

UNIVERSIDAD TÉCNICA DE AMBATO



FACULTAD DE INGENIERÍA EN SISTEMAS, ELECTRÓNICA E INDUSTRIAL

MAESTRÍA EN FÍSICA APLICADA, MENCIÓN FÍSICA COMPUTACIONAL

Tema: “INVARIANTES GEOMÉTRICOS DE LOS TENSORES DE GRADIENTE DE CAMPO MAGNÉTICO Y GRADIENTE DE VELOCIDAD EN SIMULACIONES DE PLASMAS ESPACIALES TURBULENTOS”

Trabajo de Titulación, previo a la obtención del Grado Académico de Magíster en Física Aplicada, mención Física Computacional

Modalidad de titulación Proyecto de Desarrollo

Autora: Dra. Myrian Cecilia Borja Saavedra.

Director: Fís. Christian Leonardo Vásquez Vega, PhD.

Ambato-Ecuador

2022

APROBACIÓN DEL TRABAJO DE TITULACIÓN

La Unidad Académica de Titulación de la Facultad de Ingeniería en Sistemas, Electrónica e Industrial.

El Tribunal receptor de la Defensa del Trabajo de Titulación presidido por la Ingeniera Elsa Pilar Urrutia Magíster, e integrado por los señores: Biofísico Cristian Isaac Vacacela Gómez PhD, Doctor. Jaime Rodrigo Guilcapi Mosquera Magíster, designados por la Unidad Académica de Titulación de la Universidad Técnica de Ambato, para receptar el Trabajo de Titulación con tema: “INVARIANTES GEOMÉTRICOS DE LOS TENSORES DE GRADIENTE DE CAMPO MAGNÉTICO Y GRADIENTE DE VELOCIDAD EN SIMULACIONES DE PLASMAS ESPACIALES TURBULENTOS” elaborado y presentado por la señora, Doctora Myrian Cecilia Borja Saavedra, para optar por el Grado Académico de Magíster en Física Aplicada, mención Física Computacional; una vez escuchada la defensa oral del Trabajo de Titulación el Tribunal aprueba y remite el trabajo para uso y custodia en las bibliotecas de la Universidad Técnica de Ambato.

Ing. Elsa Pilar Urrutia Urrutia. Mg
Presidente y Miembro del Tribunal de Defensa

Biof. Cristian Isaac Vacacela Gómez, PhD.
Miembro del Tribunal de Defensa

Dr. Jaime Rodrigo Guilcapi Mosquera. Mg.
Miembro del Tribunal de Defensa

AUTORÍA DEL TRABAJO DE TITULACIÓN

La Responsabilidad de las opiniones, comentarios y críticas emitidas en el Trabajo de Titulación presentado con tema: “INVARIANTES GEOMÉTRICOS DE LOS TENSORES DE GRADIENTE DE CAMPO MAGNÉTICO Y GRADIENTE DE VELOCIDAD EN SIMULACIONES DE PLASMAS ESPACIALES TURBULENTOS”, le corresponde exclusivamente a la: Dra. Myrian Cecilia Borja Saavedra, autora bajo la dirección del Fís. Christian Leonardo Vásquez Vega, PhD, Director del Trabajo de Titulación; y el patrimonio intelectual a la Universidad Técnica de Ambato.

Dra. Myrian Cecilia Borja Saavedra

AUTORA

Fís. Christian Leonardo Vásquez Vega, PhD

DIRECTOR

DERECHOS DE AUTOR

Autorizo a la Universidad Técnica de Ambato, para que el Trabajo de Titulación, sirva como documento disponible para su lectura, consulta y proceso de investigación, según las normas de la Institución.

Cedo los Derechos de mi Trabajo de Titulación, con fines de difusión pública, además apruebo la reproducción de este, dentro de las regulaciones de la Universidad Técnica de Ambato.

Dra. Myrian Cecilia Borja Saavedra
C.I. 0602086720

ÍNDICE GENERAL

Contenido	Pág.
PORTADA	1
APROBACIÓN DEL TRABAJO DE TITULACIÓN	ii
AUTORÍA DEL TRABAJO DE TITULACIÓN	iii
DERECHOS DE AUTOR	iv
ÍNDICE DE FIGURAS	viii
AGRADECIMIENTO	x
DEDICATORIA	xi
RESUMEN EJECUTIVO	xii
<i>EXECUTIVE SUMMARY</i>	xiv
<i>CAPÍTULO I</i>	1
El Problema de la Investigación	1
1.1. Introducción	1
1.2. Justificación	3

1.3.	Objetivo general	4
1.4.	Objetivos específicos	4
<i>CAPÍTULO II</i>		5
Antecedentes Investigativos.....		5
2.1.	Características Físicas del Viento solar	6
2.2.	Física del plasma	9
2.3.	Magnetohidrodinámica.....	14
2.4.	Ondas de Alfvén	16
2.5.	Variables de Elsässer	17
2.6.	Corrección Hall a la Magnetohidrodinámica	17
2.7.	Espectros de Energía, Funciones de Distribución y Funciones de Estructura...	18
2.8.	Ley de Escalas de Kolmogorov.....	20
2.9.	Tensor Gradiente de Velocidad	22
2.10.	Dinámica de la Ecuación de Euler Restringida	26
2.11.	Invariantes Geométricos	27
<i>CAPÍTULO III</i>		32

Marco Metodológico	32
3.1. Ubicación.....	32
3.2. Equipos y Materiales	32
3.3. Tipo de investigación	32
3.3.1. Investigación Bibliográfica.....	32
3.3.2. Investigación Aplicada	33
3.4. Recolección de información	33
3.5. Metodología numérica y algoritmos	33
<i>CAPÍTULO IV</i>	38
Resultados y Discusión.....	38
4.1. Cálculo de invariantes en simulaciones numéricas	38
<i>CAPÍTULO V</i>.....	52
Conclusiones y Recomendaciones	52
5.1. Conclusiones	52
5.2. Recomendaciones	53
BIBLIOGRAFÍA	54

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 2.1	Esquema de la estructura solar. Vazquez Axotla [1].....	7
Figura 2.2	Viento Solar en las cercanías de la Tierra. Vazquez Axotla [1].....	9
Figura 4.1	Mapas bidimensionales de los parámetros P (parte izquierda) asociados al campo de velocidades	40
Figura 4.2	Mapas bidimensionales de los parámetros P (parte izquierda) y Q (parte derecha) asociados al campo magnético	41
Figura 4.3	PDF del mapa(Q-R), asociado al campo de velocidades 2D	42
Figura 4.4	PDF del mapa (Q-R), asociado al campo magnético 2D	42
Figura 4.5	Función de densidad de distribución del ángulo θ entre la vorticidad y el vector propio del estado de velocidad de deformación, a través de S^* (parte superior) y $\cos(\theta)$ (parte inferior). Simulación 2D	43
Figura 4.6	Relación espacial entre S_u (parte izquierdo), S^* (parte del medio) y $\cos(\theta)$ (parte derecho). Simulación 2D.....	44
Figura 4.7	Cortes transversales en las direcciones $x = 1$ (fila inferior), $y = 1$ (fila intermedia) y $z = 1$ (fila superior) de los invariantes Q_u y R_u , relacionados con la velocidad	47
Figura 4.8	PDF del mapa (Q-R), asociado al campo de velocidades 3D	48
Figura 4.9	PDF del mapa (Q-R), asociado al campo magnético 3D	48
Figura 4.10	Cortes transversales en las direcciones $x = 1$ (fila inferior), $y = 1$ (fila intermedia) y $z = 1$ (fila superior) de los invariantes Q_b y R_b , relacionados	

con el campo magnético..... 49

Figura 4.11 Función de densidad de distribución del ángulo θ entre la vorticidad y el vector propio del estado de velocidad de deformación, a través de S^* (parte superior) y $\cos(\theta)$ (parte inferior). Simulación 3D 50

Figura 4.12 Relación espacial entre S_u (parte izquierda), S^* (parte del medio) y $\cos(\theta)$ (parte derecha). Simulación 3D..... 51

AGRADECIMIENTO

En primer lugar, agradezco a Dios por guiarme en todo momento y permitirme llegar a esta instancia tan anhelada en mi vida.

A mi madre que con su infinito amor desde el cielo me ha acompañado todo el tiempo.

A mi querida familia por estar pendientes y creer siempre en mí y brindarme en todo momento la mano y las palabras necesarias para seguir adelante.

A todos los docentes de la maestría por proporcionarme sus valiosos conocimientos en cada una de las asignaturas que impartieron en cada módulo, en especial al Fís. Christian Leonardo Vásquez Vega, PhD por su tiempo y guía en este proceso de titulación.

Dra. Myrian Cecilia Borja Saavedra

DEDICATORIA

La presente tesis dedico en primer lugar a Dios por ser siempre mi fortaleza y guía para no desmayar y luchar en la consecución de mis objetivos.

A mi querido esposo Freddy Benalcázar por su amor consejo y apoyo, en todo tiempo al estar pendiente en cada momento de mi vida.

A mis hijos Freddy Israel, Nataly Cecilia y Lisbeth Carolina por su amor y apoyo condicional por ser el motor constante y darme el ánimo para no desmayar y continuar creciendo profesionalmente.

A mis padres políticos Manuel y Clara, por estar pendientes y creer siempre en mí y brindarme en todo momento la mano y las palabras necesarias para seguir adelante.

Dra. Myrian Cecilia Borja Saavedra

UNIVERSIDAD TÉCNICA DE AMBATO
FACULTAD DE INGENIERÍA EN SISTEMAS DE ELECTRÓNICA E
INDUSTRIAL
MAESTRÍA EN FÍSICA APLICADA MENCIÓN FÍSICA
COMPUTACIONAL

TEMA:

“INVARIANTES GEOMÉTRICOS DE LOS TENSORES DE
GRADIENTE DE CAMPO MAGNÉTICO Y GRADIENTE DE
VELOCIDAD EN SIMULACIONES
DE PLASMAS ESPACIALES TURBULENTOS”

AUTORA: Dra. Myrian Cecilia Borja Saavedra.

DIRECTOR: Fís. Christian Leonardo Vásquez Vega. PhD.

LÍNEA DE INVESTIGACIÓN: Energías renovables y desarrollo sostenible

FECHA: 17 de junio del 2022.

RESUMEN EJECUTIVO

En el marco de las percepciones de las extensas observaciones in situ del viento solar, donde se observa una extensa cantidad de fluctuaciones en los campos magnético y de velocidad en el plano transversal del campo magnético guía, una mejor comprensión de la aparición de tales fluctuaciones intermitentes requiere el análisis sistemático, e.g., del tensor gradiente de velocidad y campo magnético. Este tensor proporciona información detallada sobre las características geométricas espaciales de las fluctuaciones observadas, y su evolución con la escala, mediante sus tres invariantes P, Q y R. Invariantes que describen el exceso local de turbulencia sobre la velocidad de deformación y la auto amplificación sobre la producción de energía en un flujo incomprensible. La función de densidad de probabilidad conjunta entre Q y R tiene formas autosimilares de “lágrima” en flujos turbulentos completamente desarrollados. La implementación de los códigos numéricos es probada en simulaciones bidimensional y tridimensional de plasmas espaciales, y llevadas a cabo con diferentes esquemas numéricos. Los resultados obtenidos son de gran importancia para el estudio de estos sistemas altamente complejos.

Descriptores: Plasma Solar, Turbulencia, Invariantes Geométricos.

UNIVERSIDAD TÉCNICA DE AMBATO
FACULTAD DE INGENIERÍA EN SISTEMAS DE ELECTRÓNICA E
INDUSTRIAL
MAESTRÍA EN FÍSICA APLICADA MENCIÓN FÍSICA
COMPUTACIONAL

THEME:

“GEOMETRIC INVARIANTS OF GRADIENT TENSORS
OF MAGNETIC FIELD AND GRADIENT
OF VELOCITY IN SIMULATIONS
OF TURBULENT SPACE PLASMAS”

AUTHOR: Dra. Myrian Cecilia Borja Saavedra.

DIRECTED BY: Fís. Christian Leonardo Vásquez Vega. PhD.

RESEARCH LINE: Renewable energies and sustainable development.

DATE: JUNE 17, 2022

EXECUTIVE SUMMARY

Within the framework of perceptions from extensive in situ observations of the solar wind, where an extensive amount of fluctuations in magnetic fields and velocity are observed in the transverse plane of the magnetic field, guides a better understanding of the appearance of such intermittent fluctuations which requires systematic analysis of the velocity gradient tensor and magnetic field. This tensor provides detailed information on the spatial geometric characteristics of the observed fluctuations and their evolution with the scale, through its three invariants P, Q and R; invariants describing the local excess of turbulence over strain rate and self-amplification over energy production in incompressible flow. The joint probability density function between Q and R has self-similar “teardrop” shapes in fully developed turbulent flows. The implementation of the numerical codes was tested in two-dimensional and three-dimensional simulations of space plasmas, and they were carried out with different numerical schemes. The results obtained are of great importance for the study of these highly complex systems.

Keywords: Solar Plasma, Turbulence, Geometric Invariant

CAPÍTULO I

El Problema de la Investigación

1.1. Introducción

El plasma es el estado de la materia que se alcanza al ionizar totalmente un gas. Esta ionización genera campos eléctricos y magnéticos internos debido al movimiento de los iones. El medio interplanetario tiene un flujo de plasma originado en el Sol. Este plasma espacial incluye un campo magnético guía, que se expande radialmente desde su fuente e interacciona con aquellos producidos localmente, así como con aquellos generados por los planetas del Sistema Solar. Entonces, el sistema dinámico de este medio es altamente no lineal y complejo [3].

La energía inyectada en el Sistema Solar desde el Sol se disipa en el viento solar mediante un sin número de mecanismos, desde las grandes escalas (magnetohidrodinámicas), a través de las escalas cinéticas (al final del rango inercial) y hasta las escalas de disipación. En las cercanías de la tierra, el viento solar es constantemente monitoreado y se ha caracterizado por ser un plasma cuasi no colisional, altamente variable, estructurado y totalmente turbulento [4, 5]. La aproximación magnetohidrodinámica (MHD) describe la fenomenología del plasma a grandes escalas.

En este acercamiento, el comportamiento tipo Kolmogorov ha sido altamente sustentado por observaciones de las fluctuaciones del campo magnético y de velocidades, que presentan un espectro que sigue una ley de potencia [6], así como intermitencia [5]. A las escalas MHD se ha visto que el viento solar muestra estadísticas no Gaussianas, dependientes de la escala de medición [7], con fluctuaciones no Gaussianas también observadas en las grandes escalas [8], tal como sucede en los fluidos anisotrópicos en los que se propagan ondas [9].

Los estudios de plasmas espaciales iniciaron con la caracterización de sus propiedades espectrales, el alejamiento de sus magnitudes medibles desde las estadísticas Gaussianas, la investigación de la intermitencia, características de escala y anisotropía, tanto desde el punto de

vista teórico como desde las observaciones in situ [10, 3]. Desde el punto de vista de las observaciones in situ, los estudios se basan principalmente en la investigación de las fluctuaciones de los parámetros del plasma espacial y las componentes del campo magnético, con una consideración Euleriana. Sin embargo, para una mejor comprensión de la aparición de tales fluctuaciones se requiere del análisis sistemático del tensor gradiente de velocidad $A_{ij} = \partial i u_j$, así como del tensor gradiente de campo magnético $Z_{ij} = \partial i b_j$, parámetros que podrían ayudarnos a proveer de información detallada de las características geométricas espaciales de las fluctuaciones observadas y su evolución con las escalas.

En el marco del estudio de la dinámica de fluidos, hay un considerable interés en entender el papel de las fluctuaciones del tensor instantáneo de gradiente de velocidad A_{ij} , que contribuye significativamente a la disipación de la energía cinética [11]. Más aún, el conocimiento de este tensor podría proveer información sobre la estructura de las pequeñas escalas y su dinámica, así como la ocurrencia de autoestirable (self-stretching), que se ha sugerido que sea el responsable de la generación de fluctuaciones de pequeña y grande escala [11, 12, 13] y podría estar asociada con la transferencia de energía entre los vórtices pequeños y grandes en un plasma turbulento.

En estos últimos años [14], intentaron evaluar el tensor de gradiente de velocidad y sus invariantes geométricos representados por P, Q y R; los cuales indican el exceso local de turbulencia sobre la velocidad de deformación y el exceso de producción de velocidad de deformación local utilizando los datos de los satélites Clúster de la Agencia Espacial Europea (ESA). Los invariantes permiten una caracterización detallada de la dinámica, geometría y topología del flujo, del plasma solar, insinuando (cuando se conservan) que todos los puntos del flujo se caracterizan por una disipación irrotacional. Los invariantes describen el comportamiento del fluido en forma de lágrima cuando no ha entrado a una región turbulenta. El presente trabajo de investigación se concentrará en realizar comparaciones entre las estadísticas conjuntas P (R, Q) de los invariantes geométricos de gradiente de velocidad y de campo magnético en simulaciones bi y tridimensionales de plasmas espaciales, con características turbulentas.

Este documento está organizado de la siguiente manera. En el Capítulo 1 se presenta la introducción, justificación y objetivos, en el Capítulo 2 se realiza un exhaustivo análisis matemático para la deducción de las formas de los invariantes en sistemas de plasmas

turbulentos. La metodología de este trabajo de investigación se detalla en el Capítulo 3, la cual se basa en algoritmos que calculan los invariantes mencionados a través de simulaciones numéricas de plasmas. Los códigos bidimensionales son probados en simulaciones no lineales, mientras que los códigos tridimensionales, implementados enteramente en este trabajo, fueron aplicados en una simulación de plasma en estado cuasi turbulento. Estos resultados y discusión son presentados en el Capítulo 4. El Capítulo 5 contiene las conclusiones y recomendaciones a las que se llegó con el desarrollo del presente trabajo.

1.2. Justificación

A finales del siglo pasado el estudio de la turbulencia en el espacio interplanetario adquirió una gran importancia dentro de la comunidad científica. Los más de 40 años de investigación han permitido alcanzar un amplio conocimiento de estos procesos. El plasma espacial, emana continuamente desde el Sol en todas las direcciones hacia el medio interplanetario, se encuentra en un estado completamente turbulento desde su origen y en su camino a través de él se describe utilizando la magnetohidrodinámica hacia las escalas cinéticas a través de varios mecanismos conocidos como variaciones energéticas, y otros que actualmente, se encuentran en discusión. Por años 90 del siglo pasado, evaluaron el tensor de gradiente de velocidad y sus invariantes geométricas utilizando los datos de los satélites Clúster de la Agencia Espacial Europea (ESA), los cuales permiten tener una visión amplia del comportamiento de los fluidos turbulentos, así como las fuerzas aplicadas sobre ellos que generan rotaciones, estiramientos y deformaciones angulares sobre los mismos. A principios del siglo 21, este estudio fue ampliado por las estadísticas de los invariantes geométricos del tensor de gradiente del campo magnético granulado, utilizando mediciones de campo magnético de la misma misión espacial, cuando se encontraba en la región del viento solar. Es claro que, en el pasado, el estudio del plasma turbulento se dirigía principalmente a la caracterización de sus propiedades espectrales, es decir, el alejamiento desde las estadísticas Gaussianas en las pequeñas escalas y la investigación de la intermitencia, características de escala y anisotropía, tanto desde el punto de vista teórico como desde las observaciones in situ. El interés actual en el tema es de alta relevancia, por sus consecuencias, especialmente en la Física Espacial. La relevancia de la temática en nuestro país no tiene la fuerza que en otros países considerando que el estudio y la investigación en clima espacial y su afectación local necesita un impulso para su desarrollo.

1.3. Objetivo general

Desarrollar las estadísticas conjuntas de los invariantes geométricas de los gradientes de velocidad y de campo magnético en simulaciones numéricas de plasmas turbulentos.

1.4. Objetivos específicos

- Recopilar información del comportamiento de plasmas turbulentos.
- Construir una simulación numérica tridimensional de plasmas turbulentos para el análisis de los invariantes geométricas y el cálculo de sus estadísticas conjuntas.
- Analizar los resultados estadísticos obtenidos de las invariantes geométricas y compararlos con aquellos encontrados en observaciones in-situ del viento solar.
- Validar el modelo desarrollado para el estudio de las invariantes geométricas de los tensores de gradiente de campo magnético y gradiente de velocidad de plasmas espaciales turbulentos.

Capítulo II

Antecedentes Investigativos

Experimentalmente, las escalas más pequeñas presentes en flujos turbulentos se aproximan bastante bien a estadísticas homogéneas e isotrópicas [15, 16]. Actualmente, hay mucha evidencia que sugiere que el estudio de estas escalas finas depende de los invariantes del tensor gradiente de velocidad, que está compuesto por dos tensores conocidos como el tensor de deformación y el tensor de vorticidad. Los primeros estudios que se realizaron sobre la evolución del tensor gradiente de velocidad se remontan a finales del siglo anterior, como en los trabajos de [17], un modelo de interacción local entre la vorticidad y deformación cortante en un fluido incompresible. Este modelo se obtuvo a partir de la ecuación de Euler, para estudiar una posible singularidad en un tiempo finito de un elemento de fluido., [12], en su trabajo sobre el movimiento interno de un elemento de fluido, como la vorticidad, y reflexión estableciendo balances del momento angular y energía, y [11], quienes sugirieron un análisis de la evolución de las topologías de campo magnético desde un punto de vista lagrangiano.

La evolución del tensor gradiente de velocidad, para un elemento de fluido, se puede describir a partir de las ecuaciones de Navier-Stokes [18], que está compuesta por tres invariantes que describen la turbulencia de un fluido [19]. Estos invariantes, representados por P , Q y R se definen como los coeficientes en la ecuación característica para el tensor gradiente de velocidad [20, 21]. La primera invariante, P , está compuesto por la suma de los elementos de la diagonal principal del tensor gradiente de velocidad en su forma matricial \mathbf{A} y es igual a su traza negativa, $P = -A_{ij}$. En un flujo incompresible este invariante se anula, y el análisis de todo el sistema estará descrito mediante los invariantes Q y R [22, 23]. Por su parte, el invariante Q puede considerarse como el “exceso local” de turbulencia sobre la velocidad de deformación. El invariante R es considerado como el exceso local de producción de velocidad de deformación (auto amplificación) sobre la producción de energía (estiramiento de la vorticidad debido a la interacción entre la velocidad de deformación y la rotación). En sistemas totalmente turbulentos –isotrópica y homogénea–, la función de densidad de probabilidad conjunta entre Q y R tiene formas autosimilares de “lágrima” [24, 25, 26, 27, 28]. Esta forma ha sido estandarizada como

una característica universal de los movimientos turbulentos de escala pequeña [29, 30].

Complementariamente, [11] asumió que las derivadas cruzadas del campo de presión y la difusión viscosa eran insignificantes en la ecuación de evolución del tensor gradiente de velocidad y , por lo tanto, pudo modelar parte de la fenomenología de la turbulencia a escala finita. Más aún, [13] concluyeron que si bien este análisis de Euler restringido puede explicar ciertas características de la función de densidad de probabilidad conjunta en forma de “lágrima”.

La mayor parte de los estudios que examinan la distribución estadística de los invariantes Q y R lo han hecho en flujos turbulentos completamente desarrollados, en los que el espectro de energía cinética turbulenta es similar al espectro modelo propuesto por [31]. Sin embargo, más recientemente, [32] examinó la función de densidad de probabilidad entre el invariante Q y el invariante R en tres ubicaciones diferentes en el sentido de la densidad de corriente, arriba de la ubicación de la intensidad de máxima turbulencia, en el centro de la turbulencia máxima y hacia abajo de la ubicación. En estos casos, se observa que la forma de “lágrima” de la función de densidad de probabilidad se desarrolla gradualmente con la distancia recorrida (hacia abajo). Por su parte, [33] demostraron que, en el campo cercano del flujo, las estadísticas de dos puntos revelaron una cascada inversa de energía cinética turbulenta a lo largo de un eje atractivo inclinado en un ángulo pequeño, en relación con el sentido de la densidad de corriente. [28] demostraron que en la segunda región dentro del espacio Q - R se podría explicar la disminución de la energía debida al proceso de compresión de la vorticidad [24, 33].

Recientemente, [14] hizo un análisis de las propiedades cinéticas de las características del plasma y la interpretación de la topología $P(Q, R)$ para el tensor gradiente de velocidad. Este procedimiento fue utilizado también por [34], para el gradiente de campo magnético poniendo de manifiesto que las escalas cinéticas podrían ser responsables del alto grado de complejidad espacial del campo magnético y la velocidad a escalas pequeñas.

2.1. Características Físicas del Viento solar

En este Capítulo se presentarán características físicas generales del Sol y del plasma que se emana al medio interplanetario a través de la corona solar.

En la actualidad, el sol se encuentra en un estado de equilibrio energético. La temperatura en el núcleo provee una tasa de producción de energía nuclear que equilibra exactamente la tasa de

emisión de energía por radiación emitida en la superficie solar, manteniéndose en equilibrio mecánico donde la fuerza de explosión nuclear en el núcleo balancea la implosión debido a la autogravitación. [27, 35, 36].

El sol es una estrella de tipo G de la secuencia principal y clase de luminosidad V(cita). Se encuentra en el centro del sistema solar constituyendo la mayor fuente de radiación electromagnética, al cual pertenece nuestro planeta Tierra. Se estima que el sol se formó hace 4600 millones de años a partir de un colapso gravitacional de la materia dentro de una región de una nube molecular.

Al transcurrir el tiempo, la presión y la temperatura llegaron a ser tan altas que permitieron procesos de fusión nuclear en la región central del sol. En su estado actual tiene un diámetro que alcanza los 400000 km, una masa de $1,989 \times 10^{30}$ kg y densidad menor a la densidad de la Tierra, en una proporción de 4 a 1 [27]. El sol está compuesto por seis capas con características propias cada una de ellas, tres internas y tres externas. Como se puede apreciar en la figura (2.1), las capas internas son el núcleo, la capa radiativa y la capa convectiva. El núcleo tiene una masa de $1,989 \times 10^{29}$ kg. En esta región se producen procesos de fusión nuclear, encontrándose a temperaturas muy altas, alrededor de 15×10^6 K. La densidad del material es muy elevada y esto se debe a la alta presión a la que está sometida la masa, esto, a su vez, genera reacciones nucleares. La capa radiativa rodea al núcleo realizando un proceso de filtrado sobre las partículas y fotones que transportan la energía producida en el núcleo, que viaja en forma de radiación [37].

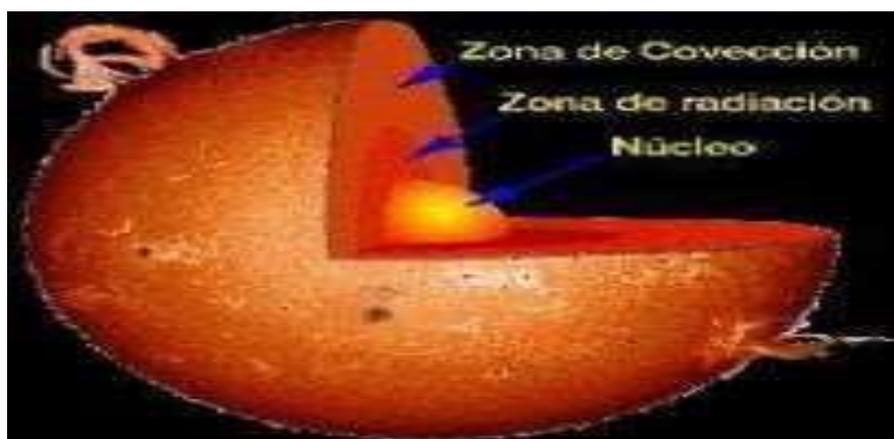


Figura 2.1: Esquema de la estructura solar.

Fuente : Vazquez Axotla [1].

Desde esta zona, la energía se transporta a las otras capas del Sol. La radiación se trasmite por

la interacción de las partículas entre sí. Algunos átomos no son alterados en esta zona, ya que la temperatura no es tan alta como en el núcleo. Pero otras partículas son capaces de absorber energía por cortos períodos de tiempo y emitirla nuevamente de un átomo a otro. Ascendiendo hasta el final de la capa, para que se cumpla este proceso. Transcurre aproximadamente 1×10^6 años. La siguiente capa es la convectiva, la temperatura desciende de 5×10^6 K a 2×10^6 K. Lo que provoca que la energía no se trasmite tan rápido como en la capa radiactiva [38].

La superficie solar está dividida en tres capas: fotosfera, cromosfera y corona solar. La fotosfera está localizada a 700000 km del centro solar. Tiene un espesor de 4000 km y es ópticamente eficiente, permitiendo a los fotones escapar a las zonas superiores. La cromosfera está formada completamente de plasma solar tiene un espesor de 2000 km y la temperatura es del orden de los 8000 K. En esta zona la densidad es muy baja, entre 10^{11} g/cm³ y 10^{17} g/cm³, con presión constante. El límite superior de la cromosfera se conoce como región de transición. Tiene un espesor de 300 km. La temperatura aumenta de 10^4 K hasta 10^6 K. Mientras que la densidad decrece de 10^{11} g/cm³ a 10^9 g/cm³, con la presión constante. La corona solar es la última capa externa, se extiende hacia el medio interplanetario. Con temperaturas y densidades de 10^6 K y 10^9 g/cm³, con presión constante. Tiene una extensión de más de 1×10^6 km y la temperatura es alrededor de 2×10^6 K [39, 4].

Las continuas explosiones solares emanadas por la corona solar se expanden por el medio interplanetario, el cual es conocido como viento solar. El viento solar mostrado en la figura (2.2) muestra a un plasma de gas muy caliente que se expande con unas velocidades mayores a 250 km/s. El plasma es un fluido eléctricamente conductor ionizado parcial o totalmente, donde las fuerzas electromagnéticas de largo alcance determinan el comportamiento colectivo y no lineal del sistema [37]. Este se forma siempre que la temperatura, o la radiación, sea lo suficientemente alta para ionizar los átomos del medio. Siendo el plasma un sistema de muchas partículas, con un número grande ellas cargadas se estima que aproximadamente el 90 % de la materia visible del universo es plasma, especialmente la materia que está dentro de las estrellas, en el medio interplanetario, en la corona solar y en las atmósferas planetarias [27]. Los complejos movimientos en la zona convectiva dan lugar a una distribución de líneas magnéticas alzándose en forma de lazos cerrados pasando la región de transición y llenando la corona solar ejerciendo fuerzas electromagnéticas sobre el plasma [40].

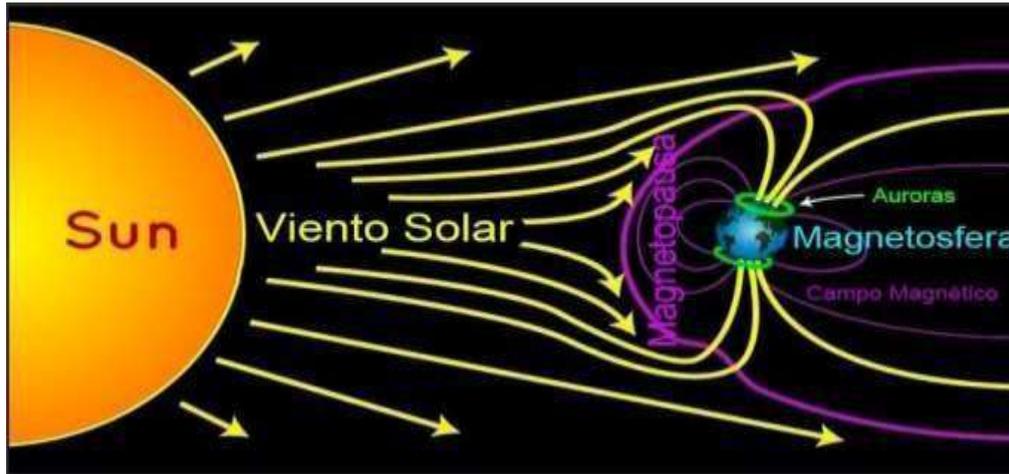


Figura 2.2: Viento Solar en las cercanías de la TierraFuente: Vazquez Axotla [1].

Algunas de las líneas magnéticas se cierran en el espacio interplanetario y otras en el espacio interestelar, considerándose como abiertas formando el viento solar. Toda la heliosfera está impregnada por el viento solar (plasma solar), siendo un flujo de plasma supersónico y superalfvénico. Este medio permite estudiar los fenómenos plasmáticos sin colisiones a bajas frecuencias donde se han observado fluctuaciones de gran amplitud. A medida que el plasma solar se va expandiendo va desarrollando un carácter altamente turbulento asemejándose a la turbulencia hidrodinámica de Kolmogorov (1941). La turbulencia en esta capa juega un papel relevante en varios aspectos del comportamiento del plasma en el espacio, como la generación de viento solar, la aceleración de partículas de alta energía, el calentamiento del plasma y la propagación de los rayos cósmicos. El plasma está compuesto por un 90 % de hidrógeno, 10 % de helio y menos del 1 % de otros gases como Oxígeno, magnesio, Silicio; creándose un gradiente de presión entre la fotosfera y el medio interestelar [27], los complejos movimientos producidos en la zona convectiva, dan lugar a una distribución de líneas magnéticas las cuales se alzan en forma de lazos cerrados, pasado la región de transición que se encuentra sobre la heliosfera y van llenando la corona solar, ejerciendo fuerzas electromagnéticas sobre el plasma solar[40]. Algunas de estas líneas magnéticas se cierran en el espacio interplanetario y otras en el espacio interestelar, estas líneas abiertas forman el viento solar.

2.2. Física del plasma

El plasma es considerado como el cuarto estado de la materia y está formado por partículas

cargadas. El plasma se forma cuando la energía cinética de los átomos es mayor que la energía cinética de los orbitales, lo que se expresa como un gas ionizado [35]. Como las propiedades del plasma están relacionadas con los efectos térmicos, es necesario definir la velocidad térmica de una partícula típica $v_{e,i}$ como son en este caso los electrones (e) y iones positivos (i) [41, 35, 42],

$$v_{e,i} = \sqrt{\frac{k_B T_{e,i}}{m_{e,i}}}, \quad (2.1)$$

donde $k_B = 1,3807 \times 10^{-23}$ J/K es la constante de Boltzmann, $T_{e,i}$ es la temperatura media de las dos especies de partículas del gas, ($m_{e,i}$) es la masa del electrón y los iones positivos [3]. Un plasma es una colección de iones positivos y electrones que tienen una densidad lo suficientemente pequeña, que permite despreciar las interacciones de rango corto. Razón por la cual, las propiedades colectivas del plasma están relacionadas con la interacción de Coulomb de rango largo. El plasma, en promedio, es un gas cuasineutral en él se encuentran portadores de carga eléctrica libres: los átomos están parcialmente ionizados y no es muy grande la ionización, el plasma es conductor y reacciona fuertemente a los campos eléctricos y magnéticos. Observado externamente el plasma se comporta como si fuera un fluido sin carga, cuando está en equilibrio [43]. La cuasi neutralidad implica igual densidad media de partículas cargadas opuestamente, es decir

$$\sum_m Z_m n_m = 0, \quad (2.2)$$

donde Z_m es la carga de la partícula m y n_m es la densidad numérica de la especie m (iones o electrones). El plasma debe mantenerse eléctricamente neutro, como comportamiento colectivo. Si los electrones son desplazados de su posición de equilibrio, se genera un campo eléctrico [44], y para intentar restaurar el equilibrio oscilan alrededor de sus posiciones de equilibrio, con una frecuencia característica, conocida como frecuencia del plasma, ω_{pe} , y se obtiene como solución del oscilador asociado con el balance entre la fuerza electrostática y la inercia,

$$\omega_D = \sqrt{\frac{4\pi \eta_e e^2}{m_e}}, \quad (2.3)$$

donde e es la carga del electrón y η_e es la densidad del electrón. Otra característica del comportamiento del plasma es “protegerse” de los potenciales externos que se aplican dentro de

una región pequeña. En este escenario, los electrones son atraídos a las cercanías de un ion y evitan la eliminación del campo eléctrico interno. La distancia mínima en la que se “siente” la influencia de un potencial externo de otras partículas cargadas dentro del plasma se conoce como la longitud de Debye [45], representada por λ_D y expresada a través de

$$\lambda_D = \sqrt{\frac{k_B T_e}{4\pi \eta_e e^2}}, \quad (2.4)$$

donde T es la temperatura promedio electrónica y e representa la carga del electrón. En escalas de longitud más grandes que la longitud de Debye, un plasma responde colectivamente a una carga dada, perturbación de carga o campo eléctrico impuesto. Para que un plasma presente un comportamiento colectivo, λ_D debe ser muy pequeña comparada con la longitud característica, L , la cual representa la longitud mínima que tiene las partículas para tener un comportamiento neutro. Esto permite que la mayoría de las partículas del plasma no sean influenciadas por un potencial externo, y la carga interactúa colectivamente solo con las cargas que están dentro de la esfera de Debye. En la esfera de Debye, el número de partículas, N_D , que se encuentra dentro de la esfera debe ser muy grande, el cual debe ser determinado a través de:

$$N_D = \frac{4}{3} \pi \left(\frac{k_B T}{\eta e^{1/3} e^2} \right)^{3/2}. \quad (2.5)$$

En resumen, no todos los gases ionizados son plasmas las condiciones que debe cumplir son:

- $\lambda_D < L$, donde L es la longitud característica del plasma.
- $N_D \gg 1$,
- $\omega_{pe}/\omega_c > 1$, donde ω_c es la frecuencia de colisión de electrones con partículas neutras.

Complementariamente, el efecto de las fuerzas electromagnéticas importantes para comprender el comportamiento del plasma. Si un campo magnético \mathbf{B} está presente, es necesario definir una frecuencia ciclotrónica de iones y electrones. Esta frecuencia ciclotrónica de iones y electrones está representada $\Omega_{e,i}$ y se puede determinar a través de:

$$\Omega_{e,i} = \frac{eB}{m_{e,i}c}, \quad (2.6)$$

esta frecuencia se define como la frecuencia a la cual los iones y los electrones giran alrededor de las líneas de campo magnético, donde c es la velocidad de la luz. Además, las partículas se mueven periódicamente en órbitas helicoidales las cuales consisten en rotaciones perpendiculares al campo magnético de intensidad B , sobre el centro de orientación con un radio ciclotrón

$$R_{e,i} = \frac{m_{e,i}v_{\perp}}{eB}, \quad (2.7)$$

donde v_{\perp} es la componente perpendicular de la velocidad en el campo magnético [37]. Tanto la frecuencia, como el radio del ciclotrón, varían para cada sistema de plasmas, caracterizados por diferentes valores de densidad y temperatura.

Debido al gran número de partículas en este sistema, no es posible describir el movimiento de cada partícula desde las ecuaciones de Maxwell y la fuerza de Lorentz. Para poder describirlo podemos utilizar una aproximación estadística, que permite analizar la dinámica global del plasma. El comportamiento del plasma, a escala microscópica, se describe a partir de una aproximación cinética, en términos de una función de distribución de partículas $f_s(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ en el espacio de fases [46]. El estado dinámico de un conjunto de partículas en un tiempo t es descrito por la posición $\mathbf{r} = (x,y,z)$ y la velocidad $\mathbf{v} = (u,v,w)$ de su centro de masas, combinando esta información se obtiene la ubicación (\mathbf{r}, \mathbf{v}) en un espacio de fases [40].

La función de distribución de partículas se define como la densidad numérica de partículas en un elemento del espacio de fases f_s define como [48]:

$$f_s(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = \frac{d^6 N_s(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)}{d^3 r d^3 v}, \quad (2.8)$$

donde $d^6 N_s(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ es el número de partículas s , dentro del elemento del volumen $d^3 r d^3 v$. Debido a que la densidad de los puntos representativos en el espacio de fases no varía sustancialmente de un elemento de volumen a otro, por lo que f_s puede ser considerada como una función continua, debido a que la función de distribución de partículas puede variar en el espacio y tiempo, la densidad numérica representada por η_s se define como el momento de velocidad de orden cero de la función de distribución la cual es una variable macroscópica definida como el número de partículas s por unidad de volumen [47, 48]:

$$\eta_s(\mathbf{r}, t) = \int_v f_s(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d^3v. \quad (2.9)$$

Cuando la función de distribución no depende de \mathbf{r} el plasma es homogéneo. Es isotrópico cuando depende de la magnitud de la velocidad en este caso la función de distribución caracteriza al plasma, y si es dependiente del tiempo el plasma está en equilibrio térmico. La función de distribución caracteriza al plasma cuando es homogéneo, isotrópico, dependiente del tiempo. La función de distribución en el sentido estadístico da una descripción completa del sistema, permitiendo deducir todas las variables macroscópicas para las partículas s .

El modelo cinético de los plasmas sigue la evolución temporal de la función de distribución en el espacio de fases, considerando la contribución externa de los campos electromagnéticos más la contribución interna generada por las interacciones de rangos largos despreciando las interacciones binarias de partículas. El modelo se basa en la ecuación de Boltzmann no colisional para nuestro caso de estudio, conocida también como la ecuación de Vlasov. En la que se desprecia el efecto de las interacciones entre partículas de rango corto, para intervalos de tiempo más pequeños que el tiempo típico asociado a colisiones entre partículas [49]. En particular, esta ecuación se puede escribir como:

$$\frac{\partial f_m}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f_m + \frac{q_m}{m_m} \left(E + \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}}{c} \right) \cdot \nabla_v f_m = 0, \quad (2.10)$$

donde \mathbf{v} es la velocidad de las partículas s , \mathbf{E} es el campo eléctrico, \mathbf{B} es el campo magnético y c es la velocidad de la luz. La ecuación (2.10) fue formulada por el físico teórico Anatoly Alexandrovich Vlasov en su modelo de descripción del plasma “**The vibrational properties of an electron gas**” [50], las ecuaciones de Maxwell dadas por:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= 4\pi\rho_c; \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= \mathbf{0}; \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}; \\ \nabla \times \mathbf{B} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}; \end{aligned} \quad (2.11)$$

donde $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ representa el campo eléctrico, $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ es el campo magnético, ρ_c representa la densidad de carga y \mathbf{J} es la densidad de corriente. Combinadas las ecuaciones (2.11) con la ecuación (2.10) se obtiene un sistema de ecuaciones cerrado, el cual representa el modelo cinético.

Las dos últimas cantidades se definen a través de los momentos de la función de distribución:

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \sum_m q_m \int_v f_s(r, v, t) d^3v; \quad (2.12)$$

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = \sum_m q_m \int_v \mathbf{v} f_s(r, v, t) d^3v. \quad (2.13)$$

donde $\rho(\mathbf{r}, t)$ y $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$ representan los momentos de la función de distribución los cuales deben ser resueltos simultáneamente.

2.3. Magnetohidrodinámica

En la aproximación en la que el plasma es considerado como una superposición de dos o más especies de partículas, interactuando como un sólo fluido, se conoce como modelo magnetohidrodinámico (MHD) y es válido cuando las escalas temporales de las perturbaciones son mayores que el tiempo necesario de transferencia de energía de las partículas, conservando el equilibrio termodinámico local [20]. En este modelo, los electrones y protones interactúan a través de las interacciones de Coulomb. El modelo considera un fluido de protones seguido de una corriente de electrones que obedece la ley de Ohm [22, 37], para escalas temporales más grandes que el recíproco de la frecuencia del plasma ($1/\omega_{pe}$), y escalas espaciales mayores que la longitud de Debye (λ_D), asegurándose la cuasineutralidad de carga, por lo que se puede considerar al plasma eléctricamente neutro [3]. El modelo MHD se describe a través de las leyes de la conservación de la densidad de masa ρ , velocidad de flujo \mathbf{v} y la energía interna U por unidad de masa [51, 52],

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0; \quad (2.14)$$

$$\rho \left[\frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \right] \mathbf{v} = \mathbf{F} - \nabla p + \nabla \cdot \bar{\sigma}; \quad (2.15)$$

$$\rho \left[\frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \right] U = -p(\nabla \cdot \mathbf{v}) - \nabla \cdot \mathbf{q} + \sum_{i,j} \sigma_{ij} \frac{\partial v}{\partial x_j} + Q, \quad (2.16)$$

en la ecuación (2.15), \mathbf{F} representa la fuerza externa por unidad de volumen que se ejerce sobre el fluido, $\bar{\sigma}$ es el tensor de esfuerzos, excluyendo la presión cinética p , \mathbf{q} representa el flujo de calor y Q el calor producido dentro del sistema [22, 51], considerando que sobre el plasma en estudio no

actúan fuerzas externas sobre el sistema, la \mathbf{F} sera definida por la fuerza de Lorentz, la misma que está dada por:

$$\mathbf{F} = \frac{1}{c} \mathbf{J} \times \mathbf{B}. \quad (2.17)$$

donde no se considera la contribución del campo eléctrico debido a la cuasineutralidad, para incluir las propiedades electromagnéticas del plasma, las ecuaciones de momentos deben acoplarse a las ecuaciones de Maxwell se reducen a [51, 53]:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \quad (2.18)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (2.19)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (2.20)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}, \quad (2.21)$$

Por otra parte, en su forma microscópica, la ley de Ohm está definida como $\mathbf{E} + (\mathbf{v} \times \mathbf{B})/c = \eta \mathbf{J}$, donde η es la resistividad. En el límite, el plasma es considerado como un fluido conductor perfecto $\mathbf{R} \rightarrow 0$, y la ley de Ohm se reduciría a

$$\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} = \eta \nabla^2 \mathbf{B} \quad (2.22)$$

para cerrar este sistema de ecuaciones se puede utilizar la ecuación de estado $p = k_B \rho T/m$, m representa la masa del sistema, esta ecuación reducirá el número de incógnitas en el caso de la magnetosfera terrestre en el límite de validez de la descripción MHD, el plasma se comportar como un gas perfecto para eliminar la presión cinética de las ecuaciones. En particular, esto permite reescribir la ecuación de la energía (2.16), en función de la presión y la densidad. Utilizando la ecuación de las fuerzas externas por interacciones electromagnéticas (2.17), la ley de Faraday (2.21), y la ecuación de la ley de Ohm (2.22) ; considerando además las fuentes del flujo de calor despreciables, las ecuaciones de conservación se resumirían como:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0; \quad (2.23)$$

$$\rho \left[\frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \right] \mathbf{v} = \frac{1}{4\pi} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} - \nabla p + \nabla \cdot \bar{\sigma}; \quad (2.24)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \cdot \mathbf{B}) + \frac{c^2 \eta}{4\pi} \nabla^2 \mathbf{B}; \quad (2.25)$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \right] \left(\frac{p}{\rho} \right) = 0. \quad (2.26)$$

La ecuación (2.25) representa el acoplamiento entre la velocidad y el campo magnético y se conoce como ecuación de inducción. La fuerza de Lorentz en la ecuación (2.24), describe la relación del campo magnético por la velocidad del fluido. Además, junto con la Ley de Ohm y las ecuaciones de Maxwell describen el modelo magnetohidrodinámico [40, 35, 13].

2.4. Ondas de Alfvén

Las ondas de Alfvén son ondas transversales e incompresibles que se derivan de la parte longitudinal de la fuerza de Lorentz y se propaga a lo largo de la línea de fuerza del campo magnético [35, 54]. La relación de dispersión de estas perturbaciones se obtiene linealizando la velocidad y el campo magnético. Para ello, el campo magnético se puede descomponer en un valor medio $\mathbf{B}_0 = \langle \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) \rangle$ y una parte fluctuante $\delta \mathbf{B}$ con valor medio nulo; entonces $\mathbf{B} = \langle \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) \rangle + \delta \mathbf{B}$. Las condiciones físicas de estas perturbaciones se complementan considerando que la densidad es constante, la resistividad y la viscosidad son nulas. Sea \mathbf{v}_a la velocidad de Alfvén la longitud característica l , bajo estas condiciones de la linealización del sistema de ecuaciones (2.23) - (2.26) en el espacio de Fourier, se obtiene una relación de dispersión,

$$\omega = \pm \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_a, \quad (2.27)$$

donde la frecuencia de oscilación de la onda está representada por ω , y \mathbf{k} es el vector de onda y la velocidad de Alfvén \mathbf{v}_a es [8, 55],

$$\mathbf{v}_a = \frac{\mathbf{B}_0}{\sqrt{4\pi\rho}}. \quad (2.28)$$

Comparando las soluciones para las perturbaciones $\delta \mathbf{B}$ y $\delta \mathbf{v}$ se obtiene una relación de correlación dada por:

$$\frac{\delta \mathbf{B}}{\mathbf{B}_0} = \mp \frac{\delta \mathbf{v}}{\mathbf{v}_a}. \quad (2.29)$$

Precisamente, esta relación indica que las ondas de Alfvén se propagan en la misma dirección del campo medio, donde las fluctuaciones de Alfvénicas están anticorrelacionadas, en el caso

opuesto cuando las ondas se propagan en dirección opuesta al campo medio las fluctuaciones están correlacionadas.

2.5. Variables de Elsässer

Las variables de Elsässer permiten simplificar las ecuaciones del sistema MHD cuando se considera fluidos incompresibles. Para esto, se introduce la normalización $\mathbf{b}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}/\sqrt{4\pi\rho}$. Notamos que las dimensiones de esta variable son de la velocidad. Bajo esta sustitución de variables, introduciendo $\nu = c^2\eta/(4\pi\rho)$ como la viscosidad cinética, el sistema de ecuaciones MHD [54] se reducen a

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = (\nabla \times \mathbf{b}) \times \mathbf{b} - \nabla \left(p + \frac{B^2}{8\pi} \right) + \nu \nabla^2 \mathbf{v}; \quad (2.30)$$

$$\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{b}) + \nu \nabla^2 \mathbf{b}, \quad (2.31)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{b} = 0, \quad (2.32)$$

las ecuaciones magnetohidrodinámicas son representadas en las ecuaciones de la (2.30) - (2.32) pueden ser escritas en forma más compacta si se introduce las variables de Elsässer [56]:

$$\mathbf{z}^\pm = \mathbf{v} \pm \mathbf{b} \quad (2.33)$$

Las variables de Elsässer permiten calcular las relaciones entre las alteraciones de la velocidad y el campo magnético y nos permiten acoplar las ecuaciones MHD, en una forma tipo Navier-Stokes [57]

$$\frac{\partial \mathbf{z}^\pm}{\partial t} + (\mathbf{z}^\pm \cdot \nabla) \mathbf{z}^\pm = -\frac{1}{\rho} \nabla \left(p + \frac{B^2}{8\pi} \right) + \frac{\nu - \mu}{2} \nabla^2 \mathbf{z}^+ + \frac{\nu + \mu}{2} \nabla^2 \mathbf{z}^-, \quad (2.34)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{z}^\pm = 0 \quad (2.35)$$

Claramente, la introducción de estas variables facilita el análisis de los fenómenos físicos complejos, como aquellos procesos de turbulencia.

2.6. Corrección Hall a la Magnetohidrodinámica

En escalas de longitud menores que la longitud de inercia de los iones, pero mayores que la longitud de inercia de los electrones, la Magnetohidrodinámica en el límite de Hall es muy importante en el estudio de la dinámica del plasma [58]. En estas escalas, los movimientos son

separados: los iones se mueven en el campo magnético (a diferencia de los electrones). Podemos partir nuestro análisis desde la ley de Ohm, en su forma general [59, 13, 5],

$$\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} - \frac{1}{nec} \mathbf{J} \times \mathbf{B} = \eta \nabla^2 \mathbf{B}, \quad (2.36)$$

El último término del lado izquierdo de esta ecuación es conocido como corrientes de Hall, generado en el plasma cuando los electrones se separan de los iones [40], y produce efectos dispersivos, mostrado en las ecuaciones:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = (\nabla \times \mathbf{b}) \times \mathbf{b} - \nabla \left(p + \frac{B^2}{8\pi} \right) + \nu \nabla^2 \mathbf{v}; \quad (2.37)$$

$$\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{b}) - d_i \nabla \times (\mathbf{J} \times \mathbf{b}) + \mu \nabla^2 \mathbf{b}; \quad (2.38)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \nabla \cdot \mathbf{b} = 0, \quad (2.39)$$

donde reiteramos que $d_i = c/\omega_{pi}$ es la longitud inercial de los iones, ω_{pi} representa la frecuencia de oscilación de los iones y la densidad de corriente está normalizada como $\mathbf{j} = \mathbf{J}/\sqrt{4\pi\rho}$.

2.7 Espectros de Energía, Funciones de Distribución y Funciones de Estructura

El espectro de energía permite evidenciar las características de la transferencia de energía E en escalas diferentes a k , en cuyo caso $E = E(k)$. La función de autocorrelación y la función de estructura de las variaciones de un campo genérico ψ están altamente relacionadas con el espectro de energía, dado que este se puede definir a través de la transformada de Fourier de la función de autocorrelación en flujos turbulentos. Experimentalmente, se ha observado que el espectro de energía tiene un comportamiento de ley de potencia en el intervalo de la región inercial [22],

$$E(k) \sim k^{-\alpha}, \quad (2.40)$$

donde α es el ajuste espectral. Más aún, cuando la turbulencia se ha desarrollado completamente, $\alpha = 5/3$, lo que evidencia una redistribución de la energía desde escalas grandes hacia las escalas pequeñas. Esto sugiere la necesidad de estudiar este tipo de fluidos desde una aproximación estadística, basados en el carácter estocástico de las variables dinámicas del fluido. Entonces, es necesario realizar un análisis de las características estadísticas del fenómeno por medio de su función de distribución de probabilidad (PDF). En particular, se evalúa la PDF de la parte

oscilante de una variable dinámica ψ , definida como la diferencia entre el valor de la variable, evaluada entre dos puntos alejados una distancia l , a un mismo instante,

$$\delta\psi_l(r, t) = \psi'(r + l, t) - \psi'(r, t). \quad (2.41)$$

De esta manera, obtenemos una función de distribución para un valor específico de escala l . Para que los datos tengan media cero y varianza σ unitaria se suele trabajar con variables estandarizadas, [22].

$$\widehat{\psi}_l = \frac{\psi' - \langle \psi' \rangle}{\sigma \psi'}, \quad (2.42)$$

s momentos de la variable ψ . Generalizando este concepto se tiene

$$P(\delta\psi(l)) = \frac{1}{2\pi} \int \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(ik)^m}{m!} \langle \delta\psi^m(l) \rangle e^{-ik\delta\psi(l)}, \quad (2.43)$$

donde los términos $\langle \delta\psi^m(l) \rangle$ se conocen como funciones de estructura y m denota el orden y nos otorga información sobre la presencia de estructuras en el campo, a una escala dada l [22]. En el caso homogéneo e isotrópico, los valores medios de las diferencias del campo están relacionados con el espectro de energía. En turbulencia, debido a la causalidad de los sucesos, estos siguen una secuencia caótica en diversas escalas, comprobándose experimentalmente que las PDF para un fenómeno turbulento no son Gaussianas. Es importante considerar que los remolinos de tamaño $\sim l$ o menor realizan una contribución importante al cambio de la función de estructura $\Delta\psi$. El valor medio de la función de estructura $\langle \delta\psi^m \rangle^2$ indica la energía acumulada $E(K)$ en los remolinos la cual está relacionada de la siguiente manera

$$\frac{3}{4} \delta\psi^2(l) = \frac{1}{2} v^2, \quad (2.44)$$

La función de estructura está relacionada con la velocidad de los vórtices generados por la turbulencia por unidad de masa para tamaños l o menores

$$\frac{3}{4} \delta\psi^2(l) \sim [E(k)] \quad (2.45)$$

$$\delta\psi^2(l) \sim \frac{4}{3} [E(k)] \quad (2.46)$$

Para tener una idea más clara del perfil de una distribución se examina el factor de simetría el

cual está dado por

$$S(l) = \frac{\langle \delta\psi^3(l) \rangle}{\langle \delta\psi^2(l) \rangle^{3/2}}, \quad (2.47)$$

expresión que define (y mide) la skewness de la variable. El momento inmediatamente superior,

$$K(l) = \frac{\langle \delta\psi^4(l) \rangle}{\langle \delta\psi^2(l) \rangle^2}, \quad (2.48)$$

se conoce como la curtosis. Tanto S como K son términos que se obtienen de la función de estructura. La importancia de estos conceptos en el estudio de la turbulencia, y la relación existente entre la función de estructura y el espectro de energía mostrados en la ecuación (2.46), y considerando que los vórtices de tamaño menor o igual a l pueden efectuar contribuciones de magnitud $\delta\psi(l)$ mostrándose en los valores $\delta\psi^2(l) \sim 4/3$ siendo toda la energía contenida en vórtices de tamaño l o menor.

2.8. Ley de Escalas de Kolmogorov

El modelo más importante para describir fluidos turbulentos es la teoría desarrollada por Andrei Kolmogorov, en 1941. Su trabajo usa un enfoque fenomenológico a partir del análisis dimensional, en función de la relación entre la masa y la velocidad de un fluido conocido como el número de Reynolds [61],

$$R_e = \frac{vl}{\nu}, \quad (2.49)$$

donde ν y l son la velocidad y longitud característica de una escala. Cuando el fluido es laminar, el número de Reynolds tiene valores ~ 2300 y puede alcanzar un valor crítico (R_{ec}). Si la turbulencia está totalmente desarrollada sus valores pueden ser mayores a 4000 [62, 22]. Se puede expresar la siguiente hipótesis:

- **Hipótesis de autosimilitud.** Para $R_e > R_{ec}$ todas las propiedades estadísticas de las escalas pequeñas tienen la misma interpretación y son universalmente determinadas por la escala l , por la tasa media de disipación de energía ε y por la viscosidad ν cuando $R_e \rightarrow \infty$ se cumple todo excepto que las propiedades estadísticas son independientes de la viscosidad ν [61].

Cuando $R_e \rightarrow \infty$ existe ausencia de disipación de energía. Esto se puede explicar con

argumentos dimensionales: el número de Reynolds local está definido como

$$R_{el} = \frac{\delta v_l l}{\nu} \quad (2.50)$$

donde resaltamos que el término viscoso ν es despreciable a grandes escalas, en comparación con el término no lineal [22]. La tasa de transferencia de energía ε en función de l y v_l se puede calcular utilizando el análisis dimensional. Si t_l es el tiempo necesario para que se transfiera la energía desde la escala l a las escalas más pequeñas o más grandes, entonces

$$\varepsilon \sim \frac{\delta v_l^2}{t_l}. \quad (2.51)$$

Esta tasa nos otorga una estimación del flujo de energía por unidad de tiempo y de masa, y será igual a la tasa de disipación de energía. El tiempo característico se considera como el tiempo de giro del remolino. El análisis dimensional nos permite estimar $t_l \sim 1/\delta v_l$, que, al reemplazaren la anterior ecuación, se obtiene una ley de escala para los incrementos del campo [62, 63],

$$\delta v_l \sim \varepsilon^{1/3} l^{1/3}, \quad (2.52)$$

a última expresión se conoce como Ley de Kolmogorov. Si aplicamos esta ley en la escala integral l_0 , entonces $v_0 \sim \varepsilon^{1/3} l_0^{1/3}$, y consecuentemente [22],

$$\delta v_l \sim v_0 \left(\frac{l}{l_0} \right)^{1/3}. \quad (2.53)$$

El exponente de la escala puede ser representado por $g = 1/3$. Con esta definición, la ley de escala de transferencia de energía debe ser $\varepsilon \rightarrow \lambda^{1-3g}\varepsilon'$, elección que garantiza la invarianza de la escala de ε a lo largo de la cascada de energía [22, 62].

Los efectos de la viscosidad empiezan a sentirse a escalas pequeñas, especialmente sobre estructuras turbulentas. El tiempo típico a estas escalas está asociado a los efectos disipativos $t_1^{(v)} \sim l^2/\nu$. Igualando el tiempo típico t_l con $t_1^{(v)}$, se encuentra la escala en la que los términos disipativos son comparables con los términos de transferencia no-lineal, hecho que se conoce como escala de Kolmogorov,

$$\eta \sim \left(\frac{v^3}{\varepsilon} \right)^{1/4}. \quad (2.54)$$

Complementariamente, la tendencia del espectro de energía, asociado al movimiento turbulento, genera resultados obtenidos del análisis dimensional. Operativamente, sustituyendo l por un número de onda $k = 1/l$, se puede pasar los resultados de la ley de escala al espacio espectral [61]. En particular, se puede construir una energía cinética por unidad de masa $E(k) dk$, relativo a las estructuras de número de onda k . A través de la tasa de disipación ε , se obtiene [64]

$$E(k) \sim \varepsilon^{2/3} k^{-5/3}. \quad (2.55)$$

El espectro es una ley de potencia mostrado en la ecuación (2.55) en función de los números de onda k , y se denomina espectro de Kolmogorov.

2.9. Tensor Gradiente de Velocidad

Los campos de gradientes de velocidad proporcionan información del comportamiento cualitativo y cuantitativo del flujo en estudio, esto se puede observar a partir de considerar la aproximación lineal del campo de velocidad $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ que rodea un punto \mathbf{x}_0 cualquiera en el flujo dada por:

$$\mathbf{v}_i(\mathbf{x}, t) = v_i(\mathbf{x}_0, t) + A_{ij}(x_0, t)(x_j - x_{0j}) + \dots \quad (2.56)$$

este elemento de fluido puede sufrir traslación, rotación, y cambio de forma lineal y angular. En un flujo donde todos los puntos tienen la misma velocidad, el flujo se conoce como uniforme y solo existe traslación del elemento. En caso de que el flujo no sea uniforme va a existir rotación y cambio de forma lineal y angular [19].

El tensor gradiente de velocidad contiene la información del movimiento relativo a lo largo del tiempo t , de todas las partículas en el entorno diferencial de una partícula dada, identificada por las coordenadas \mathbf{x} . Explícitamente, si partimos de la posición de un punto dentro de un sistema de varias partículas, $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{x}, t)$, se puede calcular la velocidad de cada una de las partículas de este sistema que se está deformando a través de la derivada parcial de esta función, respecto al tiempo obteniéndose la velocidad $\mathbf{v} = \partial \mathbf{r} / \partial t$, una función de las coordenadas en la configuración de referencia [22, 65].

A partir de la velocidad se puede construir un tensor de velocidad,

$$\mathbf{A} = (\nabla \mathbf{v})^T, \quad (2.57)$$

donde sus componentes serían:

$$A_{ij} = \left(\hat{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} v_j \hat{e}_j \right)^T. \quad (2.58)$$

Un poco de álgebra nos permite reescribir el tensor como,

$$A_{ij} = \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} \hat{e}_i \hat{e}_j \right)^T;$$

$$A_{ij} = \frac{\partial v_j}{\partial x_j} \hat{e}_i \hat{e}_j. \quad (2.59)$$

Este tensor muestra información geométrica y estadística, como la alineación de la vorticidad con respecto a los autovectores de la tasa de deformación, las formas de los volúmenes del material del fluido, las estadísticas no Gaussianas y la intermitencia [21]. Representado matricialmente el tensor gradiente de velocidad, donde las componentes de la velocidad son $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = (u, v, w)$ sería

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix},$$

que en su forma compacta se escribiría como

$$A_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}. \quad (2.60)$$

El tensor gradiente de velocidad puede ser reescrito de la siguiente manera $A_{ij} = 1/2 \partial u_i / \partial x_j + 1/2 \partial u_i / \partial x_j$ más 2 términos cambiando el orden de los índices $1/2 \partial u_j / \partial x_i - 1/2 \partial u_j / \partial x_i$ y quedaría

$$A_{ij} = \frac{1}{2} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{1}{2} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{1}{2} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{1}{2} \frac{\partial v_j}{\partial x_i}$$

reordenando

$$A_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{1}{2} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right). \quad (2.61)$$

La primera parte de la ecuación 2.61 se la puede pensar como un tensor simétrico –tensor de tasa de deformación

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right), \quad (2.62)$$

mientras que la segunda parte, como un tensor antisimétrico, conocido como tensor de vorticidad, que representa la rotación producida en un elemento de fluido [66],

$$R_{ij} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right). \quad (2.63)$$

De esta manera, el tensor gradiente de velocidad está representado como la suma directa $A_{ij} = S_{ij} + R_{ij}$ [20]. Esta definición cumple $\mathbf{F}^T \mathbf{S} \mathbf{F} = d\mathbf{E}/dt$, para lo cual se definen

$$F_{ij} = \delta_{ij} + O(\eta); \quad (2.64)$$

$$E_{ij} = \epsilon_{ij} + O(\eta^2), \quad (2.65)$$

donde ϵ_{ij} es el tensor infinitesimal de deformación y δ_{ij} es la delta de Kronecker. Para trabajar con facilidad en la relación presentada anteriormente, usamos la notación de índices,

$$F_{ij} S_{jk} F_{ks} = \frac{d}{dt} E_{js}, \quad (2.66)$$

y, a continuación, usamos la definición de la parte simétrica ecuación (2.62),

$$\begin{aligned} & (\delta_{ij} + O(\eta)) \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) (\delta_{ks} + O(\eta)) = \frac{d}{dt} (\epsilon_{ij} + O(\eta^2)); \\ & \frac{1}{2} \delta_{ij} \delta_{ks} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{1}{2} \delta_{ij} \delta_{ks} \frac{\partial v_k}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \delta_{ij} O(\eta) \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{1}{2} \delta_{ij} O(\eta) \frac{\partial v_k}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \delta_{ks} O(\eta) \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \\ & \quad + \frac{1}{2} \delta_{ks} O(\eta) \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{1}{2} \delta_{ks} O(\eta^2) \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{1}{2} \delta_{ks} O(\eta^2) \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \\ & \quad + \frac{1}{2} \delta_{ij} O(\eta^2) \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{1}{2} \delta_{ij} O(\eta^2) \frac{\partial v_k}{\partial x_i} = \frac{d}{dt} \epsilon_{ij} + \frac{d}{dt} O(\eta^2) \end{aligned}$$

Al operar δ_{ij} por los términos $(\partial v_i/\partial x_k + \partial v_k/\partial x_i)$, introducimos un índice. Si se multiplica δ_{ks} por $O(\eta)$, los términos $(\partial v_i/\partial x_k + \partial v_k/\partial x_i)$ aumentan su orden a η^2 [67, 20]. Entonces,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_s} + \frac{\partial v_s}{\partial x_j} \right) + O(\eta^2) = \frac{dy}{dx} + O(\eta^2); \\ & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_s} + \frac{\partial v_s}{\partial x_j} \right) = \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_s} + \frac{\partial v_s}{\partial x_j} \right). \end{aligned} \quad (2.67)$$

Es decir

$$S_{ij} = \frac{d}{dt} \varepsilon_{ij} \quad (2.68)$$

y, consecuentemente

$$S_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \zeta_1 & \frac{\partial}{\partial x} \gamma_{12} & \frac{\partial}{\partial x} \gamma_{13} \\ \frac{\partial}{\partial x} \gamma_{12} & \frac{\partial}{\partial x} \zeta_2 & \frac{\partial}{\partial x} \gamma_{23} \\ \frac{\partial}{\partial x} \gamma_{13} & \frac{\partial}{\partial x} \gamma_{23} & \frac{\partial}{\partial x} \zeta_3 \end{pmatrix},$$

donde $\zeta_i = (dS - dS')/dS$ representa la diferencia de distancias de un punto de flujo con respecto al tiempo, con $dS' = dS \hat{e}_i$ y γ_{ij} es el cambio de ángulo que existía entre $d\bar{X}^i$ y $d\bar{X}^j$.

La interpretación física del tensor de vorticidad de la ecuación (2.63) se evidencia a partir de la definición de vorticidad, $\omega = \nabla \times \mathbf{v} = \hat{e}_i \varepsilon_{ijk} \partial v_k / \partial x_j$, donde ε_{ijk} representa el tensor de vorticidad infinitesimal. Esta expresión representa una suma de 27 términos, de los cuales 6 son diferentes de cero; estos son:

$$\omega = \hat{e}_1 \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \right) + \hat{e}_2 \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \right) + \hat{e}_3 \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right), \quad (2.69)$$

cuya matriz equivalente es antisimétrica,

$$R_{ij} = - \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial v_1}{\partial x} - \frac{\partial v_2}{\partial x_1} & \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \\ - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_1} & 0 & \frac{\partial v_2}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_2} \\ - \frac{\partial v_1}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_1} & - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$R_{ij} = - \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & \omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Geoméricamente, el vector vorticidad es 2 veces la velocidad angular de una pequeña partícula que rota y que viaja con el fluido. Así mismo, se puede estimar como dos veces la velocidad angular de la partícula [68, 27].

2.10. Dinámica de la Ecuación de Euler Restringida

Las ecuaciones de Euler describen el movimiento de un fluido partiendo de las ecuaciones de Navier-Stokes, cuando las componentes disipativas son despreciables frente a las componentes convectivas; es decir, cuando la viscosidad del fluido es cero, $\nu = 0$ [22].

La ecuación de Navier-Stokes

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} = - \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_k}, \quad (2.70)$$

puede ser derivada parcialmente respecto a x_j ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) &= - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial P}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_k} \right); \\ \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + u_k \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} &= - \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial^3 u_i}{\partial x_j \partial x_k \partial x_k} \end{aligned}$$

Relación que se puede expresar en función de la definición de tensor gradiente de velocidad, (2.60)

$$\frac{\partial}{\partial t} A_{ij} + u_k \frac{\partial}{\partial x_k} A_{ij} + A_{ik} A_{kj} = - \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_k} A_{ij}. \quad (2.71)$$

La ecuación de Navier-Stokes está ahora definida en función del tensor del gradiente de velocidad. Si se usa la condición de incompresibilidad de un fluido, en la ecuación (2.71) desde el punto de vista Lagrangiano, donde la densidad del fluido es la misma en todos los puntos, $A_{ii} = 0$, la presión cumple la relación

$$A_{ik} A_{kj} = - \frac{\partial^2 P}{\partial x_i \partial x_j}. \quad (2.72)$$

Con un poco de operaciones algebraicas de esta ecuación se puede reescribirla como [69]

$$A_{km} A_{mk} \frac{\delta_{ij}}{3} - \frac{\partial^2 P}{\partial x_k \partial x_k} \frac{\delta_{ij}}{3}. \quad (2.73)$$

Al restar la ecuación (2.73) de la ecuación (2.71), se obtiene:

$$\frac{\partial A_{ij}}{\partial t} + u_k \frac{\partial A_{ij}}{\partial x_k} + A_{ik}A_{kj} - (A_{km}A_{mk}) \frac{\delta_{ij}}{3} = -\frac{\partial^2 P}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 P}{\partial x_i \partial x_j} + v \frac{\partial^2 A_{ij}}{\partial x_k \partial x_k};$$

$$\frac{\partial A_{ij}}{\partial t} + u_k \frac{\partial A_{ij}}{\partial x_k} + A_{ik}A_{kj} - A_{km}A_{mk} \frac{\delta_{ij}}{3} = H_{ij} \quad (2.74)$$

donde

$$H_{ij} = -\frac{\partial^2 P}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 P}{\partial x_i \partial x_j} + v \frac{\partial^2 A_{ij}}{\partial x_k \partial x_k}. \quad (2.75)$$

Donde H_{ij} se conoce como el tensor Hessiano de presión, notamos que si $H_{ij} = 0$, las derivadas espaciales se eliminan y, en este caso, $u_k(\partial A_{ij}/\partial x_k) = 0$, equivalente a una dependencia temporal (y no espacial),

$$\frac{\partial A_{ij}}{\partial t} + A_{ik}A_{kj} - A_{km}A_{mk} \frac{\delta_{ij}}{3} = 0. \quad (2.76)$$

Este es el conocido sistema de Euler restringido, que puede ser escrito como un sistema dinámico propio. Por su parte, el sistema de Euler restringido se obtiene cuando $v = 0$ en la ecuación (2.74), que equivale a despreciar la parte anisotrópica del tensor Hessiano de presión $H_{ij} = 0$, [17]. Al despreciar este término se supone que el campo de presión que rodea el punto de fluido en estudio es lineal y si contiene términos cuadráticos en el desplazamiento, estos serían esféricamente simétricos [19]. El conjunto de ecuaciones diferenciales (2.76) está cerrado, y la evolución temporal del tensor \mathbf{A} está determinada por su condición inicial $\mathbf{A}(t_0)$ [17].

2.11. Invariantes Geométricos

La ecuación de Ricatti (2.76) es una matriz que puede transformar un sistema de ecuaciones de segundo orden por combinaciones [23, 11],

$$\frac{d(A_{in}A_{nj})}{dt} + 2A_{in}A_{nk}A_{kj} - \frac{2}{3}(A_{km}A_{mk})A_{ij} = A_{in}H_{nj} + H_{in}A_{nj}, \quad (2.77)$$

y

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt}(A_{in}A_{qn}A_{nj}) + 3A_{iq}A_{qn}A_{nk}A_{kj} - (A_{nm}A_{mn})A_{iq}A_{qj} \\ & = A_{in}A_{nk}H_{kj} + A_{in}H_{nk}A_{kj} + H_{in}A_{nk}A_{kj}. \end{aligned} \quad (2.78)$$

La ecuación característica obtenida utilizando el teorema de Cayley-Hamilton, que satisface los valores propios del tensor gradiente de velocidad es

$$\lambda^3 + P\lambda^2 + Q\lambda + R = 0 \quad (2.79)$$

Para calcular cada uno de los vectores propios, correspondientes, usamos el teorema de Cayley-Hamilton [22],

$$|A_{ij} - \lambda I_{ij}| = 0 \quad (2.80)$$

$$|A_{ij} - \lambda I_{ij}| = \begin{vmatrix} (A_{ii} - \lambda) & A_{ij} & A_{ik} \\ A_{ji} & (A_{jj} - \lambda) & A_{jk} \\ A_{ki} & A_{kj} & (A_{kk} - \lambda) \end{vmatrix} = 0;$$

$$(A_{ii} - \lambda)(A_{jj} - \lambda)(A_{kk} - \lambda) + (A_{ij}A_{jk}A_{ki}) + (A_{ik}A_{ji}A_{kj}) - (A_{ik}(A_{jj} - \lambda)A_{ki}) - (A_{ij}A_{ji}(A_{kk} - \lambda)) - ((A_{ii} - \lambda)A_{jk}A_{kj}) = 0;$$

$$\begin{aligned} & A_{ii}A_{jj}A_{kk} - A_{ii}A_{jj}\lambda - A_{ii}A_{kk}\lambda + A_{ii}\lambda^2 - A_{jj}A_{kk}\lambda + A_{jj}\lambda^2 + A_{kk}\lambda^2 - \lambda^3 \\ & + A_{ij}A_{jk}A_{ki} + A_{ik}A_{ji}A_{kj} - A_{ik}A_{jj}A_{ki} + A_{ik}\lambda A_{ki} - A_{ij}A_{ji}A_{kk} \\ & + A_{ij}A_{ji}\lambda - A_{ii}A_{jk}A_{kj} + \lambda A_{jk}A_{kj} = 0, \end{aligned} \quad (2.81)$$

de donde podemos deducir que

$$P = -A_{ii} + A_{jj} + A_{kk} = -tr(A); \quad (2.82)$$

$$Q = A_{ik}A_{ki} + A_{ij}A_{ji} + A_{jk}A_{kj} - A_{ii}A_{jj} - A_{ii}A_{kk} - A_{jj}A_{kk}; \quad (2.83)$$

$$R = A_{ii}A_{jj}A_{kk} + A_{ij}A_{jk}A_{ki} + A_{ik}A_{ji}A_{kj} - A_{ik}A_{jj}A_{ki} - A_{ij}A_{ji}A_{kk} - A_{ii}A_{jk}A_{kj}. \quad (2.84)$$

Por su parte, la matriz del tensor gradiente de velocidad A_{ij} satisface [11, 69],

$$A_{im}A_{mk}A_{kj} + PA_{ik}A_{kj} + QA_{ij} + R\delta_{ij} = 0, \quad (2.85)$$

donde $P = (A_{ii} + A_{jj} + A_{kk})/2 = S_{ii}$ y donde S_{ij} es el tensor de deformación. Notamos además que P es la traza de la matriz del tensor gradiente de velocidad. De esta manera, los otros vectores se pueden reescribir en función de P ,

$$Q = \frac{1}{2}(P^2 - tr[A^2]);$$

$$Q = \frac{1}{2}(P^2 - A_{ij}A_{ji} - R_{ij}R_{ji}), \quad (2.86)$$

$$R = \frac{1}{3}(-P^2 + 3PQ - tr[A^3]);$$

$$R = \frac{1}{3}(-P^3 + 3PQ - A_{ij}A_{jk}A_{ki} - R_{ij}R_{jk}A_{ki}) \quad (2.87)$$

En particular, si la densidad del flujo permanece constante y el volumen no cambia, los invariantes del tensor de gradiente de velocidad se reducen a

$$P = -A_{ii} = 0, \quad (2.88)$$

$$Q = -\frac{1}{2}A_{im}A_{mi} \quad (2.89)$$

$$R = -\frac{1}{3}A_{im}A_{mk}A_{ki}. \quad (2.90)$$

P , Q y R se conocen como invariantes del tensor gradiente de velocidad. A continuación, podemos calcular la derivada total de la ecuación (2.77), con $P = 0$,

$$\frac{dQ}{dt} + 3R = -A_{ik}H_{ki}. \quad (2.91)$$

Considerando que la relación de Cayley Hamilton es utilizada para reducir los productos de orden mayor a otro menor, en este caso podemos reducir productos de cuarto orden a segundo orden,

$$\frac{dR}{dt} - \frac{2}{3}Q^2 = -A_{in}A_{nm}A_{mi}. \quad (2.92)$$

Las soluciones de las ecuaciones (2.91) y (2.92), para $H_{ij}=0$, son expresadas en términos de las funciones elípticas Jacobinas de primer orden [11, 14]. Basados en esto, podemos derivarla ecuación (2.74) respecto al tiempo,

$$\begin{aligned} \frac{d^2 A_{ij}}{dt^2} + \frac{d}{dt} \left(u_k \frac{\partial}{\partial x_k} \right) + \frac{d}{dt} (A_{ik}A_{kj}) - \frac{d}{dt} \left(A_{km}A_{mk} \frac{\delta_{ij}}{3} \right) &= \frac{dH_{ij}}{dt}; \\ \frac{d^2 A_{ij}}{dt^2} + A_{ik} \frac{dA_{kj}}{dt} + \frac{dA_{ik}}{dt} A_{kj} - \frac{d}{dt} \left(\frac{2}{3} A_{km}A_{mk} \frac{\delta_{ij}}{3} \right) &= \frac{dH_{ij}}{dt}; \\ \frac{d^2 A_{ij}}{dt^2} + A_{ik} \frac{dA_{kj}}{dt} + \frac{dA_{ik}}{dt} A_{kj} + \frac{2}{3} \frac{dQ}{dt} \delta_{ij} &= \frac{dH_{ij}}{dt}. \end{aligned} \quad (2.93)$$

Previamente, habíamos demostrado una forma para el término de la primera derivada temporal,

$$\frac{dA_{ij}}{dt} = H_{ij} - A_{ik}A_{kj} + \frac{2}{3}(A_{km}A_{mk})\delta_{ij}, \quad (2.94)$$

que puede ser reemplazado en la ecuación (2.93),

$$\begin{aligned}
& \frac{d^2 A_{ij}}{dt^2} + A_{ik} \left(-A_{kn} A_{nj} - \frac{2}{3} Q \delta_{ij} + H_{kj} \right) + \left(-A_{kn} A_{nj} - \frac{2}{3} Q \delta_{ij} + H_{kj} \right) A_{kj} \\
& \quad + \frac{2}{3} (-3R - A_{nm} H_{mn}) \delta_{ij} = \frac{dH_{ij}}{dt}; \\
& \frac{d^2 A_{ij}}{dt^2} - A_{ik} A_{kn} A_{nj} - A_{ik} \frac{2}{3} Q \delta_{ij} + A_{ik} H_{kj} - A_{kn} A_{nj} A_{kj} - \frac{2}{3} Q \delta_{ij} A_{kj} + H_{kj} A_{kj} \\
& \quad - 2R \delta_{ij} - \frac{2}{3} A_{nm} H_{mn} \delta_{ij} = \frac{dH_{ij}}{dt} \\
& \frac{d^2 A_{ij}}{dt^2} - (A_{ik} A_{kn} A_{nj} + A_{ik} Q \delta_{ij} + R \delta_{ij}) - (A_{in} A_{nk} A_{kj} + Q \delta_{ij} A_{kj} + R \delta_{ij}) \\
& \quad - \left(A_{ik} \frac{2}{3} Q \delta_{ij} - A_{ik} Q \delta_{ij} \right) - \left(A_{kj} \frac{2}{3} Q \delta_{ij} - A_{kj} Q \delta_{ij} \right) + A_{ik} H_{kj} + H_{ik} A_{kj} \\
& - \frac{2}{3} A_{nm} H_{mn} \delta_{ij} = \frac{dH_{ij}}{dt}. \tag{2.95}
\end{aligned}$$

La forma de la ecuación (2.95) es general y puede ser reducida para el caso de un fluido incompresible, $P = 0$:

$$\frac{d^2 A_{ij}}{dt^2} + \frac{2}{3} (Q(t) A_{ij}) = \frac{dH_{ij}}{dt} + \frac{2}{3} (A_{nm} H_{mn}) \delta_{ij} - A_{ik} H_{kj} - H_{ik} A_{kj} \tag{2.96}$$

Notamos además que el desarrollo de las ecuaciones (2.91) y (2.92), permiten describir una familia de curvas en función del tiempo,

$$\frac{27}{3} R^2 + Q^3 = Q^3_{R=0}. \tag{2.97}$$

En el espacio formado por P , Q y R , la superficie que separa las regiones con valores reales de aquellos con valores complejos está dado por el discriminante $D = 0$ [70],

$$D = \frac{R^2}{4} + \frac{Q^3}{27}. \tag{2.98}$$

En particular, cuando $D = 0$ la ecuación (2.98) representa un plano en R y Q éste separará el plano (R, Q) en dos regiones, que están caracterizadas por las propiedades del fluido. En el caso que $D > 0$, este término genera líneas de corriente arremolinadas con valores propios complejos, conocida como deformación elíptica. Cuando $D < 0$, la deformación dominante genera valores propios reales y se conoce como una deformación hiperbólica [14]. Por otro lado, cuando $Q < 0$ o $Q > 0$, indica que la región dominante es por rotación, mientras que cuando $R > 0$ o $R < 0$

< 0 se refiere a que la región dominante del fluido ocurre por disipación. El cálculo de la Función de Distribución de Probabilidad (PDF), esta función es útil para describir la naturaleza turbulenta y altamente inestable del fluido [70].

Aplicando el desarrollo matemático, previo para introducir una cantidad muy importante para el estudio de la turbulencia; esta es la tasa de deformación [71]

$$S^* = -3\sqrt{6} \frac{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3}{(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2)^{3/2}}, \quad (2.99)$$

donde λ_1 , λ_2 y λ_3 son los valores propios de la ecuación característica del tensor gradiente de velocidad. S^* mide el grado de alineación entre la vorticidad y el tensor gradiente de velocidad.

CAPÍTULO III

Marco Metodológico

3.1. Ubicación

El trabajo de investigación se desarrolló en las ciudades de Ambato, Riobamba y Quito, Ecuador. utilizando los datos de los satélites Clúster de la Agencia Espacial Europea (ESA).

3.2. Equipos y Materiales

La elaboración de esta investigación utilizó:

- Un computador.
- Software libre Ubuntu.
- Lenguajes de programación GDL, Fortran.
- Simulaciones numéricas de plasmas en estados no lineales, cuasi turbulentos, una simulación bidimensional y una simulación tridimensional.

3.3. Tipo de investigación

La investigación es de tipo Correlacional-cuantitativa, ya que relaciona estadísticamente los invariantes geométricos obtenidos del tensor gradiente de velocidad y la turbulencia manipuladas y estudiadas el comportamiento de estas variables en su entorno natural.

3.3.1. Investigación bibliográfica

Este trabajo de investigación fue desarrollado utilizando libros electrónicos, tesis doctorales y artículos científicos.

3.3.2. Investigación Aplicada

La investigación se basa en torno al desarrollo matemático de los invariantes geométricos del tensor gradiente de velocidad para analizar simulaciones bi y tridimensionales de plasmas espaciales.

3.4. Recolección de información

Para efecto de análisis de los invariantes P , Q y R , contamos con dos conjuntos de simulaciones. Una simulación bidimensional casi no lineal, utilizada para el análisis de posibles mecanismos de generación de ondas cinéticas Alfvén [2]. contando con 1124 datos en el eje de las x y eje de las y , en un intervalo de tiempo, fueron obtenidos en un servidor paralelizado Newton del departamento de Física de la Universidad de Calabria, Italia, y en el computador Mesocentre SIGAMM del Observatoire de la Cote d'Azur, Francia. La otra simulación consiste de campos de velocidad y magnético tridimensionales. Esta simulación es de tipo benchmark, lo que implica un estado muy cercano a la turbulencia, sin que lo haya alcanzado.

3.5. Metodología numérica y algoritmos

Los algoritmos numéricos utilizados y desarrollados en este trabajo se desarrollan en dos etapas. En la primera etapa se calcula la evolución del tensor gradiente de velocidad en cada escala l , a través de los campos magnético y de velocidad, y calculando los valores de los invariantes P y Q . Notamos que las simulaciones numéricas analizadas en este trabajo cumplen condiciones de estabilidad numérica para alcanzar límites no lineales (o casi no lineales).

El programa principal utilizado en la simulación bidimensional requiere como parámetros de entrada (o input) los siguientes datos:

- Los valores N_x , N_y y N_z que son el número de puntos de la grilla 3D, o nulo N_z si el campo es bidimensional. Debido a cómo funcionan las subrutinas secundarias –con cálculos en el espacio de Fourier–, es necesario que estos valores sean potencias de 2.
- El valor del tiempo $strtime$ en el que transcurre el estado que se está analizando.
- Los valores l_x , l_y , l_z son las longitudes físicas en los ejes x , y , z , respectivamente.

- Los valores B_x, B_y, B_z que son las componentes del campo magnético. Estos datos se ingresan a la memoria del programa a partir de un fichero.
- Los valores u_x, u_y, u_z que son los valores de los componentes del vector velocidad. Estos datos se ingresan, de igual manera, a partir de ficheros.

Lo que el programa genera de salida (output) son ficheros que contienen los siguientes valores:

- Un fichero llamado `u_MHD-isoinv_t=<tiempo>.dat` donde se escriben las invariantes isométricas del vector de velocidades u que son P_u, Q_u, R_u .
- Un fichero llamado `B_MHD-isoinv_t=<tiempo>.dat` donde se escriben las invariantes isométricas del campo magnético B que son P_B, Q_B, R_B .
- Un fichero llamado `u_strain_t=<tiempo>.dat` donde se escribe la matriz de tasa de esfuerzo (S) asociada al vector de velocidades.
- Un fichero llamado `b_strain_t=<tiempo>.dat` donde se escribe la matriz de tasa de esfuerzo (S) asociada al campo magnético.
- Un fichero llamado `u_Star-PDF_t=<tiempo>.dat` donde se escriben la matriz de tasa de esfuerzo usando el tensor de autovalores (S^*), asociados al vector de velocidades.
- Un fichero llamado `b_Star-PDF_t=<tiempo>.dat` donde se escribe la matriz de tasa de esfuerzo usando el tensor de autovalores (S^*) asociados al campo magnético.
- Un fichero llamado `u_costh-PDF_t=<tiempo>.dat` donde se escriben los datos del ángulo entre la vorticidad ω y el autovector correspondiente al autovalor intermedio del tensor de esfuerzo asociado al campo de velocidades.
- Un fichero llamado `b_costh-PDF_t=<tiempo>.dat` donde se escribe el ángulo formado entre la vorticidad ω y el autovector correspondiente al autovalor intermedio del tensor de esfuerzo asociado al campo magnético.

Pseudoalgoritmo

A continuación, se detalla el **pseudoalgoritmo** que se implementó para generar el paquete de códigos:

1. En el código principal se define el espacio tridimensional a manera de una caja cúbica cuyo lado es l en cada uno de los tres ejes. La caja está dividida en n partes equiespaciadas para cada uno de los tres ejes. También está definido el vector de onda k , asociado a cada una de las divisiones se inicializa utilizando la subrutina `initk` (que se especifica en la sección de código secundario). Este vector de onda también tiene el mismo número de divisiones que el vector de posiciones.
2. En la siguiente sección se leen los archivos con las componentes del campo magnético (B_x, B_y, B_z) y las componentes del campo de velocidad (u_x, u_y, u_z).
3. La subrutina `isoinovar` calcula los invariantes isométricos P_u, Q_u y R_u , asociados al campo de velocidades.
4. Se calcula el tensor de esfuerzo S (strain) asociado al campo de velocidades. Como este tensor es de tipo simétrico, sólo es necesario calcular las componentes triangulares superiores. Este cálculo se hace con la subrutina `strain`.
5. Se calcula el tensor de esfuerzo de autovalores S^* , asociado al campo de velocidades y el coseno del ángulo formado entre la vorticidad ω y los vectores propios correspondiente al autovalor intermedio del tensor de esfuerzo, asociado al campo de velocidades. Para ello se utiliza la subrutina `strainPDF`.
6. Se escribe en los ficheros de salida (output) los valores antes calculados asociados al campo de velocidades.
7. Los pasos del 3 al 6 se repiten para las cantidades asociadas al campo magnético.

Gráficos y análisis de resultados

Para generar los gráficos resultados del código principal, se utilizó python. Se usaron notebooks por comodidad porque varios gráficos compartían variables. Se crearon dos notebooks, uno para utilizar la versión 3D de nuestro código en datos bidimensionales; y el otro para utilizar la versión 3D de nuestro código en datos propiamente tridimensionales. A continuación, se explica bloque a bloque qué realiza cada notebook.

Notebook de gráficos para datos bidimensionales

1. Se agregaron las librerías necesarias para realizar los gráficos y se configuró el tamaño de letra y apariencia de los gráficos. Las librerías utilizadas son; tenemos la librería `matplotlib` y `numpy`. También se definió el tamaño predefinido de los gráficos.
2. Se especifica cual es la ubicación del directorio de entrada de los datos y cual será el directorio en donde se van a generar los gráficos que se guardarán en formato pdf. También se especifica cuál es el tiempo en el estado que se desea analizar `strtime`, el número de puntos en la grilla en el eje x , N_x , y en el eje y , N_y , y la longitud del espacio físico L_x y L_y . A partir de estos datos se genera una grid lineal equiespaciada tanto para el eje x como para el eje y .
3. Con los datos generados con el código principal de los invariantes isométricos asociados al campo magnético a un tiempo t se grafican dos cantidades. Primero se grafica la superficie del invariante Q en función de los ejes x y y . Del mismo modo se grafica la superficie del invariante R con su respectiva barra de colores.
4. De igual manera se utilizan los datos de los invariantes isométricos asociados al campo magnético generados por el código principal. A partir de esos datos se grafica la superficie de la función logarítmica de R y Q . En este caso la superficie viene a ser un histograma tal que la escala de colores es logarítmica por tal razón, los valores negativos vienen a ser blancos. Los valores de R y P están normalizados en base a S .
5. Con los datos generados con el código principal de los invariantes isométricos asociados al campo de velocidades a un tiempo t se grafican dos cantidades. Primero se grafica la superficie del invariante Q en función de los ejes x y y . Del mismo modo se grafica la superficie del invariante R con su respectiva barra de colores.
6. Con los datos del esfuerzo estrella utilizando el lenguaje Fortran y del coseno de ϑ se grafica la evolución de estas dos cantidades. Se grafica dos cantidades, en el primer gráfico se grafica s^* vs $\text{Log}P(s^*)$ y en el segundo $\cos \vartheta$ vs $\text{Log}P(\cos \vartheta)$.
7. Se utilizan los datos de los invariantes isométricos asociados al campo de velocidades generados por el código principal. A partir de esos datos se grafica la superficie de la función logarítmica de R y Q . En este caso la superficie viene a ser un histograma tal que la escala de colores es logarítmica, por tal razón, los valores negativos vienen a ser blancos. Los valores de R y P están normalizados en base a S .
8. Por último, se grafica un mapa de superficies de tres cantidades. Primero, se grafica el

tensor de esfuerzo en función de x y y con su respectiva barra de colores. Segundo, se grafica el tensor de esfuerzo correspondiente al autovalor en función de x y y . Por último, se grafica el coseno del *ángulo* (ϑ) en función de x y y .

Notebook de gráficos para datos tridimensionales

1. Se agregan las librerías necesarias para realizar los gráficos y se configura el tamaño de letra y apariencia de los gráficos. Entre las librerías utilizadas son: tenemos la librería `matplotlib` y `numpy`. También se define el tamaño predefinido de los gráficos.
2. Se especifica cual es la ubicación del directorio de entrada de los datos y cuál será el directorio en donde se van a generar los gráficos que se guardarán en formato pdf. También se especifica cuál es el tiempo en el estado que se desea analizar `strtime`, el número de puntos en la grilla en el eje x , N_x , en el eje y , N_y , y en el eje z , N_z y la longitud del espacio físico L_x , L_y y L_z . A partir de estos datos se genera una grid lineal equiespaciada tanto para el eje x , el eje y y el eje z . Adicionalmente se definen las láminas de corte a la altura del eje z , `zslice`, a altura del eje x , `xslice` y a la altura del eje y , `yslice`.
3. Con los datos generados con el código principal de los invariantes isométricos asociados al campo magnético a un tiempo t se grafican dos cantidades. Primero, se grafica la superficie del invariante Q en un corte en el plano tridimensional a la altura dada por `zslice`; así mismo para el plano y y el plano x . Del mismo modo se grafica la superficie del invariante R con su respectiva barra de color.
4. De igual manera se utilizan los datos de los invariantes isométricos asociados al campo magnético generados por el código principal. A partir de esos datos se grafica la superficie de la función logarítmica de R y Q . En este caso la superficie viene a ser un histograma tal que la escala de colores es logarítmica, por tal razón, los valores negativos vienen a ser blancos. Los valores de R y P están normalizados en base a S .
5. Con los datos generados con el código principal de los invariantes isométricos asociados al campo de velocidades a un tiempo t se grafican dos cantidades. Primero se grafica la superficie del invariante Q en un corte en el plano tridimensional a la altura dada por `zslice`. Del mismo modo se grafica la superficie del invariante R con su respectiva barra de color.
6. Se utilizan los datos de los invariantes isométricos asociados al campo de velocidades generados por el código principal. A partir de esos datos se grafica la superficie de la

función logarítmica de R y Q . En este caso la superficie viene a ser un histograma tal que la escala de colores es logarítmica por tal razón los valores negativos vienen a ser blancos. Los valores de R y P están normalizados en base a S .

7. Por último, se grafica un mapa de superficies de tres cantidades. Primero, se grafica el tensor de esfuerzo S en un corte en el plano z a la altura dada por z_{slice} ; así mismo para el plano y y el plano x , con su respectiva barra de color. Segundo, se grafica el tensor de esfuerzo correspondiente al autovalor en un corte en el plano tridimensional a la altura dada por z_{slice} . Y por último se grafica el coseno del ángulo (ϑ) en un corte en el plano tridimensional a la altura dada por z_{slice} .

CAPÍTULO IV

Resultados y Discusión

4.1. Cálculo de invariantes en simulaciones numéricas

Recientemente, Vásconez C. [2] presentó como la mezcla de fases de ondas Alfvén, de propagación paralela a gran escala, es una herramienta eficiente para la producción de las así llamadas, ondas cinéticas Alfvén (KAW), en longitudes de onda cercanas a la longitud de inercia del protón, d_p , y con ángulos cercanos a 90° entre la dirección de propagación y el campo magnético local. Para ello, los autores utilizaron simulaciones magnetohidrodinámicas (MHD), Hall magnetohidrodinámicas (HMHD) e híbridas Vlasov-Maxwell (HVM). En aquel trabajo, en el régimen lineal, los papeles de los efectos dispersivos se destacan comparando los resultados MHD y HMHD. Posteriormente, las fluctuaciones producidas por la mezcla de fases se identifican como KAW mediante una comparación de la polarización de las fluctuaciones magnéticas y la velocidad del grupo de ondas con predicciones lineales analíticas. Ellos concluyen que las fluctuaciones que tienen el carácter de KAW se generan fácilmente utilizando una configuración simple, que consiste en un campo magnético de corte 2D en el plano y una perturbación fuera del plano que se propaga localmente como una onda de Alfvén. Debido a la no linealidad de sus resultados, tomamos el estado final de [2] cuyo enfoque adopta una taxonomía de ondas de las fluctuaciones basadas en la teoría lineal de la turbulencia, para analizar las características topológicas de las estructuras de campo magnético y de velocidad. En particular, utilizaremos la simulación HVM de phase-mixing, que fue realizada considerando ondas Alfvén con amplitud inicial grande, $a = 0,25$ (RUN 4) modelo cinético, casi no lineal. En este caso, se identificó la presencia de KAWs en las zonas inferiores a los cortes (shear) del campo magnético. Entonces, debemos esperar que los parámetros P y Q (asociados al campo magnético y de velocidad) sean particularmente estructurados en las regiones de los shears.

En la figura (4.1) se presentan los parámetros P (parte izquierda) y Q (parte derecha), asociadas al campo de velocidades. En ambos casos, se observa una especie de bipolaridad en las zonas de los shears, que viajan a la velocidad del frente de ondas. La presencia de estas estructuras, concentradas en estas dos zonas se podría atribuir a la presencia (y generación) de escalas cercanas a d_p , producidas por los efectos no lineales de esta simulación.

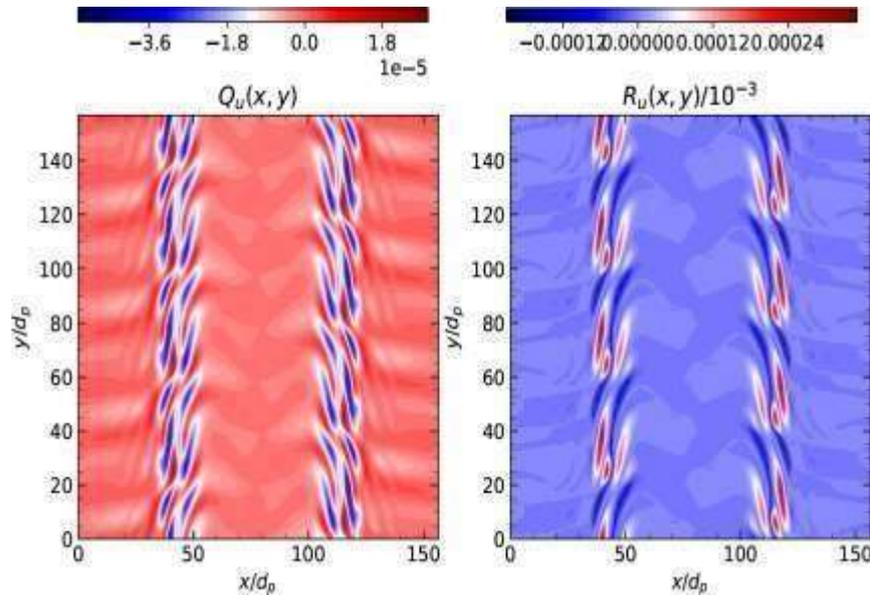


Figura 4.1: Mapas bidimensionales de los parámetros P (parte izquierda) asociados al campo de velocidades
Fuente: El investigador

Este comportamiento se repite en el parámetro R , relacionado al campo magnético (panel derecho de la figura (4.2)). En este caso, el mapa evidencia un comportamiento claramente diferente entre las zonas inferior y superior de los shears. Precisamente, el parámetro Q , asociado al campo magnético (parte izquierda de la figura (4.2)), muestran a sus estructuras concentradas en la zona superior, donde la velocidad de Alfvén es mayor (con una beta de plasma, correspondientemente menor). En este último caso, las polaridades de las estructuras son longitudinales y están relacionadas con la velocidad del frente de onda, y no con la presencia, o generación, de escalas pequeñas.

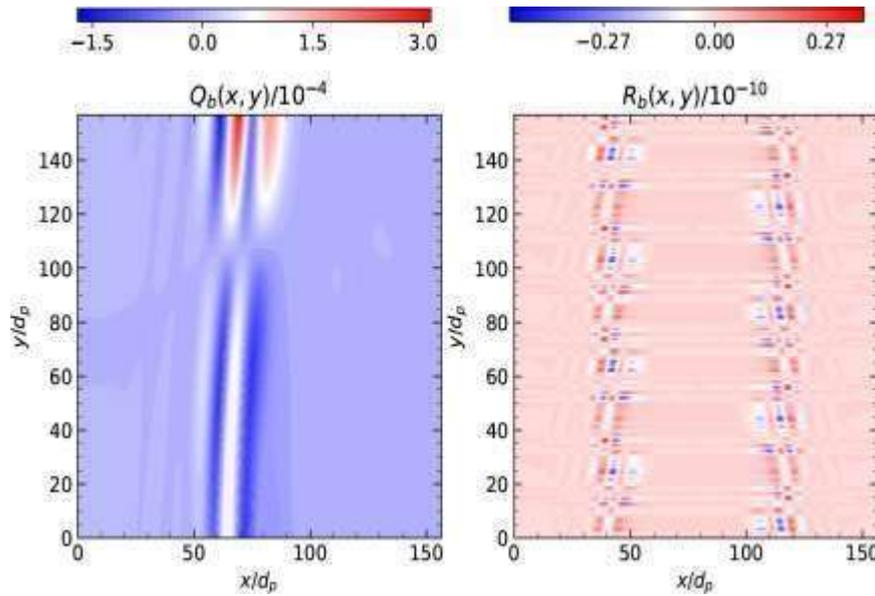


Figura 4.2: Mapas bidimensionales de los parámetros P (parte izquierda) y Q (partederecha) asociados al campo magnético
Fuente El investigador

Estos resultados nos reiteran la posibilidad de estudiar la estructura de la turbulencia en simulaciones no lineales. Más aún, los resultados sugieren que la PDF de los invariantes ($Q - R$) tendrían una forma de lágrima. En la figura (4.3) presentamos el diagrama $Q - R$, relacionado al campo de velocidad, donde se identifica una forma de lagrima, y nos muestra que las zonas donde prevalece la deformación, $Q < 0$ y $R > 0$. Esto quiere decir que $\langle S^2 \rangle / 2 > \langle \omega^2 \rangle / 4$. Mientras que en las regiones donde $Q > 0$ y $R < 0$ domina la entropía. Además, en esta figura se observa que la PDF tiene una forma alargada y ensanchada sobre la región donde el discriminante de la ecuación característica del tensor gradiente de velocidad es positivo. Notamos también que la PDF se orienta hacia el lado derecho. Podemos extender este análisis al caso de los invariantes del tensor gradiente asociados al campo magnético. En la figura (4.4) presentamos la PDF de $Q - R$, donde se evidencia una forma alargada, como un cigarro, una concentración está sobre $Q > 0$, en relación directa a la característica longitudinal de Q_b , previamente mencionada.

Por otra parte, la figura (4.5) muestra la función de densidad de distribución del ángulo ϑ entre la vorticidad y el vector propio del estado de velocidad de deformación. En esta figura hemos desglosado esta información a través de la graficación de S^* (ecuación (2.99)), en la parte superior, y $\cos(\vartheta)$, en el parte inferior. Ambas partes nos muestran que existe una clara evidencia

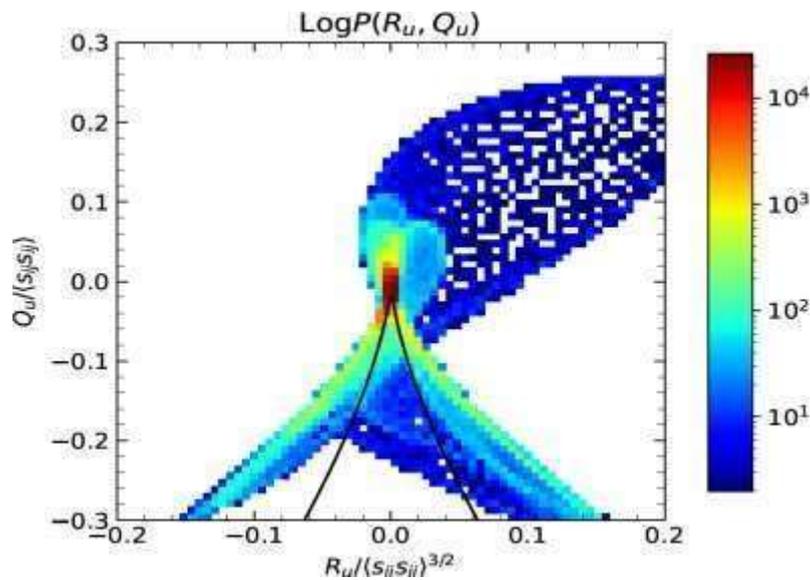


Figura 4.3: PDF del mapa(Q-R), asociado al campo de velocidades 2D.
Fuente El investigador

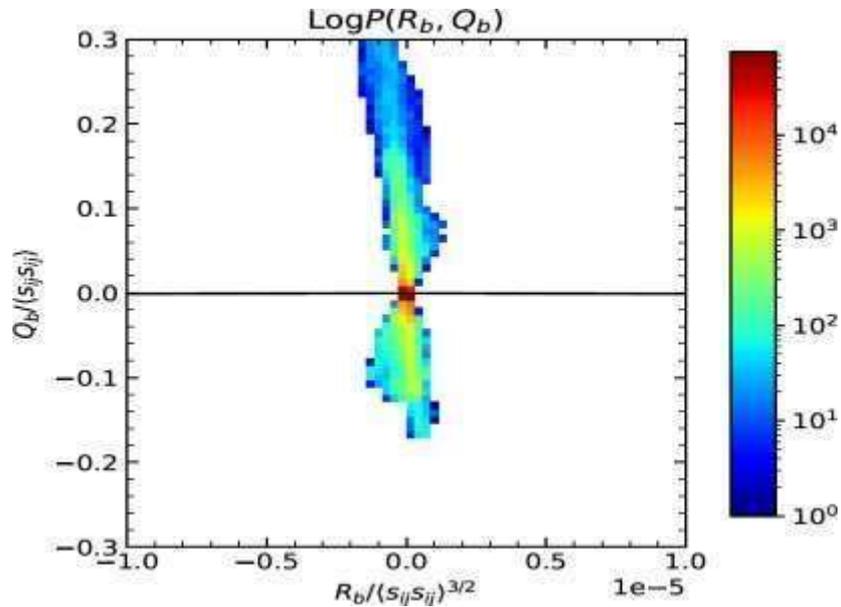


Figura 4.4: PDF del mapa (Q-R), asociado al campo magnético 2D.
Fuente El investigador

de alineación entre la vorticidad y el vector propio del tensor de deformación. Lo que sugiere que las estructuras a pequeña escala (concentradas en los shear de campo magnético) son principalmente tubos de vórtices estirados, o comprimidos, lo que es congruente con los resultados presentados por [2]. Evidenciamos ulteriormente esta congruencia espacial en la figura (4.6).

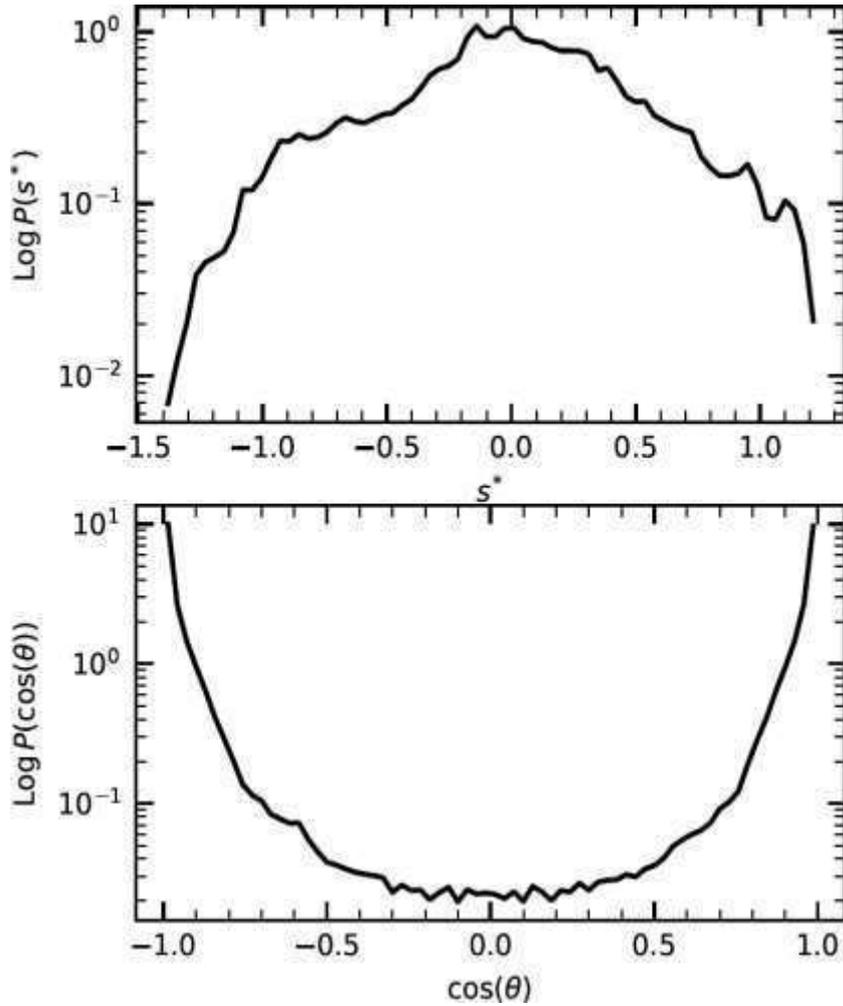


Figura 4.5: Función de densidad de distribución del ángulo θ entre la vorticidad y el vector propio del estado de velocidad de deformación, a través de S^* (parte superior) y $\cos(\theta)$ (parte inferior).
Simulación 2D
Fuente El investigador

Notamos un interesante grado de difusión entre S_u (parte de la izquierda), S^* (parte del medio) y $\cos(\theta)$ (parte de la derecha). En las regiones en las que $S^* > 1$, la disipación será baja (como ocurre en regiones turbulentas pasivas), pero si $S^* < 1$, existiría mayor difusión energética a escalas pequeñas.

Todos los análisis previos nos indican una adecuada implementación de los algoritmos, a través de los códigos numéricos, en simulaciones no lineales bidimensionales de plasmas espaciales. De este modo, usaremos una simulación MHD comprimible, que resuelve el sistema

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{u})}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + \rho \mathbf{I} + \frac{1}{2} |\mathbf{B}|^2 \mathbf{I} - \mathbf{B} \otimes \mathbf{B} \right) = \rho \nu \Delta \mathbf{u}; \quad (4.1)$$

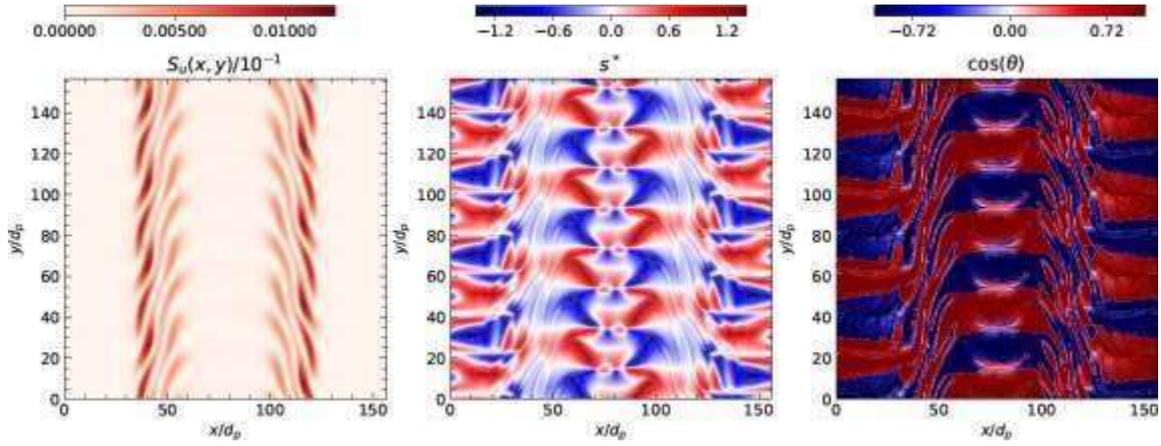


Figura 4.6: Relación espacial entre S_u (parte izquierdo), S^* (parte del medio) y $\cos(\theta)$ (parte derecho). Simulación 2D.

Fuente:El investigador

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \quad (4.2)$$

donde ρ y \mathbf{u} son la densidad de masa y velocidad del flujo macroscópico, respectivamente, p es la presión y ν es la viscosidad cinemática. La fuerza de Lorenz, $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$, han sido expresada en una forma conservativa, usando la divergencia del tensor de tensión de Maxwell, $M_{\alpha\beta} = |\mathbf{B}|^2 \delta_{\alpha\beta} / 2 - B_\alpha B_\beta$. En este sistema, la compresibilidad requiere una ecuación adicional de estado entre la presión, la densidad de masa y la temperatura. En el acercamiento numérico Lattice Boltzmann (LB) de esta simulación, dado que el número de Mach, $M_a = |\mathbf{u}|/c_s \rightarrow 0$, es pequeño, se utiliza una relación isotérmica $p = \rho c^2$, con $c^2 = 1/3$ para este esquema.

En el marco MHD, el anterior sistema se puede acoplar con la ecuación de Maxwell-Faraday para el campo magnético. Si reescribimos el sistema en una forma de divergencia, bajo la condición $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$,

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \cdot [(\mathbf{u} - \alpha_H \mathbf{j}) \otimes \mathbf{B} - \mathbf{B} \otimes (\mathbf{u} - \alpha_H \mathbf{j})] = \eta \nabla^2 \mathbf{B}, \quad (4.3)$$

donde η es la resistividad magnética, $\alpha_H = L_H/L_0 = 0$ es el parámetro Hall. Notamos que, aunque, en este caso, el parámetro Hall es nulo, la última ecuación admite la corrección Hall a la MHD. Explícitamente, la simulación 3D que estudiaremos a continuación resuelve el conocido problema de vórtices de Orzag-Tang [72], en una caja de simulación cúbica de lado $L = 2\pi$, discretizados con 384 puntos de grilla por dirección, con condiciones de borde periódicos. Las condiciones iniciales de los campos macroscópicos son:

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, 0) = u_0[-2 \sin(y), 2 \sin(x), 0]; \quad (4.4)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, 0) = B_0[-2 \sin(2y) + \sin(z), 2 \sin(x) + \sin(z), \sin(x) + \sin(y)]; \quad (4.5)$$

$$\rho(\mathbf{r}, 0) = \rho_0, \quad (4.6)$$

donde $u_0 = 0,001$ y $B_0 = 0,8u_0$ en unidades de red (lattice), mientras que $\rho_0 = 1$. El parámetro más importante en esta simulación es el número de Reynolds, Re , el cual determina varios parámetros. $Re = u_0 N / \nu$ se calcula con las condiciones iniciales. Finalmente, el número magnético de Prandtl (el cual se aproxima a la relación entre la viscosidad y la difusión magnética) se iguala a la unidad, tal que $\eta = \nu$.

La simulación previamente descrita fue utilizada como referencia para medir la estabilidad del código LB. Por esta razón, no alcanzó un nivel totalmente desarrollado de turbulencia. Es decir, debemos esperar estructuras coherentes en todo el volumen tridimensional. En la figura (4.7) presentamos varios cortes, en las direcciones z (fila superior), y (fila intermedia) y x (fila inferior), de los invariantes Q_u (columna izquierda) y R_u (columna derecha), relacionados con el campo de velocidades. A diferencia de la simulación 2D, las estructuras coherentes principales se evidencian en el mapa R_u , mientras que el invariante Q_u tiene un comportamiento espacial homogéneo de baja intensidad. Complementariamente, la figura (4.8) muestra que, a través de este mismo par de invariantes, la emisión energética se lleva a cabo sobre los cuatro sectores, con mayor incidencia en el tercer y cuarto sector, mientras que en el primero y segundo sector se “encapsula” en un punto medio, sin alejarse de la línea de discriminante.

Por otra parte, los invariantes del campo magnético son presentados en la figura (4.9). La fila superior de esta figura muestra un corte en $z = 1$, la fila intermedia un corte en $y = 1$, y la fila inferior un corte en $x = 1$ de Q_b (columna izquierda) y R_b (columna derecha). Como se observa el invariante Q_b , es homogéneo y positivo en la mayor parte del volumen, mientras que el invariante R_b muestra de energía por rotación mayor en todos sus cortes. Asimismo, se debe resaltar el estado alejado de turbulencia en el que se encuentra esta simulación. Sin embargo, debemos mencionar que los códigos desarrollados previamente funcionan bastante bien para calcular los invariantes tridimensionales, incluso en estas condiciones físicas. En cuanto a los invariantes Q_b y R_b , mostramos la PDF respectiva en la figura (4.10), donde se aprecia que la difusión se distribuye hacia el primer y segundo sector, aumentando la traslación y la rotación

hacia la parte superior de los sectores.

La figura (4.11) muestra la función de densidad de distribución del ángulo ϑ entre la vorticidad y el vector propio del estado de velocidad de deformación, a través de S^* (parte superior) y $\cos(\vartheta)$ (parte inferior), la cual muestra alineación de la vorticidad con el vector propio del tensor de deformación, con skewness positiva (hacia el lado derecho) lo que corrobora la presencia de estructuras de vórtices coherentes que, aunque han sufrido deformaciones (estirados o comprimidos), aún no han llegado a un estado no lineal y aún menos turbulento.

Finalmente, complementamos nuestro análisis con la figura (4.12), donde se muestra una relación entre las funciones de probabilidad de distribución entre el tensor de deformación S_{ij} , el tensor de tasa de deformación S^* y el ángulo θ , calculados para la presente simulación. Se observa el reducido grado de difusión que existe entre estas cantidades, que lo atribuimos al estado temprano de esta simulación 3D.

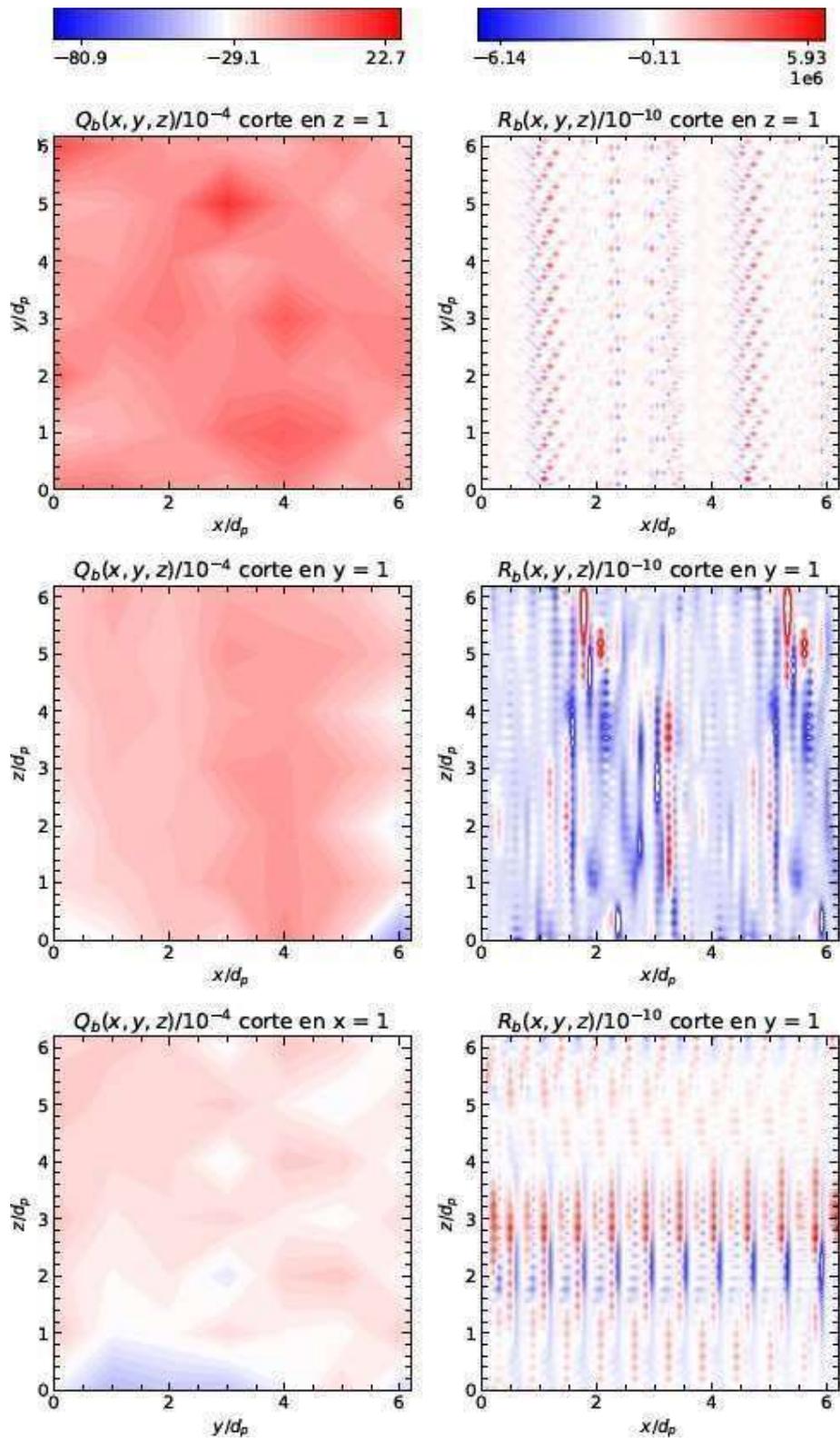


Figura 4.7: Cortes transversales en las direcciones $x = 1$ (fila inferior), $y = 1$ (fila intermedia) y $z = 1$ (fila superior) de los invariantes Q_u y R_u , relacionados con la velocidad.
Fuente El investigador

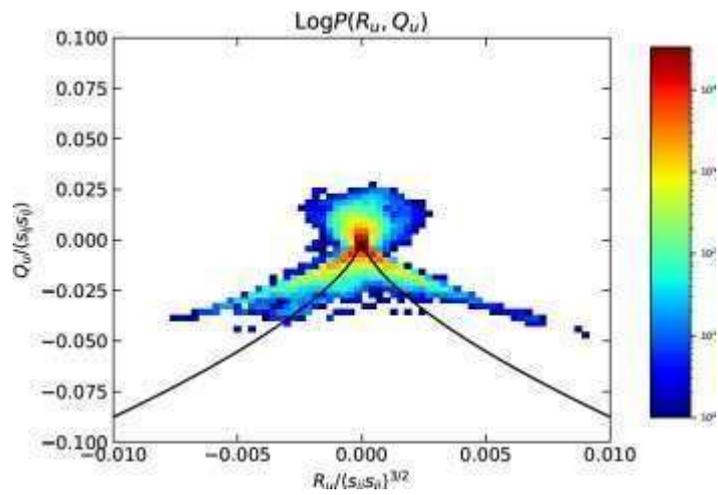


Figura 4.8: PDF del mapa ($Q-R$), asociado al campo de velocidades 3D.
Fuente: El investigador

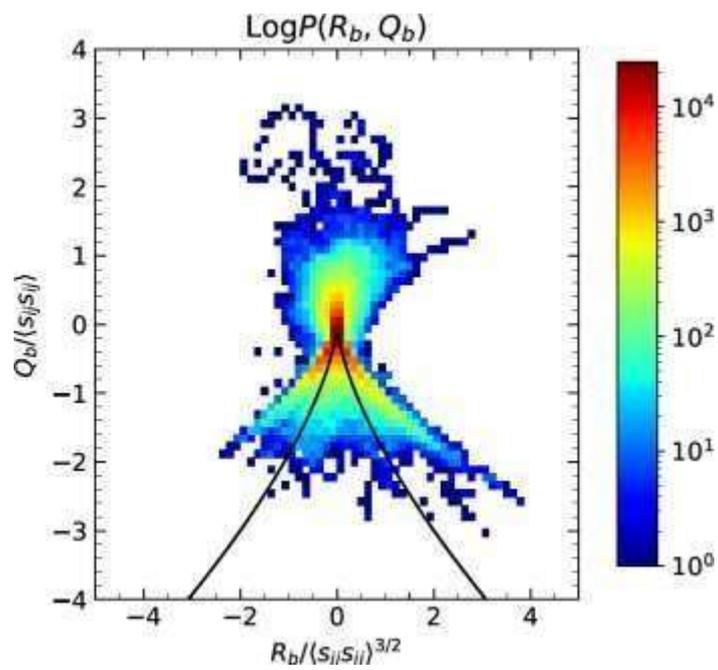


Figura 4.9: PDF del mapa ($Q-R$), asociado al campo magnético 3D.
Fuente: El investigador

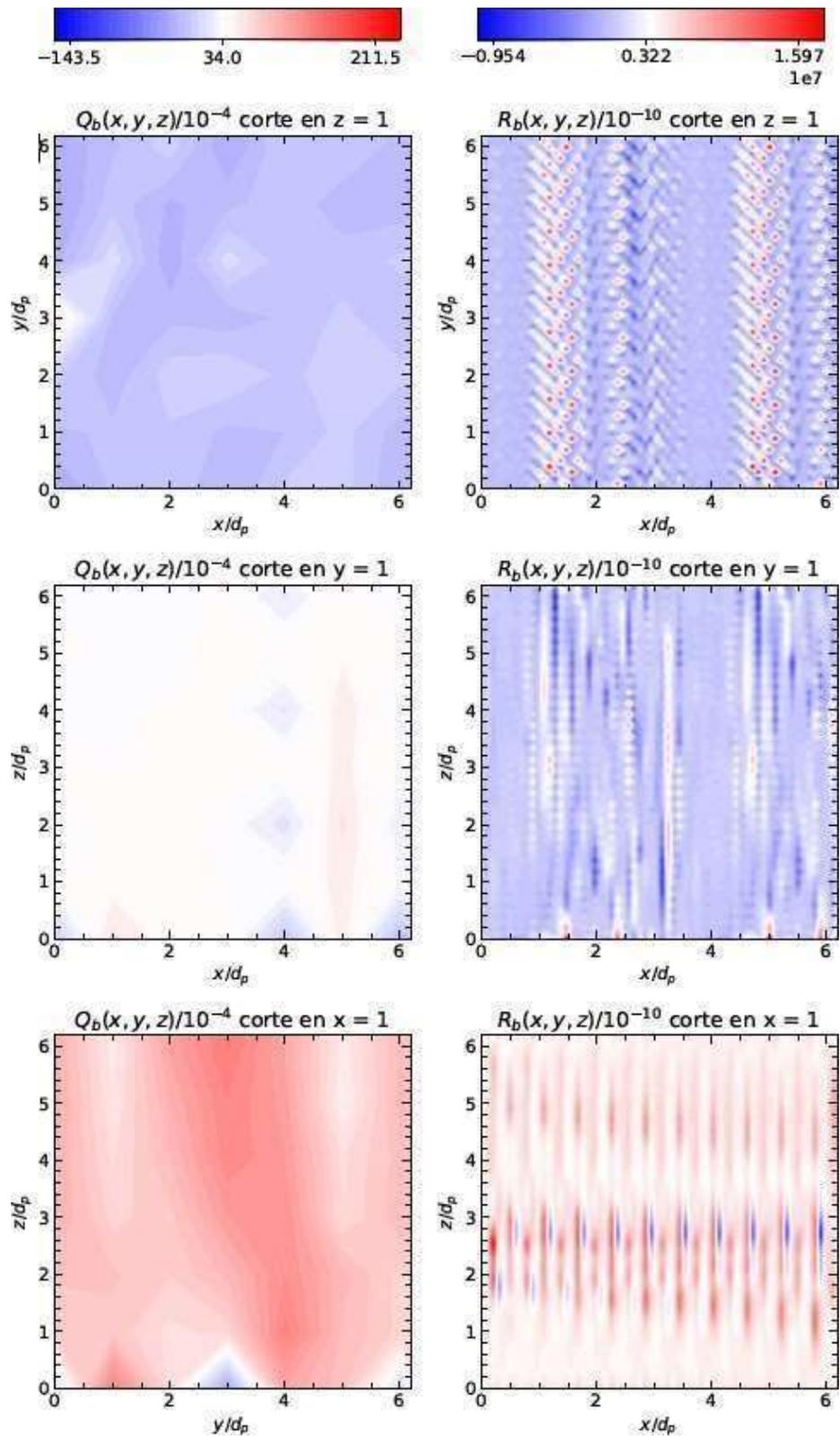


Figura 4.10: Cortes transversales en las direcciones $x = 1$ (fila inferior), $y = 1$ (fila intermedia) y $z = 1$ (fila superior) de los invariantes Q_b y R_b , relacionados con el campo magnético.
Fuente: El investigador

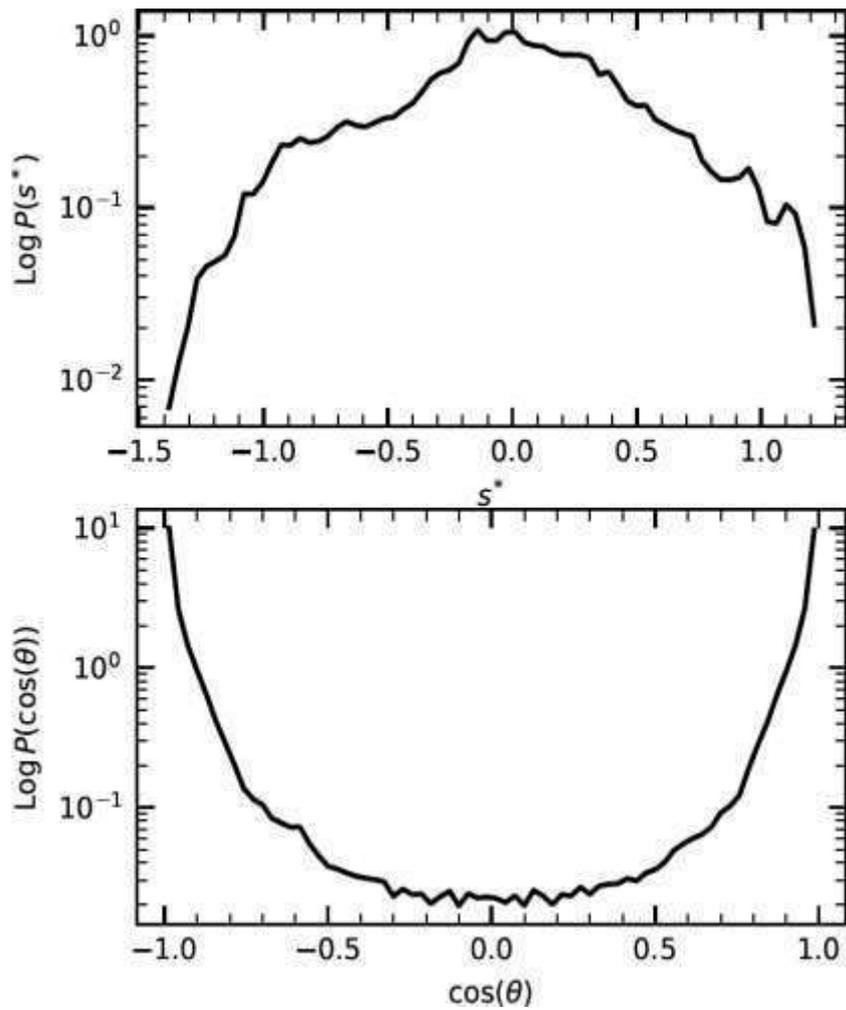


Figura 4.11: Función de densidad de distribución del ángulo θ entre la vorticidad y el vector propio del estado de velocidad de deformación, a través de S^* (parte superior) y $\cos(\theta)$ (parte inferior). Simulación 3D.

Fuente: El investigador

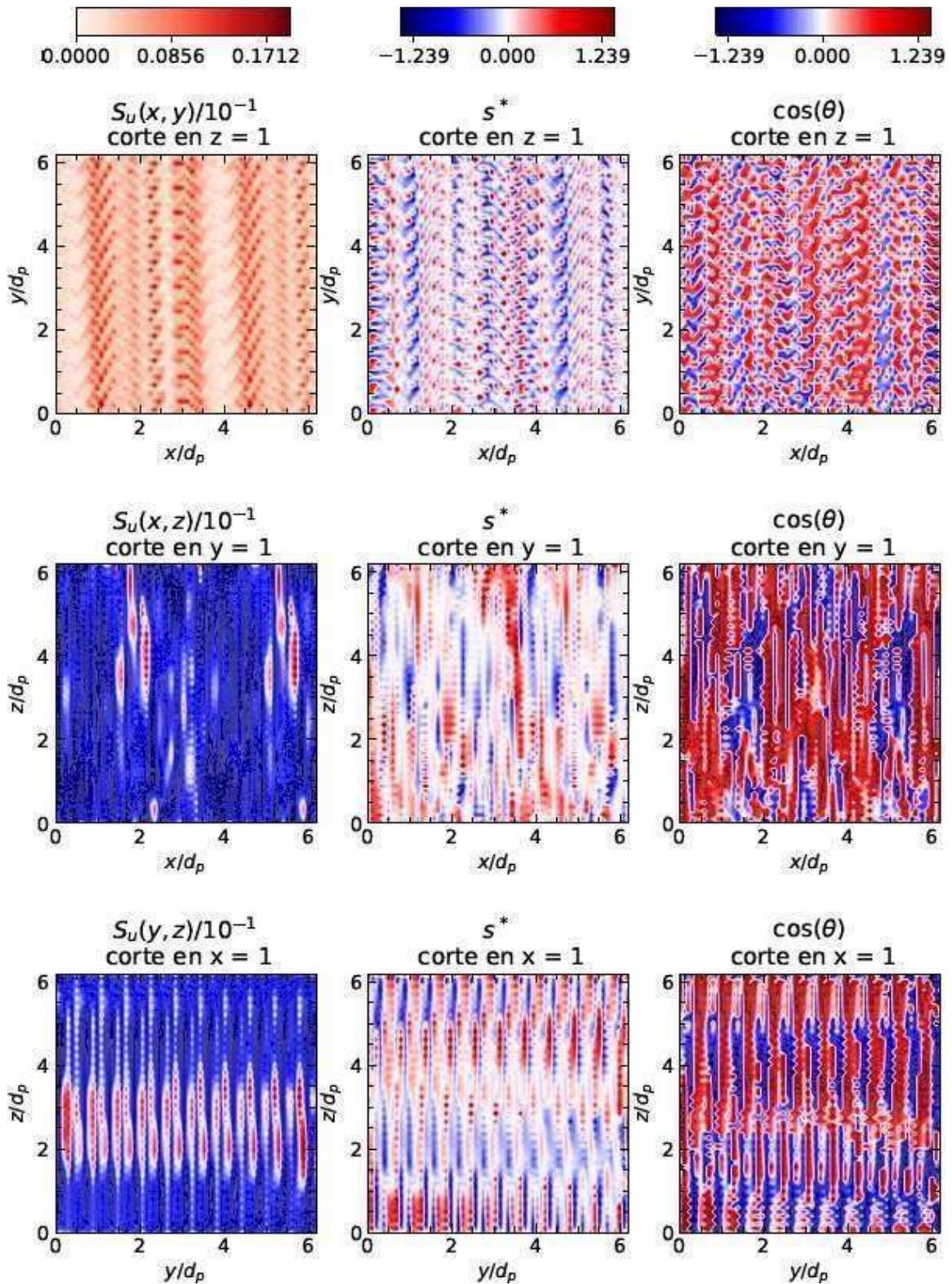


Figura 4.12: Relación espacial entre S_u (parte izquierda), S^* (parte del medio) y $\cos(\theta)$ (parte derecha).
 Simulación 3D.
 Fuente El investigador

CAPÍTULO V

Conclusiones y Recomendaciones

5.1. Conclusiones

Se realizó una recopilación y revisión bibliográfica del comportamiento de plasmas turbulentos, lo que me permitió tener un adecuado conocimiento del tema y sobre trabajos que han sido desarrollados sobre esta temática, que, aunque no es muy difundida es de mucho interés de estudio, con lo cual se puede contar con bases apropiadas para continuar con el desarrollo de la temática planteada para este trabajo de investigación.

Se construyó una simulación numérica tridimensional de plasmas turbulentos. Los códigos numéricos fueron escritos y extendidos en lenguaje Fortran, mientras que su graficación se la llevó a cabo a través de Python y GNU-GDL Data Lenguaje (software libre). Con la simulación construida se realizó una comparación entre los valores de los invariantes del tensor gradiente de velocidad y los invariantes del tensor gradiente de campo magnético, así como también el cálculo de sus estadísticas conjuntas.

Los análisis y pruebas se llevaron a cabo en dos grupos de simulaciones cuasi no lineales. Para las pruebas bidimensionales, se usó RUN 4 de Vásconez C. [2], mientras que, para los resultados tridimensionales, usamos una simulación 3D de referencia. El análisis de las propiedades estadísticas de estas simulaciones de plasmas espaciales se llevó a cabo con la ayuda de los campos magnéticos de velocidad y de densidad de corriente en simulaciones de tipo HVM y LB.

Es necesario destacar que, una comparación directa entre la figura 4.5 y la figura 4.11 nos muestra que los shear de campo magnético presentes en la simulación bidimensional, contiene estructuras más cercanas a la turbulencia que aquellas presentes en todo el volumen tridimensional. Concluimos, además, que mediante la comparación y el análisis de las propiedades estadísticas de los invariantes, tanto del campo magnético como de la velocidad,

los resultados evidenciaron que a una escala cercana a la longitud de inercia del protón se asemejan a las de un régimen de disipación y producción de disipación de un fluido turbulento, por lo que podemos afirmar que el modelo construido si permitió realizar el estudio de los invariantes geométricos de los tensores de gradiente de campo magnético y gradiente de velocidad en plasmas turbulentos.

5.2. Recomendaciones

Debido al estado actual del paquete de códigos numéricos que implementan los algoritmos de la Sección 3.5, tenemos confianza en recomendar su aplicación en simulaciones numéricas tridimensionales de plasmas en estado desarrollado de turbulencia, donde se necesite un estudio detallado de los invariantes geométricos.

Se recomienda realizar en otros lenguajes computacionales simulaciones numéricas tridimensionales de campo magnético, velocidad y densidad de corriente en un determinado intervalo de tiempo, en presencia de alta turbulencia, que permitan describir los invariantes geométricos, para que a través de los resultados que arrojen esas nuevas simulaciones se compare con los obtenidos en el presente trabajo e incluso se logre comparar los costos computacionales que representan estas simulaciones.

BIBLIOGRAFÍA

- 5.2.1. M. d. R. Vázquez Axotla, M. D. R. VAZQUEZ AXOTLA *et al.*, “Medición de parámetros indicadores de actividad solar,” 2014.
- 5.2.2. C. Vásconez, F. Pucci, F. Valentini, S. Servidio, W. Matthaeus, and F. Malara, “Kinetic alfvén wave generation by large-scale phase mixing,” *The Astrophysical Journal*, vol. 815, no. 1, p. 7, 2015.
- 5.2.3. R. Bruno and V. Carbone, “The solar wind as a turbulence laboratory,” *Living Reviews in Solar Physics*, vol. 10, no. 1, pp. 1–208, 2013.
- 5.2.4. A. E. Scarabino, “Características de la turbulencia atmosférica en un bosque de coníferas,” Ph.D. dissertation, Universidad Nacional de La Plata, 2005.
- 5.2.5. “Estructuras mhd intermitentes y discontinuidades clásicas,” *Cartas de investigación geofísica*.
- 5.2.6. “Anisotropía magnética oscilatoria en cables atómicos unidimensionales,” *Cartas de revisión física*.
- 5.2.7. L. Sorriso-Valvo, V. Carbone, P. Giuliani, P. Veltri, R. Bruno, V. Antoni, and E. Martines, “Intermittency in plasma turbulence,” *Planetary and Space Science*, vol. 49, no. 12, pp. 1193–1200, 2001.
- 5.2.8. A. Carati, M. Zuin, A. Maiocchi, M. Marino, E. Martines, and L. Galgani, “Transition from order to chaos, and density limit, in magnetized plasmas,” *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, vol. 22, no. 3, p. 033124, 2012.
- 5.2.9. F. Feraco, R. Marino, A. Pumir, L. Primavera, P. D. Mininni, A. Pouquet, and D. Rosenberg, “Vertical drafts and mixing in stratified turbulence: Sharp transition with froude number,” *EPL (Europhysics Letters)*, vol. 123, no. 4, p. 44002, 2018.
- 5.2.10. Y. Zhou, W. Matthaeus, and P. Dmitruk, “Colloquium: Magnetohydrodynamic turbulence and time scales in astrophysical and space plasmas,” *Reviews of Modern Physics*, vol. 76, no. 4,

- p. 1015, 2004.
- 5.2.11. B. J. Cantwell, “Exact solution of a restricted euler equation for the velocity gradient tensor,” *Physics of Fluids A: Fluid Dynamics*, vol. 4, no. 4, pp. 782–793, 1992.
- 5.2.12. P. Vieillefosse, “Internal motion of a small element of fluid in an inviscid flow,” *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, vol. 125, no. 1, pp. 150–162, 1984.
- 5.2.13. B. J. Cantwell, “On the behavior of velocity gradient tensor invariants in direct numerical simulations of turbulence,” *Physics of Fluids A: Fluid Dynamics*, vol. 5, no. 8, pp. 2008–2013, 1993.
- 5.2.14. G. Consolini, M. Materassi, M. F. Marcucci, and G. Pallocchia, “Statistics of the velocity gradient tensor in space plasma turbulent flows,” *The Astrophysical Journal*, vol. 812, no. 1, p. 84, 2015.
- 5.2.15. A. N. Kolmogorov, “The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large reynolds numbers,” *Cr Acad. Sci. URSS*, vol. 30, pp. 301–305, 1941.
- 5.2.16. G. K. Batchelor and A. A. Townsend, “The nature of turbulent motion at large wave-numbers,” *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, vol. 199, no. 1057, pp. 238–255, 1949.
- 5.2.17. P. Vieillefosse, “Local interaction between vorticity and shear in a perfect incompressible fluid,” *Journal de Physique*, vol. 43, no. 6, pp. 837–842, 1982.
- 5.2.18. A. Bennett *et al.*, *Lagrangian fluid dynamics*. Cambridge University Press, 2006.
- 5.2.19. C. Meneveau, “Lagrangian dynamics and models of the velocity gradient tensor in turbulent flows,” *Annual Review of Fluid Mechanics*, vol. 43, pp. 219–245, 2011.
- 5.2.20. J. Jiménez, A. Wray, P. Saffman, and R. Rogallo, “The structure of intense vorticity in homogeneous isotropic turbulence,” *Stanford Univ., Studying Turbulence Using Numerical Simulation Databases. 4: Proceedings of the 1992 Summer Program*, 1992.
- 5.2.21. C. Dopazo, “Recent developments in pdf methods turbulent reacting flows ed pa libby andfa williams,” 1994.
- 5.2.22. P. A. Davidson, *Turbulence: an introduction for scientists and engineers*. Oxford univer-

sity press, 2015.

- 5.2.23. D. Biskamp, *Nonlinear magnetohydrodynamics*. Cambridge University Press, 1997, no. 1.
- 5.2.24. S. S. R. Girimaji, “Small-scale deformation processes in isotropic turbulence,” Ph.D. dissertation, Cornell University, 1990.
- 5.2.25. H. M. Blackburn, N. N. Mansour, and B. J. Cantwell, “Topology of fine-scale motions inturbulent channel flow,” *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 310, pp. 269–292, 1996.
- 5.2.26. A. Tsinober, *An informal conceptual introduction to turbulence*. Springer, 2009.
- 5.2.27. A. M. Vásquez, “Modelado de fenómenos de plasma en la corona solar,” Ph.D. dissertation, Universidad de Buenos Aires. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, 2002.
- 5.2.28. O. Buxton and B. Ganapathisubramani, “Amplification of enstrophy in the far field of anaxisymmetric turbulent jet,” *Journal of fluid mechanics*, vol. 651, pp. 483–502, 2010.
- 5.2.29. J. M. Chacin and B. J. Cantwell, “Dynamics of a low reynolds number turbulent boundarylayer,” *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 404, pp. 87–115, 2000.
- 5.2.30. G. E. Elsinga, F. Scarano, B. Wieneke, and B. W. van Oudheusden, “Tomographic particleimage velocimetry,” *Experiments in fluids*, vol. 41, no. 6, pp. 933–947, 2006.
- 5.2.31. S. B. Pope and S. B. Pope, *Turbulent flows*. Cambridge university press, 2000.
- 5.2.32. R. Gomes-Fernandes, B. Ganapathisubramani, and J. Vassilicos, “Evolution of the velocity-gradient tensor in a spatially developing turbulent flow,” *Journal of fluid mechanics*, vol. 756, pp. 252–292, 2014.
- 5.2.33. —, “The energy cascade in near-field non-homogeneous non-isotropic turbulence,” *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 771, pp. 676–705, 2015.
- 5.2.34. V. Quattrociochi, G. Consolini, M. F. Marcucci, and M. Materassi, “On geometrical in-variants of the magnetic field gradient tensor in turbulent space plasmas: Scale variabilityin the inertial range,” *The Astrophysical Journal*, vol. 878, no. 2, p. 124,

2019.

- 5.2.35. N. C. Little, "Magnetohydrodynamics: a fusion of old and new," Tech. Rep., 1967.
- 5.2.36. L. J. Milano, "Mecanismos estacionarios e impulsivos de disipación de energía en la corona solar," Ph.D. dissertation, Universidad de Buenos Aires. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, 1999.
- 5.2.37. E. Zurbriggen et al., "Estudio mhd de la dinámica del plasma de la corona solar," B.S. thesis.
- 5.2.38. M. E. Ruiz, "Evolución dinámica de la turbulencia en el viento solar," Ph.D. dissertation, Universidad de Buenos Aires. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, 2014.
- 5.2.39. P. A. Muñoz Sepúlveda et al., "Teoría cinética de inestabilidades paramétricas en plasmas," 2011.
- 5.2.40. P. A. Quijia Pilapaña, "Estudio de la transferencia de energía entre escalas en la turbulencia del plasma en la magnetosfera terrestre," B.S. thesis, Quito, 2020., 2020.
- 5.2.41. T. de los Arcos, Plasma: el cuatro estado de la materia. Editorial CSIC-CSIC Press, 2011, vol. 21.
- 5.2.42. E. Levi, "Mecánica del medio continuo," *4a Reimpresión. ed. Limusa, México*, p. 146, 1982.
- 5.2.43. M. C. Kelley, *The Earth's ionosphere: plasma physics and electrodynamics*. Academicpress, 2009.
- 5.2.44. P. C. Clemmow and J. P. Dougherty, *Electrodynamics of particles and plasmas*. CRC Press, 2018.
- 5.2.45. K. Wiesemann, "A short introduction to plasma physics," *arXiv preprint arXiv:1404.0509*, 2014.
- 5.2.46. J. Chen, M. Chong, J. Soria, R. Sondergaard, A. Perry, M. Rogers, R. Moser, and B. Cantwell, "A study of the topology of dissipating motions in direct numerical simulations of time-developing compressible and incompressible mixing layers," *Studying Turbulence Using Numerical Simulation Databases. 3: Proceedings of the*

1990 Summer Program, pp. 139–161, 1990.

- 5.2.47. X. A. Gubert, *Mecánica del medio continuo en la ingeniería*. Univ. Politèc. de Catalunya, 2010, vol. 171.
- 5.2.48. R. M. Bowen, *Introduction to continuum mechanics for engineers*. Plenum Press, 1989.
- 5.2.49. “Hidrodinamización en teoría cinética: Modos transitorios y la expansión del gradiente.”
- 5.2.50. A. A. Vlasov, “The vibrational properties of an electron gas,” *Soviet Physics Uspekhi*, vol. 10, no. 6, p. 721, 1968.
- 5.2.51. M. G. Cordero Tercero, A. Lara Sánchez, M. D. Maravilla Meza, M. Ortega, B. Emma, and J. F. Valdés Galicia, “Introducción a la física espacial,” 2013.
- 5.2.52. A. Andreev, “The geomagnetic field gradient tensor.” *Geomagnetism and Aeronomy*, vol. 26, no. 4, pp. 651–654, 1986.
- 5.2.53. L. G. Lampugnani, “Inestabilidades magnetohidrodinámicas y relajación en tokamaks es-féricos con columnas central de plasma.” Ph.D. dissertation, Universidad Nacional de Cu-yo, 2019.
- 5.2.54. N. Magyar, T. Van Doorselaere, and M. Goossens, “The nature of elsässer variables in compressible mhd,” *The Astrophysical Journal*, vol. 873, no. 1, p. 56, 2019.
- 5.2.55. S. Ponce Dawson, “Un modelo de turbulencia de alfven en plasmas,” Ph.D. dissertation, Universidad de Buenos Aires. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, 1988.
- 5.2.56. F. Chamizo Lorente and D. Raboso Paniagua, “La fórmula de sumación de poisson y pa-rientes cercanos,” *Materials matemàtics*, 2017.
- 5.2.57. H. Alfvén, “Existence of electromagnetic-hydrodynamic waves,” *Nature*, vol. 150, no.3805, pp. 405–406, 1942.
- 5.2.58. J. D. Huba, “Hall magnetohydrodynamics-a tutorial,” *Space Plasma Simulation*, pp. 166–192, 2003.
- 5.2.59. R. E. Meyer, *Introduction to mathematical fluid dynamics*. Courier Corporation, 2012.

- 5.2.60. L. N. Martín, “Turbulencia hall-mhd en un campo magnético fuerte,” Ph.D. dissertation, Universidad de Buenos Aires. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, 2013.
- 5.2.61. R. H. Kraichnan, “On kolmogorov’s inertial-range theories,” *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 62, no. 2, pp. 305–330, 1974.
- 5.2.62. U. Frisch and A. N. Kolmogorov, *Turbulence: the legacy of AN Kolmogorov*. Cambridge university press, 1995.
- 5.2.63. S. Ortolani and D. D. Schnack, *Magnetohydrodynamics of plasma relaxation*. World Scientific, 1993.
- 5.2.64. P. A. Dmitruk, “Turbulencia magnetohidrodinámica en la corona solar,” Ph.D. dissertation, Universidad de Buenos Aires. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, 1999.
- 5.2.65. D. A. S. Tirado, M. Sen, and E. Indiana, “Mecanica de fluidos.”
- 5.2.66. P. L. Johnson and C. Meneveau, “A closure for lagrangian velocity gradient evolution inturbulence using recent-deformation mapping of initially gaussian fields,” *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 804, pp. 387–419, 2016.
- 5.2.67. R. Betchov, “An inequality concerning the production of vorticity in isotropic turbulence,” *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 1, no. 5, pp. 497–504, 1956.
- 5.2.68. S. Girimaji and S. Pope, “A diffusion model for velocity gradients in turbulence,” *Physicsof Fluids A: Fluid Dynamics*, vol. 2, no. 2, pp. 242–256, 1990.
- 5.2.69. M. S. Chong, A. E. Perry, and B. J. Cantwell, “A general classification of three-dimensional flow fields,” *Physics of Fluids A: Fluid Dynamics*, vol. 2, no. 5, pp. 765–777, 1990.
- 5.2.70. L. H. C. Rubio, “Análisis de modelos sencillos para los términos difusivos del sistema conjunto gradiente de velocidad-gradiente de un escalar en mezcla escalar turbulenta mediante simulaciones montecarlo,” Ph.D. dissertation, Universidad de Zaragoza, 2010.

- 5.2.71. W. Rodi and N. Fueyo, *Engineering turbulence modelling and experiments 5*. Elsevier,2002.
- 5.2.72. S. A. Orszag and C.-M. Tang, “Small-scale structure of two-dimensional magnetohydrodynamic turbulence,” *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 90, no. 1, pp. 129–143, 1979.