * 1 = 1$$

$$S' * c' = 0 * 1 = 0$$

$$C' * s' = 1 * 0 = 0$$

$$S' * s' = 0 * 0 = 0$$

Para x = 1.02 m

$$\mu = \frac{x}{\lambda}$$

$$\mu = \frac{1.02 \text{ m}}{3.4303 \text{ m}}$$

$$\mu = 0.2974$$

$$C' = \text{cosh}(\mu)$$

$$C' = \text{cosh}(0.2974)$$

$$C' = 1.0445$$

$$S' = \text{senh}(\mu)$$

$$S' = \text{senh}(0.2974)$$

$$S' = 0.3018$$

$$c' = \text{cos}(\mu)$$

$$c' = \text{cos}(0.2974)$$

$$c' = 0.9561$$

$$s' = \text{sen}(\mu)$$

$$s' = \text{sen}(0.2974)$$

$$s' = 0.2930$$

$$C' * c' = 1.0445 * 0.9561 = 0.9987$$

$$S' * c' = 0.3018 * 0.9561 = 0.2285$$

$$C' * s' = 1.0445 * 0.2930 = 0.3060$$

$$S' * s' = 0.3018 * 0.2930 = 0.0884$$

Para $x = 2.04 \text{ m}$

$$\mu = \frac{x}{\lambda}$$

$$\mu = \frac{2.04 \text{ m}}{3.4303 \text{ m}}$$

$$\mu = 0.5947$$

$$C' = \cosh(\mu)$$

$$C' = \cosh(0.5947)$$

$$C' = 1.1821$$

$$S' = \sinh(\mu)$$

$$S' = \sinh(0.5947)$$

$$S' = 0.6304$$

$$c' = \cos(\mu)$$

$$c' = \cos(0.5947)$$

$$c' = 0.8283$$

$$s' = \text{sen}(\mu)$$

$$s' = \text{sen}(0.5947)$$

$$s' = 0.5603$$

$$C' * c' = 1.1821 * 0.8283 = 0.9792$$

$$S' * c' = 0.6304 * 0.8283 = 0.5222$$

$$C' * s' = 1.1821 * 0.5603 = 0.6623$$

$$S' * s' = 0.6304 * 0.5603 = 0.3532$$

Para $x = 3.06 \text{ m}$

$$\mu = \frac{x}{\lambda}$$

$$\mu = \frac{3.06 \text{ m}}{3.4303 \text{ m}}$$

$$\mu = 0.8921$$

$$C' = \cosh(\mu)$$

$$C' = \cosh(0.8921)$$

$$C' = 1.4250$$

$$S' = \text{senh}(\mu)$$

$$S' = \text{senh}(0.8921)$$

$$S' = 1.0152$$

$$c' = \cos(\mu)$$

$$c' = \cos(0.8921)$$

$$c' = 0.6278$$

$$s' = \text{sen}(\mu)$$

$$s' = \text{sen}(0.8921)$$

$$s' = 0.7784$$

$$C' * c' = 1.4250 * 0.6278 = 0.8946$$

$$S' * c' = 1.0152 * 0.6278 = 0.6373$$

$$C' * s' = 1.4250 * 0.7784 = 1.1091$$

$$S' * s' = 1.0152 * 0.7784 = 0.7902$$

Para $x = 4.08 \text{ m}$

$$\mu = \frac{x}{\lambda}$$

$$\mu = \frac{4.08 \text{ m}}{3.4303 \text{ m}}$$

$$\mu = 1.1894$$

$$C' = \cosh(\mu)$$

$$C' = \cosh(1.1894)$$

$$C' = 1.7948$$

$$S' = \text{senh}(\mu)$$

$$S' = \text{senh}(1.1894)$$

$$S' = 1.4904$$

$$c' = \cos(\mu)$$

$$c' = \cos(1.1894)$$

$$c' = 0.3722$$

$$s' = \text{sen}(\mu)$$

$$s' = \text{sen}(1.1894)$$

$$s' = 0.9282$$

$$C' * c' = 1.7948 * 0.3722 = -0.0383$$

$$S' * c' = 1.4904 * 0.3722 = -0.0353$$

$$C' * s' = 1.7948 * 0.9282 = 2.5439$$

$$S' * s' = 1.4904 * 0.9282 = 2.3391$$

TABLAS RESUMEN DE LOS CÁLCULOS

[Para el elemento 1 → L= 5.44 m](#)

Tabla 14: Valores de las expresiones finales de fuerzas y deformaciones primer elemento

	Factor	C'c'	S'c'	C's'	S's'
y =	1	0.01075	-0.00964	0.00287	-0.00075
∅ =	0.29152	-0.00677	0.01000	-0.01150	0.01251
M =	28299.55830	0.00075	-0.00287	-0.00964	0.01075
V =	8249.87501	-0.01251	0.01150	0.01000	-0.00677

Fuente: Ana Sánchez

[Para el elemento 2 → L= 4.08 m](#)

Tabla 15: Valores de las expresiones finales de fuerzas y deformaciones segundo elemento

	Factor	C'c'	S'c'	C's'	S's'
y =	1	0.00547	-0.00408	0.00399	-0.00134
∅ =	0.29152	-0.00009	0.00414	-0.00681	0.00808
M =	28299.55830	0.00134	-0.00399	-0.00408	0.00547

V =	8249.87501	-0.00808	0.00681	0.00414	-0.00009
------------	------------	----------	---------	---------	----------

Fuente: Ana Sánchez

Para el elemento 3 → L= 4.08 m

Tabla 16: Valores de las expresiones finales de fuerzas y deformaciones tercer elemento

	Factor	C'c'	S'c'	C's'	S's'
y =	1	0.00619	-0.00359	0.00566	-0.00003
∅ =	0.29152	0.00207	0.00616	-0.00623	0.00925
M =	28299.55830	0.00003	-0.00566	-0.00359	0.00619
V =	8249.87501	-0.00925	0.00623	0.00616	0.00207

Fuente: Ana Sánchez

Para el elemento 1 → L= 5.44 m

De la Tabla 14:

	Factor	C'c'	S'c'	C's'	S's'
y =	1	0.01075	-0.00964	0.00287	-0.00075
∅ =	0.29152	-0.00677	0.01000	-0.01150	0.01251
M =	28299.55830	0.00075	-0.00287	-0.00964	0.01075
V =	8249.87501	-0.01251	0.01150	0.01000	-0.00677

Para x = 0 m

$$y_0 = 1 * [(A1 * C'c') + (A2 * S'c') + (A3 * C's') + (A4 * S's')]$$

$$y_0 = 1[(0.01075 * 1) + (-0.00964 * 0) + (0.00287 * 0) + (-0.00075 * 0)]$$

$$y_0 = 1.075 \text{ cm}$$

$$\phi_0 = \frac{1}{\lambda} * [((A2 + A3) * C'c') + ((A1 + A4) * S'c') + (-(A1 + A4) * C's') + (-(A2 + A3) * S's')]]$$

$$\phi_0 = 0.29152 * [((-0.00677 * 1) + (0.01000 * 0) + (-0.01150 * 0) + (0.01251 * 0)]$$

$$\phi_0 = -0.0020 \text{ rad}$$

$$M_0 = \frac{2EI}{\lambda^2} * [(-A4 * C'c') + (-A3 * S'c') + (A2 * C's') + (A1 * S's')]]$$

$$M_0 = 28299.55830[(0.00075 * 1) + (-0.00287 * 0) + (-0.00964 * 0) + (0.01075 * 0)]$$

$$M_0 = 21.290 \text{ Tn} - m$$

$$V_0 = \frac{2EI}{\lambda^3} * [((A2 - A3) * C'c') + ((A1 - A4) * S'c') + ((A1 + A4) * C's') + ((A2 + A3) * S's')]]$$

$$V_0 = 8249.87501 * [((-0.01251 * 1) + (0.01150 * 0) + (0.01000 * 0) + (-0.00677 * 0)]$$

$$V_0 = -103.200 \text{ Tn}$$

$$Pr_0 = y * ks$$

$$Pr_0 = 0.01075m * 1300Tn/m^3$$

$$Pr_0 = 13.974 \text{ Tn}/m^2$$

[Para x = 1.36 m](#)

$$y_{1.36} = 1 * [(A1 * C'c') + (A2 * S'c') + (A3 * C's') + (A4 * S's')]]$$

$$y_{1.36} = 1[(0.01075 * 0.9959) + (-0.00964 * 0.3754) + (0.00287 * 0.4169) + (-0.00075 * 0.1571)]$$

$$y_{1.36} = 0.817 \text{ cm}$$

$$\phi_{1.36} = \frac{1}{\lambda} * [((A2 + A3) * C'c') + ((A1 + A4) * S'c') + (-(A1 + A4) * C's') + (-(A2 + A3) * S's')]$$

$$\phi_{1.36} = 0.29152 * [((-0.00677 * 0.9959) + (0.01000 * 0.3754) + (-0.01150 * 0.4169) + (0.01251 * 0.1571)]$$

$$\phi_{1.36} = -0.0017 \text{ rad}$$

$$M_{1.36} = \frac{2EI}{\lambda^2} * [(-A4 * C'c') + (-A3 * S'c') + (A2 * C's') + (A1 * S's')]$$

$$M_{1.36} = 28299.55830 * [(0.00075 * 0.9959) + (-0.00287 * 0.3754) + (-0.00964 * 0.4169) + (0.01075 * 0.1571)]$$

$$M_{1.36} = -75.210 \text{ Tn} - m$$

$$V_{1.36} = \frac{2EI}{\lambda^3} * [((A2 - A3) * C'c') + ((A1 - A4) * S'c') + ((A1 + A4) * C's') + ((A2 + A3) * S's')]$$

$$V_{1.36} = 8249.87501 * [((-0.01251 * 0.9959) + (0.01150 * 0.3754) + (0.01000 * 0.4169) + (-0.00677 * 0.1571)]$$

$$V_{1.36} = -41.457 \text{ Tn}$$

$$Pr_{1.36} = y * ks$$

$$Pr_{1.36} = 0.00817m * 1300Tn/m^3$$

$$Pr_{1.36} = 10.615 \text{ Tn}/m^2$$

Para x = 2.72 m

$$y_{2.72} = 1 * [(A1 * C'c') + (A2 * S'c') + (A3 * C's') + (A4 * S's')]$$

$$y_{2.72} = 1[(0.01075 * 0.9342) + (-0.00964 * 0.6166) + (0.00287 * 0.9484) + (-0.00075 * 0.6260)]$$

$$y_{2.72} = 0.635 \text{ cm}$$

$$\phi_{2.72} = \frac{1}{\lambda} [((A2 + A3) * C'c') + ((A1 + A4) * S'c') + (-(A1 + A4) * C's') + (-(A2 + A3) * S's')]$$

$$\phi_{2.72} = 0.29152 * [((-0.00677 * 0.9342) + (0.01000 * 0.6166) + (-0.01150 * 0.9484) + (0.01251 * 0.6260)]$$

$$\phi_{2.72} = -0.0009 \text{ rad}$$

$$M_{2.72} = \frac{2EI}{\lambda^2} * [(-A4 * C'c') + (-A3 * S'c') + (A2 * C's') + (A1 * S's')]$$

$$M_{2.72} = 28299.55830 * [(0.00075 * 0.9342) + (-0.00287 * 0.6166) + (-0.00964 * 0.9484) + (0.01075 * 0.6260)]$$

$$M_{2.72} = -98.464 \text{ Tn} - m$$

$$V_{2.72} = \frac{2EI}{\lambda^3} * [((A2 - A3) * C'c') + ((A1 - A4) * S'c') + ((A1 + A4) * C's') + ((A2 + A3) * S's')]$$

$$V_{2.72} = 8249.87501 * [((-0.01251 * 0.9342) + (0.01150 * 0.6166) + (0.01000 * 0.9484) + (-0.00677 * 0.6260)]$$

$$V_{2.72} = 5.366 \text{ Tn}$$

$$Pr_{2.72} = y * ks$$

$$Pr_{2.72} = 0.00635 \text{ m} * 1300 \text{ Tn/m}^3$$

$$Pr_{2.72} = 8.255 \text{ Tn/m}^2$$

Para x = 4.08 m

$$y_{4.08} = 1 * [(A1 * C'c') + (A2 * S'c') + (A3 * C's') + (A4 * S's')]$$

$$y_{4.08} = 1[(0.01075 * 0.6680) + (-0.00964 * 0.5547) + (0.00287 * 1.6658) + (-0.00075 * 1.3833)]$$

$$y_{4.08} = 0.558 \text{ cm}$$

$$\phi_{4.08} = \frac{1}{\lambda} * [((A2 + A3) * C'c') + ((A1 + A4) * S'c') + (-(A1 + A4) * C's') + (-(A2 + A3) * S's')]$$

$$\phi_{4.08} = 0.29152 * [((-0.00677 * 0.6680) + (0.01000 * 0.5547) + (-0.01150 * 1.6658) + (0.01251 * 1.3833)]$$

$$\phi_{4.08} = -0.0002 \text{ rad}$$

$$M_{4.08} = \frac{2EI}{\lambda^2} * [(-A4 * C'c') + (-A3 * S'c') + (A2 * C's') + (A1 * S's')]$$

$$M_{4.08} = 28299.55830 * [(0.00075 * 0.6680) + (-0.00287 * 0.5547) + (-0.00964 * 1.6658) + (0.01075 * 1.3833)]$$

$$M_{4.08} = -64.430 \text{ Tn} - \text{m}$$

$$V_{4.08} = \frac{2EI}{\lambda^3} * [((A2 - A3) * C'c') + ((A1 - A4) * S'c') + ((A1 + A4) * C's') + ((A2 + A3) * S's')]$$

$$V_{4.08} = 8249.87501 * [((-0.01251 * 0.6680) + (0.01150 * 0.5547) + (0.01000 * 1.6658) + (-0.00677 * 1.3833)]$$

$$V_{4.08} = 43.849 \text{ Tn}$$

$$Pr_{4.08} = y * ks$$

$$Pr_{4.08} = 0.00558 \text{ m} * 1300 \text{ Tn/m}^3$$

$$Pr_{4.08} = 7.249 \text{ Tn/m}^2$$

Para x = 5.44 m

$$y_{5.44} = 1 * [(A1 * C'c') + (A2 * S'c') + (A3 * C's') + (A4 * S's')]$$

$$y_{5.44} = 1[(0.01075 * -0.0383) + (-0.00964 * -0.0353) + (0.00287 * 2.5439) + (-0.00075 * 2.3391)]$$

$$y_{5.44} = 0.547 \text{ cm}$$

$$\phi_{5.44} = \frac{1}{\lambda} * [((A2 + A3) * C'c') + ((A1 + A4) * S'c') + (-(A1 + A4) * C's') + (-(A2 + A3) * S's')]$$

$$\phi_{5.44} = 0.29152 * [((-0.00677 * -0.0383) + (0.01000 * -0.0353) + (-0.01150 * 2.5439) + (0.01251 * 2.3391)]$$

$$\phi_{5.44} = -0.00003 \text{ rad}$$

$$M_{5.44} = \frac{2EI}{\lambda^2} * [(-A4 * C'c') + (-A3 * S'c') + (A2 * C's') + (A1 * S's')]$$

$$M_{5.44} = 28299.55830 * [(0.00075 * -0.0383) + (-0.00287 * -0.0353) + (-0.00964 * 2.5439) + (0.01075 * 2.3391)]$$

$$M_{5.44} = 19.729 \text{ Tn} - \text{m}$$

$$V_{5.44} = \frac{2EI}{\lambda^3} * [((A2 - A3) * C'c') + ((A1 - A4) * S'c') + ((A1 + A4) * C's') + ((A2 + A3) * S's')]$$

$$V_{5.44} = 8249.87501 * [((-0.01251 * -0.0383) + (0.01150 * -0.0353) + (0.01000 * 2.5439) + (-0.00677 * 2.3391)]$$

$$V_{5.44} = 79.815 \text{ Tn}$$

$$Pr_{5.44} = y * ks$$

$$Pr_{5.44} = 0.00547 \text{ m} * 1300 \text{ Tn/m}^3$$

$$Pr_{5.44} = 7.112 \text{ Tn/m}^2$$

NOTA: Para los cálculos de los siguientes tramos se toma directamente los valores calculados anteriormente y los valores de las **Tablas Resumen de cálculos**, reemplazando en las fórmulas respectivamente

Para el elemento 2 → L= 4.08 m

De la Tabla 15:

	Factor	C'c'	S'c'	C's'	S's'
y =	1	0.00547	-0.00408	0.00399	-0.00134
∅ =	0.29152	-0.00009	0.00414	-0.00681	0.00808
M =	28299.55830	0.00134	-0.00399	-0.00408	0.00547
V =	8249.87501	-0.00808	0.00681	0.00414	-0.00009

Para x = 0 m

$$y_0 = 1 * [(A1 * C'c') + (A2 * S'c') + (A3 * C's') + (A4 * S's')]$$

$$y_0 = 0.547 \text{ cm}$$

$$\phi_0 = \frac{1}{\lambda} * [((A2 + A3) * C'c') + ((A1 + A4) * S'c') + (-(A1 + A4) * C's') + (-(A2 + A3) * S's')]]$$

$$\phi_0 = -2.6395E - 5 \text{ rad}$$

$$M_0 = \frac{2EI}{\lambda^2} * [(-A4 * C'c') + (-A3 * S'c') + (A2 * C's') + (A1 * S's')]]$$

$$M_0 = 37.789 \text{ Tn} - \text{m}$$

$$V_0 = \frac{2EI}{\lambda^3} * [((A2 - A3) * C'c') + ((A1 - A4) * S'c') + ((A1 + A4) * C's') + ((A2 + A3) * S's')]]$$

$$V_0 = -66.635 \text{ Tn}$$

$$Pr_0 = y * ks$$

$$Pr_0 = 0.00547\text{m} * 1300\text{Tn/m}^3$$

$$Pr_0 = 7.112 \text{ Tn/m}^2$$

[Para x = 1.02 m](#)

$$y_{1.02} = 1 * [(A1 * C'c') + (A2 * S'c') + (A3 * C's') + (A4 * S's')]]$$

$$y_{1.02} = 0.539 \text{ cm}$$

$$\phi_{1.02} = \frac{1}{\lambda} * [((A2 + A3) * C'c') + ((A1 + A4) * S'c') + (-(A1 + A4) * C's') + (-(A2 + A3) * S's')]]$$

$$\phi_{1.02} = -7.7588E - 5 \text{ rad}$$

$$M_{1.02} = \frac{2EI}{\lambda^2} * [(-A4 * C'c') + (-A3 * S'c') + (A2 * C's') + (A1 * S's')]]$$

$$M_{1.02} = -16.545 \text{ Tn} - m$$

$$V_{1.02} = \frac{2EI}{\lambda^3} * [((A2 - A3) * C'c') + ((A1 - A4) * S'c') + ((A1 + A4) * C's') + ((A2 + A3) * S's')]]$$

$$V_{1.02} = -39.973 \text{ Tn}$$

$$Pr_{1.02} = y * ks$$

$$Pr_{1.02} = 0.00539m * 1300Tn/m^3$$

$$Pr_{1.02} = 7.007 \text{ Tn}/m^2$$

Para x = 2.04 m

$$y_{2.04} = 1 * [(A1 * C'c') + (A2 * S'c') + (A3 * C's') + (A4 * S's')]]$$

$$y_{2.04} = 0.540 \text{ cm}$$

$$\phi_{2.04} = \frac{1}{\lambda} * [((A2 + A3) * C'c') + ((A1 + A4) * S'c') + (-(A1 + A4) * C's') + (-(A2 + A3) * S's')]]$$

$$\phi_{2.04} = 1.2119E - 4 \text{ rad}$$

$$M_{2.04} = \frac{2EI}{\lambda^2} * [(-A4 * C'c') + (-A3 * S'c') + (A2 * C's') + (A1 * S's')]]$$

$$M_{2.04} = -43.866 \text{ Tn} - m$$

$$V_{2.04} = \frac{2EI}{\lambda^3} * [((A2 - A3) * C'c') + ((A1 - A4) * S'c') + ((A1 + A4) * C's') + ((A2 + A3) * S's')]$$

$$V_{2.04} = 13.594 \text{ Tn}$$

$$Pr_{2.04} = y * ks$$

$$Pr_{2.04} = 0.0054 \text{ m} * 1300 \text{ Tn/m}^3$$

$$Pr_{2.04} = 7.017 \text{ Tn/m}^2$$

Para x = 3.06 m

$$y_{3.06} = 1 * [(A1 * C'c') + (A2 * S'c') + (A3 * C's') + (A4 * S's')]$$

$$y_{3.06} = 0.567 \text{ cm}$$

$$\phi_{3.06} = \frac{1}{\lambda} * [((A2 + A3) * C'c') + ((A1 + A4) * S'c') + (-(A1 + A4) * C's') + (-(A2 + A3) * S's')]$$

$$\phi_{3.06} = 4.0459E - 4 \text{ rad}$$

$$M_{3.06} = \frac{2EI}{\lambda^2} * [(-A4 * C'c') + (-A3 * S'c') + (A2 * C's') + (A1 * S's')]$$

$$M_{3.06} = -44.063 \text{ Tn} - m$$

$$V_{3.06} = \frac{2EI}{\lambda^3} * [((A2 - A3) * C'c') + ((A1 - A4) * S'c') + ((A1 + A4) * C's') + ((A2 + A3) * S's')]$$

$$V_{3.06} = 13.426 \text{ Tn}$$

$$Pr_{3.06} = y * ks$$

$$Pr_{3.06} = 0.00567 m * 1300Tn/m^3$$

$$Pr_{3.06} = 7.365 Tn/m^2$$

Para x = 4.08 m

$$y_{4.08} = 1 * [(A1 * C'c') + (A2 * S'c') + (A3 * C's') + (A4 * S's')]$$

$$y_{4.08} = 0.619 cm$$

$$\begin{aligned} \phi_{4.08} = \frac{1}{\lambda} * [& ((A2 + A3) * C'c') + ((A1 + A4) * S'c') + (-(A1 + A4) * C's') \\ & + (-(A2 + A3) * S's')] \end{aligned}$$

$$\phi_{4.08} = 6.0302E - 4 rad$$

$$M_{4.08} = \frac{2EI}{\lambda^2} * [(-A4 * C'c') + (-A3 * S'c') + (A2 * C's') + (A1 * S's')]$$

$$M_{4.08} = -15.796 Tn - m$$

$$\begin{aligned} V_{4.08} = \frac{2EI}{\lambda^3} * [& ((A2 - A3) * C'c') + ((A1 - A4) * S'c') + ((A1 + A4) * C's') + \\ & ((A2 + A3) * S's')] \end{aligned}$$

$$V_{4.08} = 42.436 Tn$$

$$Pr_{4.08} = y * ks$$

$$Pr_{4.08} = 0.00619 m * 1300Tn/m^3$$

$$Pr_{4.08} = 8.053 Tn/m^2$$

Para el elemento 3 → L= 4.08 m

De la Tabla 16:

	Factor	$C'c'$	$S'c'$	$C's'$	$S's'$
$y =$	1	0.00619	-0.00359	0.00566	-0.00003
$\phi =$	0.29152	0.00207	0.00616	-0.00623	0.00925
$M =$	28299.55830	0.00003	-0.00566	-0.00359	0.00619
$V =$	8249.87501	-0.00925	0.00623	0.00616	0.00207

Para $x = 0$ m

$$y_0 = 1 * [(A1 * C'c') + (A2 * S'c') + (A3 * C's') + (A4 * S's')]$$

$$y_0 = 0.619 \text{ cm}$$

$$\phi_0 = \frac{1}{\lambda} * [((A2 + A3) * C'c') + ((A1 + A4) * S'c') + (-(A1 + A4) * C's') + (-(A2 + A3) * S's')]$$

$$\phi_0 = 0.00060 \text{ rad}$$

$$M_0 = \frac{2EI}{\lambda^2} * [(-A4 * C'c') + (-A3 * S'c') + (A2 * C's') + (A1 * S's')]$$

$$M_0 = 0.975 \text{ Tn} - m$$

$$V_0 = \frac{2EI}{\lambda^3} * [((A2 - A3) * C'c') + ((A1 - A4) * S'c') + ((A1 + A4) * C's') + ((A2 + A3) * S's')]$$

$$V_0 = -76.274 \text{ Tn}$$

$$Pr_0 = y * ks$$

$$Pr_0 = 0.00619m * 1300Tn/m^3$$

$$Pr_0 = 8.053 Tn/m^2$$

Para x = 1.02 m

$$y_{1.02} = 1 * [(A1 * C'c') + (A2 * S'c') + (A3 * C's') + (A4 * S's')]$$

$$y_{1.02} = 0.688 \text{ cm}$$

$$\begin{aligned} \phi_{1.02} = \frac{1}{\lambda} * [& ((A2 + A3) * C'c') + ((A1 + A4) * S'c') + (-(A1 + A4) * C's') \\ & + (-(A2 + A3) * S's')] \end{aligned}$$

$$\phi_{1.02} = 0.00080 \text{ rad}$$

$$M_{1.02} = \frac{2EI}{\lambda^2} * [(-A4 * C'c') + (-A3 * S'c') + (A2 * C's') + (A1 * S's')]$$

$$M_{1.02} = -60.795 Tn - m$$

$$\begin{aligned} V_{1.02} = \frac{2EI}{\lambda^3} * [& ((A2 - A3) * C'c') + ((A1 - A4) * S'c') + ((A1 + A4) * \\ & C's') + ((A2 + A3) * S's')] \end{aligned}$$

$$V_{1.02} = -44.289 Tn$$

$$Pr_{1.02} = y * ks$$

$$Pr_{1.02} = 0.00688m * 1300Tn/m^3$$

$$Pr_{1.02} = 8.943 Tn/m^2$$

Para x = 2.04 m

$$y_{2.04} = 1 * [(A1 * C'c') + (A2 * S'c') + (A3 * C's') + (A4 * S's')]$$

$$y_{2.04} = 0.793 \text{ cm}$$

$$\phi_{2.04} = \frac{1}{\lambda} * [((A2 + A3) * C'c') + ((A1 + A4) * S'c') + (-(A1 + A4) * C's') + (-(A2 + A3) * S's')]$$

$$\phi_{2.04} = 0.00128 \text{ rad}$$

$$M_{2.04} = \frac{2EI}{\lambda^2} * [(-A4 * C'c') + (-A3 * S'c') + (A2 * C's') + (A1 * S's')]$$

$$M_{2.04} = -87.984 \text{ Tn} - m$$

$$V_{2.04} = \frac{2EI}{\lambda^3} * [((A2 - A3) * C'c') + ((A1 - A4) * S'c') + ((A1 + A4) * C's') + ((A2 + A3) * S's')]$$

$$V_{2.04} = -8.170 \text{ Tn}$$

$$Pr_{2.04} = y * ks$$

$$Pr_{2.04} = 0.00793 \text{ m} * 1300 \text{ Tn/m}^3$$

$$Pr_{2.04} = 10.304 \text{ Tn/m}^2$$

Para x = 3.06 m

$$y_{3.06} = 1 * [(A1 * C'c') + (A2 * S'c') + (A3 * C's') + (A4 * S's')]$$

$$y_{3.06} = 0.950 \text{ cm}$$

$$\phi_{3.06} = \frac{1}{\lambda} * [((A2 + A3) * C'c') + ((A1 + A4) * S'c') + (-(A1 + A4) * C's') + (-(A2 + A3) * S's')]]$$

$$\phi_{3.06} = 0.00180 \text{ rad}$$

$$M_{3.06} = \frac{2EI}{\lambda^2} * [(-A4 * C'c') + (-A3 * S'c') + (A2 * C's') + (A1 * S's')]]$$

$$M_{3.06} = -75.283 \text{ Tn} - m$$

$$V_{3.06} = \frac{2EI}{\lambda^3} * [((A2 - A3) * C'c') + ((A1 - A4) * S'c') + ((A1 + A4) * C's') + ((A2 + A3) * S's')]]$$

$$V_{3.06} = 34.363 \text{ Tn}$$

$$Pr_{3.06} = y * ks$$

$$Pr_{3.06} = 0.00950 \text{ m} * 1300 \text{ Tn/m}^3$$

$$Pr_{3.06} = 12.352 \text{ Tn/m}^2$$

[Para x = 4.08 m](#)

$$y_{4.08} = 1 * [(A1 * C'c') + (A2 * S'c') + (A3 * C's') + (A4 * S's')]]$$

$$y_{4.08} = 1.152 \text{ cm}$$

$$\phi_{4.08} = \frac{1}{\lambda} * [((A2 + A3) * C'c') + ((A1 + A4) * S'c') + (-(A1 + A4) * C's') + (-(A2 + A3) * S's')]]$$

$$\phi_{4.08} = 0.00210 \text{ rad}$$

$$M_{4.08} = \frac{2EI}{\lambda^2} * [(-A4 * C'c') + (-A3 * S'c') + (A2 * C's') + (A1 * S's')]$$

$$M_{4.08} = -14.841 \text{ Tn} - m$$

$$V_{4.08} = \frac{2EI}{\lambda^3} * [((A2 - A3) * C'c') + ((A1 - A4) * S'c') + ((A1 + A4) * C's') + ((A2 + A3) * S's')]$$

$$V_{4.08} = 85.810 \text{ Tn}$$

$$Pr_{4.08} = y * ks$$

$$Pr_{4.08} = 0.01152 \text{ m} * 1300 \text{ Tn/m}^3$$

$$Pr_{4.08} = 14.980 \text{ Tn/m}^2$$

Tabla 17: Resumen de Resultados de la viga con tres vanos

DISTANCIA x (m)	DESPLAZAMIENTO Y (cm)	MOMENTO M (Tn-m)	CORTANTE V (Tn)	PRESIÓN P (Tn-m ²)	GIRO Ø G (rad)
VANO 1					
0	1.075	21.290	-103.200	13.974	-0.0020
1.36	0.817	-75.210	-41.547	10.615	-0.0017
2.72	0.635	-98.464	5.366	8.255	-0.0009
4.08	0.558	-64.430	43.849	7.249	-0.0002
5.44	0.547	19.729	79.815	7.112	-0.00003
VANO 2					
0	0.547	37.789	-66.635	7.112	-2.6395E-05
1.02	0.539	-16.545	-39.973	7.007	-7.7588E-05
2.04	0.540	-43.866	-13.594	7.017	1.2119E-04
3.06	0.567	-44.063	13.426	7.365	4.0459E-04
4.08	0.619	-15.796	42.436	8.053	6.0302E-04
VANO 3					
0	0.619	0.975	-76.274	8.053	0.00060
1.02	0.688	-60.795	-44.289	8.943	0.00080
2.04	0.793	-87.984	-8.170	10.304	0.00128
3.06	0.950	-75.283	34.363	12.352	0.00180
4.08	1.152	-14.841	85.810	14.980	0.00210

Fuente: Ana Sánchez

16. Chequeo de las presiones con el esfuerzo admisible del suelo (q_{adm})

Entonces, si se tiene según el estudio de suelos un $q_{adm} = 15 \text{ Tn/m}^2$, se debe verificar con el mayor valor de las presiones obtenidas, éste valor debe ser menor o igual que el q_{adm} .

$$\begin{aligned} Pr &\leq q_{adm} \\ 14.980 \text{ Tn/m}^2 &\leq 15 \text{ Tn/m}^2 \rightarrow \text{OK} \end{aligned}$$

En caso de no cumplir dicha condición se procederá a rediseñar nuevamente la viga, aumentando la sección de la misma. Se recomienda aumentar el peralte.

17. Cálculo del área de acero (A_s)

Datos:

$$b = 370 \text{ cm}$$

$$H = 60 \text{ cm}$$

$$r = 8 \text{ cm}$$

$$f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$$

$$f'_c = 240 \text{ kg/cm}^2$$

$$\phi = 0.9 \text{ (Diseño)}$$

- Cálculo de d

$$d = H - r$$

$$d = 60 \text{ cm} - 8 \text{ cm}$$

$$d = 52 \text{ cm}$$

- Cálculo de K

$$K = 0.85 * f'c * b * d$$

$$K = 0.85 * 240 \frac{kg}{cm^2} * 370cm * 52 cm$$

$$K = 3924960$$

- Cálculo del Momento de Diseño (M_d)

$$\text{Vano 1: } M_u = 98.46 \text{ Tn-m}$$

$$M_{d1} = M_u * 1.5$$

$$M_{d1} = 98.46 \text{ Tn} - m * 1.5$$

$$M_{d1} = 147.69 \text{ Tn} - m$$

$$\text{Vano 2: } M_u = 44.06 \text{ Tn-m}$$

$$M_{d2} = M_u * 1.5$$

$$M_{d2} = 44.06 \text{ Tn} - m * 1.5$$

$$M_{d2} = 66.09 \text{ Tn} - m$$

$$\text{Vano 3 } M_u = 87.98 \text{ Tn-m}$$

$$M_{d3} = M_u * 1.5$$

$$M_{d3} = 87.98 \text{ Tn} - m * 1.5$$

$$M_{d3} = 131.97 \text{ Tn} - m$$

- Cálculo de As mínimo

$$\rho_{min} = \frac{14}{f_y}$$

$$\rho_{min} = \frac{14}{4200}$$

$$\rho_{min} = 0.0033$$

$$A_{S_{min}} = \rho_{min} * b * d$$

$$A_{S_{min}} = 0.0033 * 370 \text{ cm} * 42 \text{ cm}$$

$$A_{S_{min}} = 63.49 \text{ cm}^2$$

- Cálculo de A_s

$$A_s = \frac{K}{f_y} \left[1 - \sqrt{1 - \frac{2 * M_d}{\phi * K * d}} \right]$$

$$A_{S_1} = \frac{3924960}{4200} \left[1 - \sqrt{1 - \frac{2 * 147.69 * 10^5}{0.9 * 3924960 * 52}} \right]$$

$$A_{S_1} = 78.43 \text{ cm}^2$$

$$A_{S_2} = \frac{3924960}{4200} \left[1 - \sqrt{1 - \frac{2 * 66.09 * 10^5}{0.9 * 3924960 * 52}} \right]$$

$$A_{S_2} = 34.25 \text{ cm}^2 \rightarrow \text{No cumple con } A_s \text{ mínimo } \therefore$$

$$A_{S_2} = 63.49 \text{ cm}^2$$

$$A_{S_3} = \frac{3924960}{4200} \left[1 - \sqrt{1 - \frac{2 * 131.97 * 10^5}{0.9 * 3924960 * 52}} \right]$$

$$A_{S_3} = 69.74 \text{ cm}^2$$

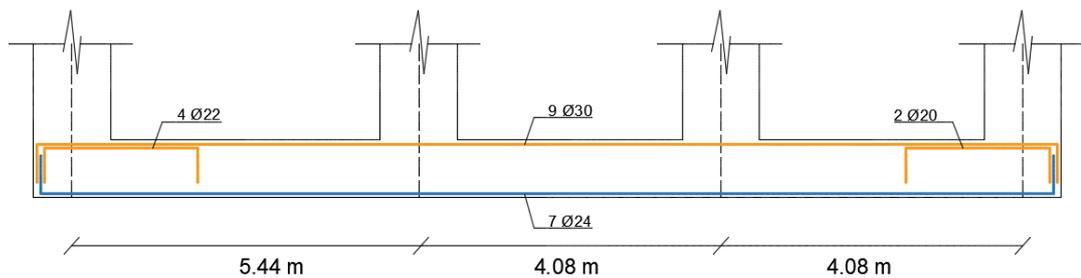
- Cálculo de A_s (compresión)

$$A_{s_c} = 50\% A_{s_T}$$

$$A_{s_c} = 31.81 \text{ cm}^2$$

18. Armado de la viga

Figura 16: Ilustración gráfica del armado de la viga de cimentación



Fuente: Ana Sánchez

4.1.3 EJEMPLOS REALIZADOS CON LA APLICACIÓN DESARROLLADA

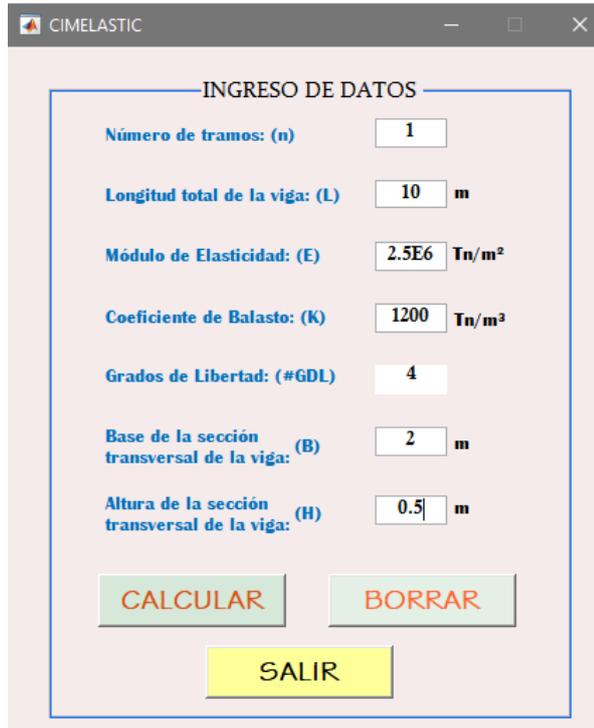
EJEMPLO CON UN VANO (TRAMO)

Figura 17: Ilustración gráfica de la presentación de la aplicación desarrollada



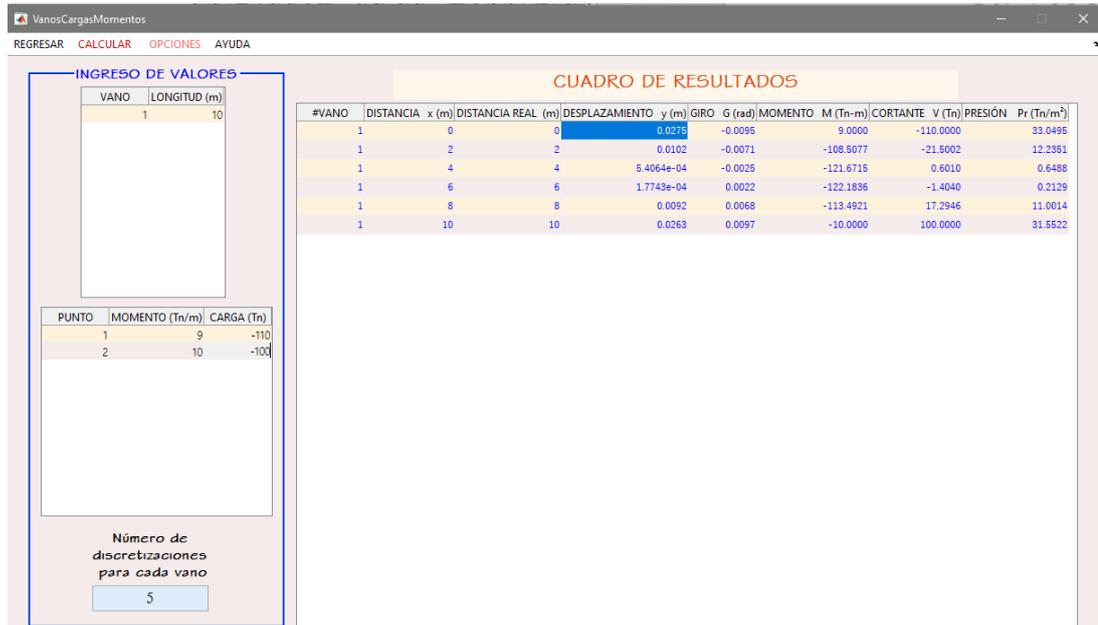
Fuente: Ana Sánchez

Figura 18: Ilustración gráfica del inicio de la aplicación desarrollada



Fuente: Ana Sánchez

Figura 19: Ilustración gráfica de la segunda pantalla de la aplicación desarrollada



#VANO	DISTANCIA x (m)	DISTANCIA REAL (m)	DESPLAZAMIENTO y (m)	GIRO G (rad)	MOMENTO M (Tn-m)	CORTANTE V (Tn)	PRESIÓN Pr (Tn/m ²)
1	0	0	0.0276	-0.0096	9.0000	-110.0000	33.0496
1	2	2	0.0102	-0.0071	-108.5077	-21.5002	12.2351
1	4	4	5.4064e-04	-0.0025	-121.6715	0.6010	0.6488
1	6	6	1.7743e-04	0.0022	-122.1836	-1.4040	0.2129
1	8	8	0.0092	0.0068	-113.4821	17.2946	11.0014
1	10	10	0.0263	0.0097	-10.0000	100.0000	31.5522

Fuente: Ana Sánchez

Figura 20: Ilustración gráfica del ingreso de valores en la aplicación desarrollada

INGRESO DE VALORES

VANO	LONGITUD (m)
1	10

PUNTO	MOMENTO (Tn/m)	CARGA (Tn)
1	9	-110
2	10	-100

Número de discretizaciones para cada vano

5

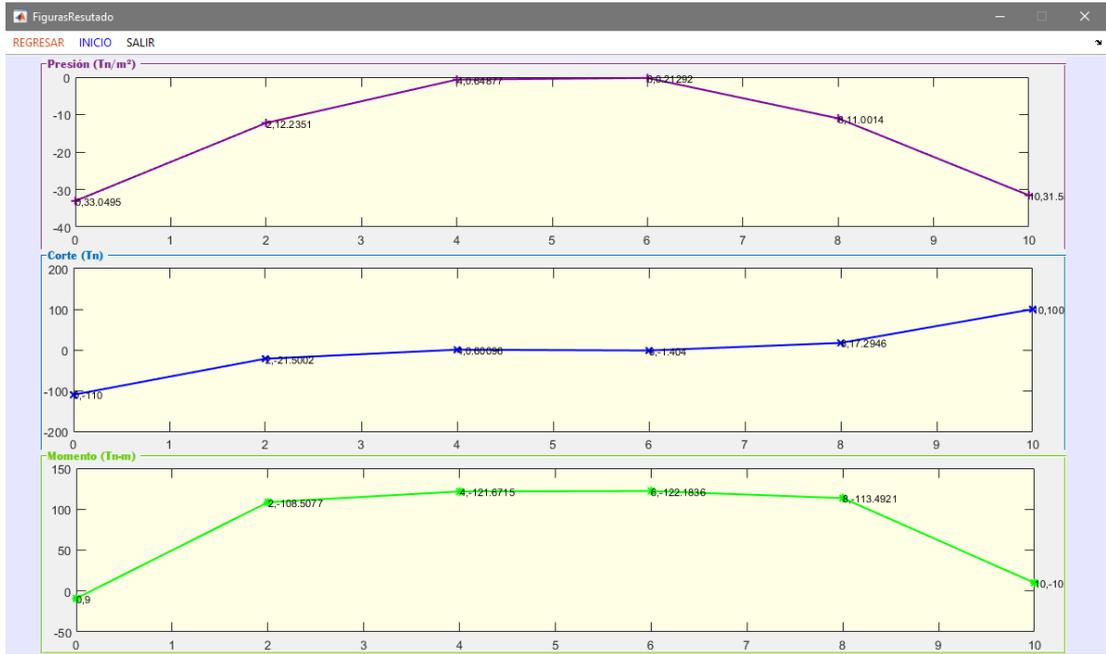
Fuente: Ana Sánchez

Figura 21: Ilustración gráfica del cuadro de resultados de la aplicación desarrollada

CUADRO DE RESULTADOS									
#VANO	DISTANCIA x (m)	DISTANCIA REAL (m)	DESPLAZAMIENTO y (m)	GIRO G (rad)	MOMENTO M (Tn-m)	CORTANTE V (Tn)	PRESIÓN Pr (Tn/m ²)		
1	0	0	0.0275	-0.0095	9.0000	-110.0000	33.0495		
1	2	2	0.0102	-0.0071	-108.5077	-21.5002	12.2351		
1	4	4	5.4064e-04	-0.0025	-121.6715	0.6010	0.6488		
1	6	6	1.7743e-04	0.0022	-122.1836	-1.4040	0.2129		
1	8	8	0.0092	0.0068	-113.4921	17.2946	11.0014		
1	10	10	0.0263	0.0097	-10.0000	100.0000	31.5522		

Fuente: Ana Sánchez

Figura 22: Ilustración gráfica de los diagramas dados por la aplicación desarrollada



Fuente: Ana Sánchez

Figura 23: Ilustración gráfica de las áreas de acero calculadas por la aplicación desarrollada

The screenshot shows the 'Areasdeacero' application interface. It includes a table of input moments, input fields for concrete strength (f_c) and cover, a table of calculated steel areas, and buttons for 'CALCULAR', 'LIMPIAR', and 'SALIR'.

# VANO	MOMENTO
1	9.0000
1	-108.5077
1	-121.6715
1	-122.1836
1	-113.4921
1	-10.0000

Ingresar el mayor Momento de cada tramo: Tn-m
 Ingresar f_c : Kg/cm²
 Ingresar el recubrimiento: cm

MOMENTO	M (Tn-m)	As (cm ²)
1	183.2754	139.1813

Fuente: Ana Sánchez

EJEMPLO CON TRES VANOS (TRAMOS)

CARATULA



UNIVERSIDAD TÉCNICA DE AMBATO

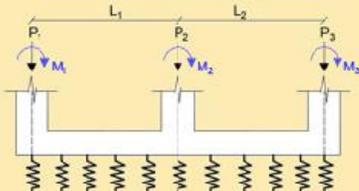
FACULTAD DE INGENIERÍA CIVIL Y MECÁNICA

CARRERA DE INGENIERÍA CIVIL



CIMELASTIC

CÁLCULO DE VIGAS DE CIMENTACIÓN SOBRE MEDIOS ELÁSTICOS



REALIZADO POR:
ANA GABRIELA SÁNCHEZ

EMPEZAR

CIMELASTIC

INGRESO DE DATOS

Número de tramos: (n)	<input type="text" value="3"/>
Longitud total de la viga: (L)	<input type="text" value="13.6"/> m
Módulo de Elasticidad: (E)	<input type="text" value="2.5E6"/> Tn/m ²
Coefficiente de Balasto: (K)	<input type="text" value="1300"/> Tn/m ³
Grados de Libertad: (#GDL)	<input type="text" value="8"/>
Base de la sección transversal de la viga: (B)	<input type="text" value="3.7"/> m
Altura de la sección transversal de la viga: (H)	<input type="text" value="0.6"/> m

CALCULAR BORRAR

SALIR

VanosCargasMomentos

REGRESAR CALCULAR OPCIONES AYUDA

INGRESO DE VALORES

VANO	LONGITUD (m)
1	5.4400
2	4.0800
3	4.0800

PUNTO	MOMENTO (Tn/m)	CARGA (Tn)
1	21.2900	-103.2000
2	18.0600	-146.4500
3	16.7700	-118.7100
4	14.8400	-85.8100

Número de discretizaciones para cada vano

4

CUADRO DE RESULTADOS

#VANO	DISTANCIA x (m)	DISTANCIA REAL (m)	DESPLAZAMIENTO y (m)	GIRO G (rad)	MOMENTO M (Tn-m)	CORTANTE V (Tn)	PRESIÓN Pr (Tn/m ²)
1	0	0	0.0107	-0.0020	21.2900	-103.2000	13.9739
1	1.3600	1.3600	0.0082	-0.0017	-75.2097	-41.5474	10.6153
1	2.7200	2.7200	0.0064	-9.4301e-04	-98.4638	5.3662	8.2551
1	4.0800	4.0800	0.0056	-2.4222e-04	-64.4285	43.8483	7.2485
1	5.4400	5.4400	0.0055	-2.6395e-05	19.7287	79.8150	7.1123
2	0	5.4400	0.0055	-2.6395e-05	37.7887	-66.6350	7.1123
2	1.0200	6.4600	0.0054	-7.7580e-05	-16.5448	-39.9724	7.0066
2	2.0400	7.4800	0.0054	1.2119e-04	-43.8668	-13.5939	7.0170
2	3.0600	8.5000	0.0057	4.0458e-04	-44.0631	13.4264	7.3654
2	4.0800	9.5200	0.0062	6.0302e-04	-15.7948	42.4362	8.0526
3	0	9.5200	0.0062	6.0302e-04	0.9752	-76.2738	8.0526
3	1.0200	10.5400	0.0069	8.0290e-04	-60.7944	-44.2882	8.9429
3	2.0400	11.5600	0.0079	0.0013	-87.9831	-8.1695	10.3036
3	3.0600	12.5800	0.0095	0.0018	-75.2824	34.3625	12.3522
3	4.0800	13.6000	0.0115	0.0021	-14.8400	85.8100	14.9801

INGRESO DE VALORES

VANO	LONGITUD (m)
1	5.4400
2	4.0800
3	4.0800

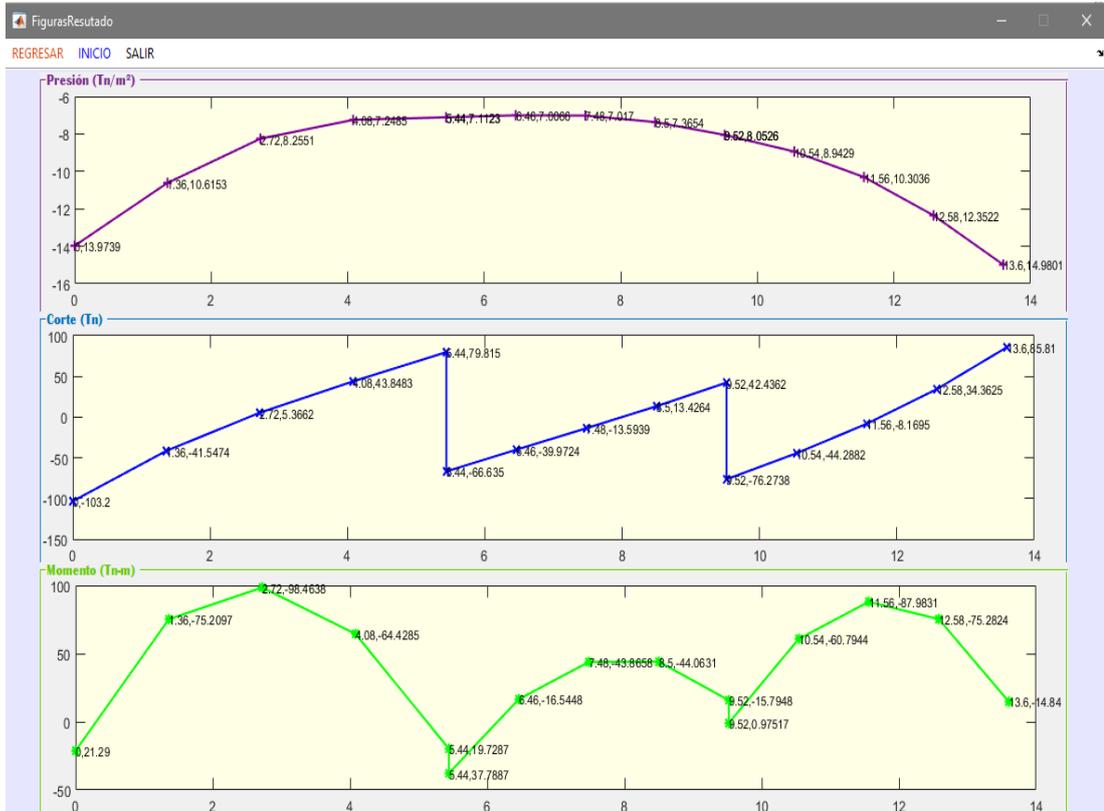
PUNTO	MOMENTO (Tn/m)	CARGA (Tn)
1	21.2900	-103.2000
2	18.0600	-146.4500
3	16.7700	-118.7100
4	14.8400	-85.8100

Número de discretizaciones para cada vano

4

CUADRO DE RESULTADOS

#VANO	DISTANCIA x (m)	DISTANCIA REAL (m)	DESPLAZAMIENTO y (m)	GIRO G (rad)	MOMENTO M (Tn-m)	CORTANTE V (Tn)	PRESIÓN Pr (Tn/m ²)
1	0	0	0.0107	-0.0020	21.2900	-103.2000	13.9739
1	1.3600	1.3600	0.0082	-0.0017	-75.2097	-41.5474	10.6153
1	2.7200	2.7200	0.0064	-9.4301e-04	-98.4638	5.3662	8.2551
1	4.0800	4.0800	0.0056	-2.4222e-04	-64.4285	43.8483	7.2485
1	5.4400	5.4400	0.0055	-2.6395e-05	19.7287	79.8150	7.1123
2	0	5.4400	0.0055	-2.6395e-05	37.7887	-66.6350	7.1123
2	1.0200	6.4600	0.0054	-7.7580e-05	-16.5448	-39.9724	7.0066
2	2.0400	7.4800	0.0054	1.2119e-04	-43.8658	-13.5939	7.0170
2	3.0600	8.5000	0.0057	4.0458e-04	-44.0631	13.4264	7.3654
2	4.0800	9.5200	0.0062	6.0302e-04	-15.7948	42.4362	8.0526
3	0	9.5200	0.0062	6.0302e-04	0.9752	-76.2738	8.0526
3	1.0200	10.5400	0.0069	8.0290e-04	-60.7944	-44.2882	8.9429
3	2.0400	11.5600	0.0079	0.0013	-87.9831	-8.1695	10.3036
3	3.0600	12.5800	0.0095	0.0018	-75.2824	34.3625	12.3522
3	4.0800	13.6000	0.0115	0.0021	-14.8400	85.8100	14.9801



Areasdeacero

REGRESAR INICIO

# VANO	MOMENTO
1	21.2900
1	-75.2097
1	-98.4638
1	-64.4285
1	19.7287
2	37.7887
2	-16.5448
2	-43.8658
2	-44.0631
2	-15.7948
3	0.9752
3	-60.7944
3	-87.9831
3	-75.2824
3	-14.8400

Ingresar el mayor Momento de cada tramo: Tn-m

Ingresar f_c: Kg/cm²

Ingresar el recubrimiento: cm

	MOMENTO M (Tn-m)	As (cm ²)
1	147.6957	78.4315
2	66.0947	34.2534
3	131.9747	69.7448

CALCULAR LIMPIAR

SALIR

4.2 ANÁLISIS DE RESULTADOS

A continuación se realiza una comparación de los resultados de los ejercicios resueltos manualmente con uno y tres vanos respectivamente, y de los resultados que se obtuvieron por medio de la aplicación desarrollada, presentando así el porcentaje de diferencia entre los mismos.

Tabla 18: Cuadro comparativo de los desplazamientos (un vano)

DISTANCIA x (m)	DESPLAZAMIENTO Y (cm)		DIFERENCIA	
	MÉTODO MANUAL	APLICACIÓN DESARROLLADA	CANTIDAD (cm)	%
0	2.754	2.750	0.004	0.15%
2	1.020	1.020	0.000	0.00%
4	0.054	0.054	0.000	0.19%
6	0.018	0.018	0.000	0.00%
8	0.917	0.920	0.003	0.33%
10	2.629	2.630	0.001	0.04%

Fuente: Ana Sánchez

Tabla 19: Cuadro comparativo de los momentos (un vano)

DISTANCIA x (m)	MOMENTO M (Tn-m)		DIFERENCIA	
	MÉTODO MANUAL	APLICACIÓN DESARROLLADA	CANTIDAD (cm)	%
0	9.000	9.000	0.000	0.00%
2	-108.508	-108.5077	0.000	0.00%
4	-121.671	-121.6715	0.000	0.00%
6	-122.184	-122.1836	0.000	0.00%
8	-113.492	-113.4921	0.000	0.00%
10	-10.000	-10.0000	0.000	0.00%

Fuente: Ana Sánchez

Tabla 20: Cuadro comparativo de los cortantes (un vano)

DISTANCIA x (m)	CORTANTE V (Tn)		DIFERENCIA	
	MÉTODO MANUAL	APLICACIÓN DESARROLLADA	CANTIDAD (cm)	%
0	-110.000	-110.0000	0.000	0.00%
2	-21.500	-21.5002	0.000	0.00%
4	0.601	0.6010	0.000	0.00%
6	-1.404	-1.4040	0.000	0.00%
8	17.295	17.2946	0.000	0.00%
10	100.000	100.0000	0.000	0.00%

Fuente: Ana Sánchez

Tabla 21: Cuadro comparativo de los giros (un vano)

DISTANCIA x (m)	GIRO G (rad)		DIFERENCIA	
	MÉTODO MANUAL	APLICACIÓN DESARROLLADA	CANTIDAD (cm)	%
0	-0.0095	-0.0095	0.000	0.00%
2	-0.0071	-0.0071	0.000	0.00%
4	-0.0025	-0.0025	0.000	0.00%
6	0.0022	0.0022	0.000	0.00%
8	0.0068	0.0068	0.000	0.00%
10	0.0097	0.0097	0.000	0.00%

Fuente: Ana Sánchez

Tabla 22: Cuadro comparativo de las presiones (un vano)

DISTANCIA x (m)	PRESIÓN Pr (Tn/m ²)		DIFERENCIA	
	MÉTODO MANUAL	APLICACIÓN DESARROLLADA	CANTIDAD (cm)	%
0	33.050	33.0495	0.000	0.00%
2	12.235	12.2351	0.000	0.00%
4	0.649	0.6488	0.000	0.03%
6	0.213	0.2129	0.000	0.05%
8	11.001	11.0014	0.000	0.00%
10	31.552	31.5522	0.000	0.00%

Fuente: Ana Sánchez

Tabla 23: Cuadro comparativo de los desplazamientos (tres vanos)

DISTANCIA x (m)	DESPLAZAMIENTO Y (cm)		DIFERENCIA	
	MÉTODO MANUAL	APLICACIÓN DESARROLLADA	CANTIDAD (cm)	%
VANO 1				
0	1.075	1.070	0.005	0.47%
1.36	0.817	0.820	0.003	0.37%
2.72	0.635	0.640	0.005	0.79%
4.08	0.558	0.560	0.002	0.36%
5.44	0.547	0.550	0.003	0.55%
VANO 2				
0	0.547	0.550	0.003	0.55%
1.02	0.539	0.540	0.001	0.19%
2.04	0.540	0.540	0.000	0.00%
3.06	0.567	0.570	0.003	0.53%
4.08	0.619	0.620	0.001	0.16%
VANO 3				
0	0.619	0.620	0.001	0.16%
1.02	0.688	0.690	0.002	0.29%
2.04	0.793	0.790	0.003	0.38%
3.06	0.950	0.950	0.000	0.00%
4.08	1.152	1.150	0.002	0.17%

Fuente: Ana Sánchez

Tabla 24: Cuadro comparativo de los momentos (tres vanos)

DISTANCIA x (m)	MOMENTO M (Tn-m)		DIFERENCIA	
	MÉTODO MANUAL	APLICACIÓN DESARROLLADA	CANTIDAD (cm)	%
VANO 1				
0	21.290	21.2900	0.000	0.00%
1.36	-75.210	-75.2097	0.000	0.00%
2.72	-98.464	-98.4638	0.000	0.00%
4.08	-64.430	-64.4285	0.002	0.00%
5.44	19.729	19.7287	0.000	0.00%
VANO 2				
0	37.789	37.7887	0.000	0.00%
1.02	-16.545	-16.5448	0.000	0.00%
2.04	-43.866	-43.8658	0.000	0.00%
3.06	-44.063	-44.0631	0.000	0.00%
4.08	-15.796	-15.7948	0.001	0.01%
VANO 3				
0	0.975	0.9752	0.000	0.03%
1.02	-60.795	-60.7944	0.001	0.00%
2.04	-87.984	-87.9831	0.001	0.00%
3.06	-75.283	-75.9831	0.700	0.93%
4.08	-14.841	-14.8400	0.001	0.01%

Fuente: Ana Sánchez

Tabla 25: Cuadro comparativo de los cortantes (tres vanos)

DISTANCIA x (m)	CORTANTE V (Tn)		DIFERENCIA	
	MÉTODO MANUAL	APLICACIÓN DESARROLLADA	CANTIDAD (cm)	%
VANO 1				
0	-103.200	-103.2000	0.000	0.00%
1.36	-41.547	-41.5474	0.000	0.00%
2.72	5.366	5.3662	0.000	0.00%
4.08	43.849	43.8483	0.001	0.00%
5.44	79.815	79.8150	0.000	0.00%
VANO 2				
0	-66.635	-66.6350	0.000	0.00%
1.02	-39.973	-39.9724	0.001	0.00%
2.04	-13.594	-13.5939	0.000	0.00%

3.06	13.426	13.4264	0.000	0.00%
4.08	42.436	42.4362	0.000	0.00%
VANO 3				
0	-76.274	-76.2738	0.000	0.00%
1.02	-44.289	-44.2882	0.000	0.00%
2.04	-8.170	-8.1695	0.000	0.00%
3.06	34.363	34.3625	0.000	0.00%
4.08	85.810	85.8100	0.000	0.00%

Fuente: Ana Sánchez

Tabla 26: Cuadro comparativo de los giros (tres vanos)

DISTANCIA x (m)	GIRO G (rad)		DIFERENCIA	
	MÉTODO MANUAL	APLICACIÓN DESARROLLADA	CANTIDAD (cm)	%
VANO 1				
0	-0.0020	-0.0020	0.000	0.00%
1.36	-0.0017	-0.0017	0.000	0.00%
2.72	-0.0009	-0.0009	0.000	0.00%
4.08	-0.0002	-0.0002	0.000	0.01%
5.44	-0.00003	-0.00003	0.000	0.00%
VANO 2				
0	-0.000026	-0.0000264	0.000	0.00%
1.02	-0.000078	-0.0000776	0.000	0.01%
2.04	0.000121	0.0001212	0.000	0.00%
3.06	0.000405	0.0004046	0.000	0.00%
4.08	0.000603	0.0006030	0.000	0.00%
VANO 3				
0	0.00060	0.0006	0.000	0.00%
1.02	0.00080	0.0008	0.000	0.00%
2.04	0.00128	0.0013	0.000	1.56%
3.06	0.00180	0.0018	0.000	0.00%
4.08	0.00210	0.0021	0.000	0.00%

Fuente: Ana Sánchez

Tabla 27: Cuadro comparativo de las presiones (tres vanos)

DISTANCIA x (m)	PRESIÓN Pr (Tn/m ²)		DIFERENCIA	
	MÉTODO MANUAL	APLICACIÓN DESARROLLADA	CANTIDAD (cm)	%
VANO 1				
0	13.974	13.9739	0.000	0.00%
1.36	10.615	10.6153	0.000	0.00%
2.72	8.255	8.2551	0.000	0.00%
4.08	7.249	7.2485	0.000	0.01%
5.44	7.112	7.1123	0.000	0.00%
VANO 2				
0	7.112	7.1123	0.000	0.00%
1.02	7.007	7.0066	0.000	0.01%
2.04	7.017	7.0170	0.000	0.00%
3.06	7.365	7.3654	0.000	0.01%
4.08	8.053	8.0526	0.000	0.00%
VANO 3				
0	8.053	8.0526	0.000	0.00%
1.02	8.943	8.9429	0.000	0.00%
2.04	10.304	10.3036	0.000	0.00%
3.06	12.352	12.3522	0.000	0.00%
4.08	14.980	14.9801	0.000	0.00%

Fuente: Ana Sánchez

4.3 VERIFICACIÓN DE HIPÓTESIS

Según la hipótesis planteada en el presente proyecto “El desarrollo de una aplicación basada en MATLAB si influye en el tiempo de cálculo de cimentaciones sobre un lecho elástico”. Se llega a determinar que es verdadera dicha hipótesis, puesto que al disponer de una aplicación (programa) ayuda significativamente al cálculo de las vigas de cimentación sobre lecho elástico en menor tiempo, a la vez que se obtiene resultados con más precisión. Debido a que al realizar el cálculo de forma manual puede ocurrir errores tales como: la incorrecta digitación de valores, el cambio involuntario de signos, etc., provocando así un resultado erróneo.

CAPÍTULO V

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

5.1 CONCLUSIONES

- ❖ Debido a que las cimentaciones son parte esencial de las estructuras, se debe asegurar que las mismas se comporten adecuadamente para las diferentes condiciones a las que esté sometida.
- ❖ Los resultados de los desplazamientos obtenidos mediante la resolución manual y los obtenidos por medio de la aplicación desarrollada, tienen un porcentaje de error menor al 1%, por lo cual se deduce que el uso de la aplicación es confiable y válida.
- ❖ Los resultados de los momentos, cortantes, giros y presiones obtenidos mediante la resolución manual y los obtenidos por medio de la aplicación desarrollada, tienen un porcentaje de error entre el 0.01% al 1.5%, éste rango de error es permitido por lo cual se deduce que el uso de la aplicación es confiable y válida.
- ❖ Mediante de ciertos datos geométricos de la viga de cimentación y un estudio preliminar de suelos, se puede realizar el cálculo para obtener parámetros de comportamiento entre el suelo y la cimentación; de tal forma que se pueda analizar y validar las dimensiones de la misma.
- ❖ Para el cálculo de vigas sobre lecho elástico, se utiliza el cálculo matricial y el Coeficiente de Balasto, permitiendo así la realización de una representación del comportamiento del suelo aproximado.
- ❖ Se debe tener en cuenta que los valores de las presiones no deben ser negativos puesto que el suelo no trabaja a tracción por lo que deberá ser menor o igual a la presión admisible del suelo (q_{adm}).

- ❖ Una vez realizado el chequeo de la presión transmitida al suelo, la siguiente etapa es la del diseño. La aplicación desarrollada en el presente proyecto, trabaja con cargas de servicio, por lo que los momentos obtenidos son de servicio. Para que sean cargas últimas (de diseño) dichas cargas deben ser mayoradas según lo establecido en el Código.
- ❖ El uso de la aplicación desarrollada para calcular vigas de cimentación sobre lecho elástico acelera el proceso de cálculo y así obtener resultados de una forma rápida y confiable, disminuyendo el riesgo de cometer errores al realizarlos manualmente.
- ❖ Luego de analizar los resultados obtenidos por medio de la aplicación desarrollada y manualmente, se ha verificado que existe correspondencia entre dichos resultados debido a que el porcentaje de error no es tan alto, pero en el segundo caso el proceso es más laborioso y complejo.
- ❖ La importancia de implementar programas dentro de la Carrera de Ingeniería Civil es vital para complementar la formación de los futuros profesionales, para que así posean un nivel de competitividad más alto y puedan enfrentar distintos casos de cimentaciones que se pueden dar en los diferentes tipos de suelos.

5.2 RECOMENDACIONES

- ❖ Se recomienda el uso de las aplicaciones desarrolladas (programas) para acelerar los procesos de cálculo y así reducir el tiempo que toma en realizarlos manualmente.
- ❖ Se recomienda que el usuario posea conocimientos básicos de cimentaciones, para que al momento de ingresar los datos al programa lo haga con criterio ingenieril, así mismo para analizar los resultados obtenidos.
- ❖ Leer el manual de usuario para el correcto uso de la aplicación.

C. MATERIALES DE REFERENCIA

1. BIBLIOGRAFÍA

[1] R. Araujo. J. Peralta. “DISEÑO SIMPLIFICADO DE UN SISTEMA DE FUNDACIONES SUPERFICIALES SOBRE LECHO ELÁSTICO”. Tesis Grado, Universidad Rafael Urdaneta, Maracaibo - Venezuela, 2004.

[2] J. Olmedo. “Implementación de programas computacionales para el cálculo y diseño de cimentaciones superficiales Aplicación al cálculo de edificios”. Tesis Grado, Universidad Central del Ecuador, Quito - Ecuador, 2013.

[3] J. Caizachana. “Implementación de programas computacionales para el cálculo y diseño de cimentaciones profundas. Aplicación al cálculo de edificios”. Tesis Grado, Universidad Central del Ecuador, Quito - Ecuador, 2013.

[4] L. Garza. Diseño de estructuras de cimentación de acuerdo a NSR-10. [On-line]. Disponible: http://www.unalmed.edu.co/~lgarza/cimentaciones/NDEC_SE.pdf [Febrero 18,2017].

[5] R. Peck. W. Hanson. T. Thornburn. “Factores que determinan el tipo de cimentación” en Ingeniería de Cimentaciones, México, Editorial LIMUSA, 2009, pp.303-305

[6] M. Tomlinson. “Cimentaciones - Diseño Y Construcción”, México, Editorial TRILLAS, 1996, pp. 155-160

[8] J. Berrocal. “Métodos Analíticos y Numéricos Aplicados al Diseño de Cimentaciones Superficiales Considerando su Interacción con el Suelo”, Tesis Maestría, Universidad Nacional de Ingeniería, Lima - Perú, 2013.

- [9] J. Curvelo. “Análisis y Diseño de Fundaciones”, [On-line]. Disponible: <https://es.scribd.com/document/282526258/Analisis-y-Diseao-de-Fundaciones-12>, Mayo 2015, [Mayo 25,2017].
- [10] R. Aguiar. (2015, Junio 3). “Análisis Estático de Estructuras”, (1^{era} Edición). [On-line]. Disponible: www.civilgeeks.com [Junio 12, 2017].
- [11] C. Magdaleno. “Diseño de Cimentaciones”. Internet: https://es.slideshare.net/adanvazquezrodriguez54/diseo-de-cimentaciones-carlos-magdaleno?qid=ccd9020e-2f3d-45c8-a837-be51eda63cbc&v=&b=&from_search=1 [Junio 16, 2017]
- [12] A. Leoni. “Apuntes de Coeficiente de Balasto”. Internet: <https://es.scribd.com/document/16427158/Coeficientes-de-Balastro> [Junio 16, 2017]
- [13] D. O. Barragán Guerrero, “Manual de Interfaz Gráfica de Usuario en Matlab”, [On-line] Disponible: https://www.dspace.espol.edu.ec/bitstream/123456789/10740/11/MATLAB_GUIDE.pdf. [Junio 01, 2017].

2. ANEXOS

MANUAL DE USUARIO

CIMELASTIC

CÁLCULO DE VIGAS DE CIMENTACIÓN SOBRE MEDIOS ELÁSTICOS

1. INICIO DEL PROGRAMA



2. Dar clic en *EMPEZAR*, aparecerá una nueva ventana
3. Llenar los datos correspondientes

CIMELASTIC

INGRESO DE DATOS

Número de tramos: (n)

Longitud total de la viga: (L) m

Módulo de Elasticidad: (E) Tn/m²

Coefficiente de Balasto: (K) Tn/m³

Grados de Libertad: (#GDL)

Base de la sección transversal de la viga: (B) m

Altura de la sección transversal de la viga: (H) m

4. Dar clic en *CALCULAR* y llenar los valores de longitud (en caso de 2 o más vanos), carga y momento actuantes en los nudos y el número de discretización

INGRESO DE VALORES

VANO	LONGITUD (m)
1	10

PUNTO	MOMENTO (Tn/m)	CARGA (Tn)
1	9	-110
2	10	-100

Número de discretizaciones para cada vano

5. Dar clic en **CALCULAR**

The screenshot shows the 'VanosCargasMomentos' application window. At the top, there are navigation buttons: 'REGRESAR', 'CALCULAR' (highlighted with a red box), 'OPCIONES', and 'AYUDA'. The main area is divided into two sections:

- INGRESO DE VALORES:** Contains a table for defining spans and a section for point loads.

VANO	LONGITUD (m)
1	10

PUNTO	MOMENTO (Tn·m)	CARGA (Tn)
1	9	-110
2	10	-100

Below this is a field for 'Número de discretizaciones para cada vano' with a value of 5.
- CUADRO DE RESULTADOS:** A table showing the results of the calculation for each span.

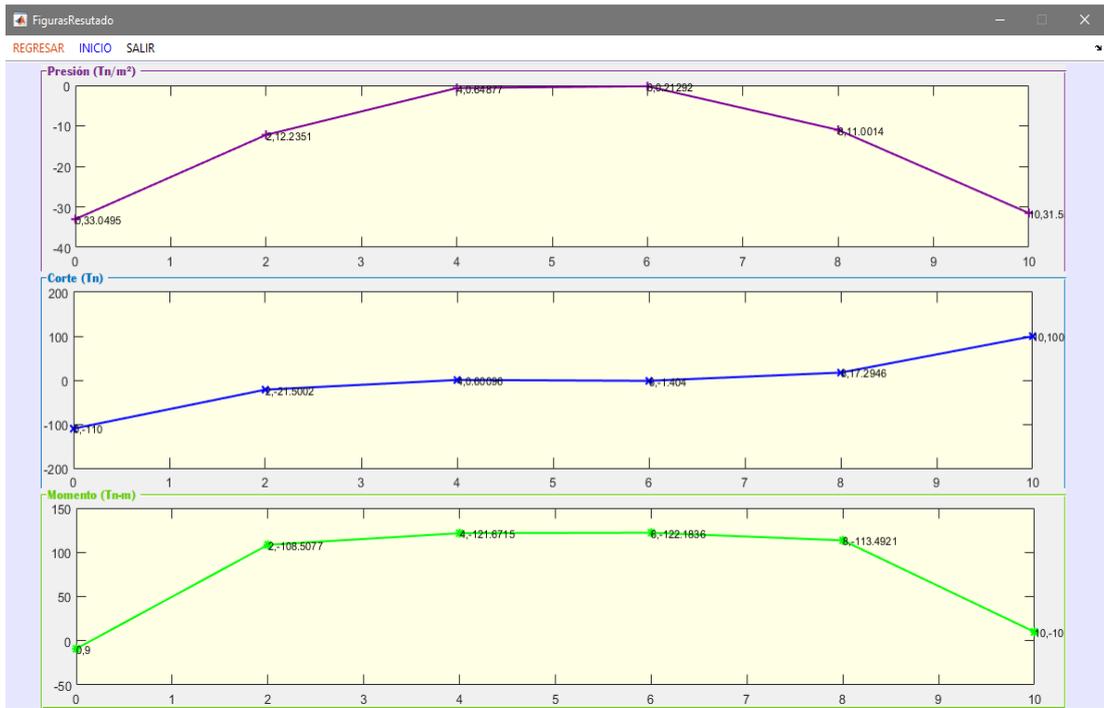
6. Aparecerá el **CUADRO DE RESULTADOS**

CUADRO DE RESULTADOS									
#VANO	DISTANCIA x (m)	DISTANCIA REAL (m)	DESPLAZAMIENTO y (m)	GIRO G (rad)	MOMENTO M (Tn·m)	CORTANTE V (Tn)	PRESIÓN Pr (Tn/m ²)		
1	0	0	0.0275	-0.0095	9.0000	-110.0000	33.0495		
1	2	2	0.0102	-0.0071	-108.5077	-21.5002	12.2351		
1	4	4	5.4064e-04	-0.0025	-121.6715	0.6010	0.6488		
1	6	6	1.7743e-04	0.0022	-122.1836	-1.4040	0.2129		
1	8	8	0.0092	0.0068	-113.4921	17.2946	11.0014		
1	10	10	0.0263	0.0097	-10.0000	100.0000	31.5522		

7. Para observar las gráficas, seguir la siguiente secuencia:

OPCIONES → **GRAFICAR**

Se desplegará la siguiente ventana con los respectivos diagramas de



8. Para observar el cuadro de resultados de los Momentos y calcular las áreas de acero según el momento mayor de cada tramo, seguir la siguiente secuencia: **OPCIONES** → **AREAS DE ACERO**
 Se desplegará la siguiente ventana, en donde se debe llenar los siguientes datos. Luego dar clic en **CALCULAR**.

Areasdeacero

REGRESAR INICIO

# VANO	MOMENTO
1	9.0000
1	-108.5077
1	-121.6715
1	-122.1836
1	-113.4921
1	-10.0000

Ingresar el mayor Momento de cada tramo: Tn-m

Ingresar f'c: Kg/cm²

Ingresar el recubrimiento: cm

MOMENTO	M (Tn-m)	As (cm²)
1	183.2754	139.1813

CALCULAR **LIMPIAR**

SALIR