

UNIVERSIDAD TÉCNICA DE AMBATO



FACULTAD DE INGENIERÍA EN SISTEMAS, ELECTRÓNICA E INDUSTRIAL MAESTRÍA EN FÍSICA APLICADA, MENCIÓN FÍSICA COMPUTACIONAL

Tema:

ANÁLISIS ESTADÍSTICO DE PROPIEDADES
PSEUDO-LOCALES EN PLASMAS ESPACIALES
TURBULENTOS MEDIANTE SIMULACIONES
NUMÉRICAS

Trabajo de Titulación, previo a la obtención del Grado Académico de
Magister en Física Aplicada, Mención Física Computacional

Modalidad De Titulación: Proyecto de Desarrollo

Autora: Biof. Rocío Elizabeth Manobanda Guamán

Director: Fís. Christian Leonardo Vásquez Vega, PhD

Ambato-Ecuador

2022

APROBACIÓN DEL TRABAJO DE TITULACIÓN

A la Unidad Académica de Titulación de la Facultad de Ingeniería en Sistemas, Electrónica e Industrial.

El Tribunal receptor de la Defensa del Trabajo de Titulación presidido por la Ingeniera Elsa Pilar Urrutia Urrutia Magister, e integrado por la señora: Biofísica Talía Beatriz Tene Fernández, PhD, y el señor Doctor Jaime Rodrigo Guilcapi Mosquera Magister, designados por la Unidad Académica de Titulación de la Universidad Técnica de Ambato, para receptor el Trabajo de Titulación con el tema: “ANÁLISIS ESTADÍSTICO DE PROPIEDADES PSEUDO-LOCALES EN PLASMAS ESPACIALES TURBULENTOS MEDIANTE SIMULACIONES NUMÉRICAS” elaborado y presentado por la señorita Biofísica Rocío Elizabeth Manobanda Guamán, para optar por el Grado Académico de Magister en Física Aplicada, mención Física Computacional; una vez escuchada la defensa oral del Trabajo de Titulación el Tribunal aprueba y remite el trabajo para uso y custodia en las bibliotecas de la Universidad Técnica de Ambato.

Ing. Elsa Pilar Urrutia Urrutia, Mg.

Presidente y Miembro del Tribunal de Defensa

Biof. Talía Beatriz Tene Fernández, PhD.

Miembro del Tribunal de Defensa

Dr. Jaime Rodrigo Guilcapi Mosquera, Mg.

Miembro del Tribunal de Defensa

AUTORÍA DEL TRABAJO DE TITULACIÓN

La Responsabilidad de las opiniones, comentarios y críticas emitidas en el Trabajo de Titulación presentado con el tema: “ANÁLISIS ESTADÍSTICO DE PROPIEDADES PSEUDO-LOCALES EN PLASMAS ESPACIALES TURBULENTOS MEDIANTE SIMULACIONES NUMÉRICAS”, le corresponde exclusivamente a la: Biofísica Rocío Elizabeth Manobanda Guamán, autora bajo la Dirección del Físico Christian Leonardo Vásquez Vega, PhD, Director del Trabajo de Titulación; y el patrimonio intelectual a la Universidad Técnica de Ambato.

Biof. Rocío Elizabeth Manobanda Guamán

AUTORA

Fís. Christian Leonardo Vásquez Vega, PhD

DIRECTOR

DERECHOS DE AUTOR

Autorizo a la Universidad Técnica de Ambato, para que el Trabajo de Titulación, sirva como un documento disponible para su lectura, consulta y proceso de investigación, según las normas de la Institución.

Cedo los Derechos de mi Trabajo de Titulación, con fines de difusión pública, además apruebo la reproducción de este, dentro de las regulaciones de la Universidad Técnica de Ambato.

Biof. Rocío Elizabeth Manobanda Guamán

C.I. 0202412128

ÍNDICE GENERAL

CONTENIDO

PORTADA	i
APROBACIÓN DEL TRABAJO DE TITULACIÓN	ii
AUTORÍA DEL TRABAJO DE TITULACIÓN	iii
DERECHOS DE AUTOR	iv
ÍNDICE DE TABLAS	vii
ÍNDICE DE FIGURAS	viii
AGRADECIMIENTO	x
DEDICATORIA	xi
RESUMEN EJECUTIVO	xii
EXECUTIVE SUMMARY	xiv
CAPÍTULO 1—El problema de la titulación	
1.1 Introducción	1
1.2 Justificación	2
1.3 Objetivos	3
1.3.1 Objetivo General	3
1.3.2 Objetivos específico	3
CAPÍTULO 2—Antecedentes	
2.1 Estado del Arte	4
2.2 El Sol	5
2.3 El Plasma	7
2.4 El Viento Solar	8
2.5 Modelos físicos de un plasma	11
2.5.1 Enfoque cinético del plasma	12
2.5.2 Enfoque fluido del plasma	13
2.6 Magnetohidrodinámica	14
2.7 Variables de Elsässer	18
2.8 Ecuación de von Kármán-Howarth	21

2.9	Ley de Yaglom-Politano-Pouquete (YPP)	23
2.10	Aproximación Hall de la MHD	24
2.11	Inclusión del efecto Hall en la Ley de YPP	27
2.12	Proxy heurístico de Local Energy Transfer	30
CAPÍTULO 3—Marco Metodológico		
3.1	Ubicación	32
3.2	Equipos y Materiales	32
3.3	Tipo de investigación	32
3.3.1	Investigación bibliográfica	32
3.3.2	Investigación aplicada	32
3.3.3	Investigación cualitativa	33
3.4	Prueba de Hipótesis	33
3.5	Población y muestra	33
3.6	Recolección de información	33
3.7	Procesamiento de la información	34
CAPÍTULO 4—Resultados y Discusión		
4.1	Análisis de transferencia de energía	40
CAPÍTULO 5—Conclusiones, Recomendaciones, Bibliografía y Anexos		
5.1	Conclusiones	44
5.2	Recomendaciones	44
5.3	Bibliografía	45
5.4	Anexos	51

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 2.1	Valores típicos de los parámetros del SW, medidos por Helios 2 a 1 UA [1].	10
Tabla 2.2	Valores típicos de los parámetros del SW a 1 UA . Estos valores se calcularon usando los parámetros de la 2.1[1].	11

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 2.1 Estructura solar, de acuerdo a los más recientes modelos [2].	6
Figura 2.2 Velocidad y campo magnético del viento solar, medido por el satélite Ulysses. Las líneas de color azul representan la dirección del campo magnético interplanetario expedido radialmente desde la superficie solar hacia el Sistema Solar. Las líneas de color rojo representan el campo magnético interplanetario dirigido hacia la superficie solar [3].	9
Figura 2.3 Esquema de la magnetosfera terrestre. Onda de choque, Magnetopausa y Magnetofunda [2].	9
Figura 3.1 Gráfico de contorno de la densidad de corriente fuera del plano $j_z(x, y)$ para descripciones HMHD (a), LF (b) y HVM (c) en $t = t^*$ (Vásconez et al. [4]).	34
Figura 3.2 Tasa de cascada $-2\epsilon_l$ ley en función de la escala l . Presenta el promedio (2.72) sobre todo el dominio, correspondiente a las simulaciones Hall-MHD, LF y HVM (Vásconez et al. [4]).	35
Figura 3.3 Contribución del efecto Yaglom y del efecto Hall de los modelos HHMD, LF Y HVM, calculados bajo las mismas condiciones iniciales (Vásconez et al. [4]).	35
Figura 4.1 Cortes en los ejes $x - y$ (panel izquierdo), $y - z$ (panel central) y $z - x$ (panel derecho), de \mathbf{B}^2 , donde se puede apreciar la distribución espacial de varias estructuras.	40
Figura 4.2 Cortes en los ejes $x - y$ (panel izquierdo), $y - z$ (panel central) y $z - x$ (panel derecho), de \mathbf{v}^2 , donde se puede apreciar la distribución espacial de varias estructuras.	41
Figura 4.3 Estado turbulento de la simulación 3D. La línea negra sólida une los valores positivos del lado derecho de la ecuación (2.70) (ley de YPP), correspondiente a cada escala. La línea negra entrecortada une a la escala con un valor negativo. Para resaltar su estado no turbulento, la ley de potencia se expresa con una línea roja entrecortada.	41

Figura 4.4 Tasa de cascada en función de la escala l , calculada con 96 sub- cajas de grilla. Como referencia, la ley de YPP se encuentra graficada con una línea roja entrecortada.	42
Figura 4.5 Proxy LET calculado en 6 escalas diferentes, como $\ell = 2^i$, en la simulación tridimensional.	43
Figura 4.6 Cortes transversales del proxy LET (de la escala $i = 7$) en los planos $x - y$ (panel izquierdo), $y - z$ (panel medio) y $z - x$ (panel derecho), donde se puede apreciar las estructuras complejas.	43

AGRADECIMIENTO

A Dios por brindarme salud y vida para cumplir una meta más.

A mi familia, en especial a mis padres y hermanos por creer en mí.

A mi tutor por todo el tiempo dedicado, la paciencia y por los conocimientos compartidos.

A mis amigos por compartir sus conocimientos, sus buenos ánimos y por acompañarme en todo este proceso.

Elizabeth

DEDICATORIA

Dedico mi tesis a mis padres. A mi querida y adorada madre que siempre ha estado apoyándome y que sin ella no habría logrado ser lo que soy ahora. A mi padre amado que, aunque ya no lo tenga conmigo, sé que donde quiera que este es mi guía y bendice cada paso que doy.

Elizabeth

UNIVERSIDAD TÉCNICA DE AMBATO
FACULTAD DE INGENIERÍA EN SISTEMAS ELECTRÓNICA E
INDUSTRIAL
MAESTRÍA DE FÍSICA APLICADA - MENCIÓN FÍSICA
COMPUTACIONAL

TEMA:

Análisis estadístico de propiedades pseudo-locales en plasmas espaciales turbulentos mediante simulaciones numéricas.

AUTORA: Biof. Rocío Elizabeth Manobanda Guamán.

DIRECTOR: Fís. Christian Leonardo Vásquez Vega, PhD.

LÍNEA DE INVESTIGACIÓN.

– Energías renovables y desarrollo sostenible.

FECHA: 16 de Junio 2022.

RESUMEN EJECUTIVO

En el ambiente de los plasmas espaciales, la cascada turbulenta permite que la mayor parte de la energía que se disipa a pequeña escala, por varios procesos cinéticos, se traslade a estas escalas en un ambiente casi sin colisiones. Comprender las características de tales mecanismos disipativos requiere un conocimiento preciso de las fluctuaciones que hacen que la energía esté disponible para la conversión a pequeña escala, ya que los diferentes procesos de disipación son desencadenados por fluctuaciones de diferente naturaleza física. Las propiedades pseudo-locales de los plasmas turbulentos se estiman en este trabajo de investigación, mediante un proxy heurístico de la cantidad de energía local, que está basado en la ley de escala de momento de tercer orden para la turbulencia Magnetohidrodinámica (MHD), la conocida ley de Yaglom-Politano-Pouquette (YPP). En particular, el análisis de las propiedades locales y globales de plasmas turbulentos en el ámbito bidimensional se obtuvo como antecedente para explorarlas en simulaciones de plasmas no colisionales cuasi turbulentos. Los resultados muestran que la simulación tridimensional no cumple con la ley de YPP, debido a la formación temprana de un

estado turbulento. Sin embargo, se comprobará que el código numérico tridimensional funciona correctamente y está listo para ser utilizado en otras simulaciones tridimensionales, o de menor dimensión. Los resultados también muestran confiabilidad de los algoritmos desarrollados en este trabajo de investigación, así como los códigos correspondientes.

Palabras claves: viento solar, plasma espacial, fenómenos no lineales del plasma, simulación del plasma, Ley Yaglom-Politano-Pouquette, proxy heurístico.

UNIVERSIDAD TÉCNICA DE AMBATO
FACULTAD DE INGENIERÍA EN SISTEMAS ELECTRÓNICA E
INDUSTRIAL
MAESTRÍA DE FÍSICA APLICADA - MENCIÓN FÍSICA
COMPUTACIONAL

THEME:

Statistical analysis of pseudolocal properties in turbulent spatial plasmas using
numerical simulations.

AUTHOR: Biof. Rocío Elizabeth Manobanda Guamán.

DIRECTED BY: Fís. Christian Leonardo Vásquez Vega, PhD.

LINE OF RESEARCH:

– Renewable energies and sustainable development.

DATE: June 16, 2022.

EXECUTIVE SUMMARY

In the space plasma environment, the turbulent cascade allows most of the energy that is dissipated on small scales, by various kinetic processes, to be transferred to these scales in a nearly collisionless environment. Understanding the characteristics of such dissipative mechanisms requires precise knowledge of the fluctuations that make energy available for small-scale conversion, since the different dissipation processes are triggered by fluctuations of a different physical nature. The pseudo-local properties of turbulent plasmas are estimated in this research work, by means of a heuristic proxy of the amount of local energy, which is based on the third-order momentum scaling law for Magnetohydrodynamic (MHD) turbulence, the well-known Yaglom-Politano-Pouquette law (YPP). In particular, the analysis of the local and global properties of turbulent plasmas in the two-dimensional domain was obtained as background to explore them in simulations of quasi-turbulent non-collision plasmas. The results show that the three-dimensional simulation does not comply with the YPP law, due to the early formation of a turbulent state. However, it will be verified that the three-dimensional numerical code works correctly and is ready to be used in other three-

dimensional or lower-dimensional simulations. The results also show the reliability of the algorithms developed in this research work, as well as the corresponding codes.

Keywords: solar wind, space plasma, nonlinear plasma phenomena, plasma simulation, Yaglom-Politano-Pouquette Law, heuristic proxy.

CAPÍTULO I

EL PROBLEMA DE LA TITULACIÓN

1.1 Introducción

El Viento Solar (SW, por sus siglas en inglés) es un plasma turbulento emitido por el Sol que está en constante interacción con el campo magnético de nuestro planeta. En el intento de comprender los fenómenos turbulentos en las múltiples escalas del SW se enviaron numerosas misiones satelitales a lo largo de los años para realizar mediciones in situ directamente dentro del SW o sus incursiones en la magnetosfera terrestre. Las mediciones de las naves espaciales han revelado que el plasma del viento solar generalmente se encuentra en un estado de turbulencia completamente desarrollada [5, 6, 7]. A medida que las fluctuaciones turbulentas se alejan del Sol, se descomponen y transfieren energía a escalas más pequeñas. La aproximación MHD describe la fenomenología de los plasmas espaciales a escalas suficientemente grandes. A escalas comparables con el giro-radio de iones o la longitud de inercia de iones, la aproximación MHD falla y se producen procesos cinéticos que involucran interacciones campo-partícula, junto con un importante acoplamiento entre escalas [8]. En este enfoque, un comportamiento similar al de Kolmogorov está muy respaldado por las observaciones de la velocidad y las fluctuaciones magnéticas que muestran espectros de ley de potencia e intermitencia [9, 10]. La transferencia de energía intermitente entre escalas se ha descrito ampliamente a través de la versión MHD de la ecuación de von Kármán-Howarth para la turbulencia hidrodinámica incompresible [11]. Con base en las leyes de conservación de los invariantes MHD, dicha ley predice la escala lineal del momento mixto de tercer orden de las variables MHD [12]. Ampliamente observado en simulaciones numéricas [13] y en plasmas espaciales [14, 15, 16, 17], la ley de tercer orden se ha ampliado recientemente para incluir el efecto de compresibilidad, anisotropía, corrientes de Hall y otros efectos de dos fluidos [18, 19, 20, 21]. En la parte inferior del rango inercial (o Hall), la energía turbulenta se disipa de manera eficiente como resultado de la transferencia de energía no homogénea, que ocurre principalmente en filamentos de vorticidad a pequeña escala, discontinuidades rotacionales (o tangenciales) y láminas de corriente entre otras estructuras [22]. A escalas cercanas a la longitud de inercia del protón y/o a la profundidad del proton skin depth, los modelos MHD puros ya no son válidos [23].

Deben considerarse los procesos cinéticos, liderados por interacciones campo-partícula. Las simulaciones numéricas directas han demostrado ser muy útiles para comprender la física de los plasmas en las condiciones del viento solar cercano a la Tierra [4]. Estas representan una herramienta indispensable para la comprensión de la dinámica no lineal del plasma. El uso de simulaciones numéricas cinéticas es crucial, de hecho, cuando los procesos cinéticos ocurren en plasmas turbulentos sin colisión [24, 25, 26, 27, 28, 29, 30]. En este trabajo de titulación, se presenta el análisis estadístico de propiedades pseudo-locales en plasmas espaciales turbulentos mediante Simulaciones Numéricas Directas (SND) previamente investigado por Vásconez et al. [4], quien estudió las propiedades locales y globales de la transferencia de energía en modelos bidimensionales de la turbulencia de plasma. Este trabajo de titulación está organizado de la siguiente forma: En el Capítulo 1, se presenta la justificación, los objetivos generales y específicos, en el Capítulo 2, se presenta los antecedentes del trabajo de titulación y el marco teórico en donde se describe brevemente los cálculos teóricos para la configuración 3D de un plasma sin colisiones, en condiciones típicas del SW. En el Capítulo 3, se presenta el marco metodológico en donde se describe brevemente la metodología utilizada para el procesamiento de la información. El análisis de la transferencia de energía local, global y pseudo-local de este estado se muestra en el Capítulo 4. Finalmente, en el Capítulo 5, se presenta las respectivas conclusiones y recomendaciones.

1.2 Justificación

El estudio de los procesos físicos en el espacio interplanetario tiene vigencia desde las primeras misiones espaciales, en los años 60. Gracias a más de 50 años de investigación, el conocimiento de estos procesos ha progresado increíblemente. Además, con el desarrollo creciente de la era espacial (telecomunicaciones, viajes espaciales, etc.) se han identificado las posibles aplicaciones de tales conocimientos. En este contexto, todavía hay muchos problemas no resueltos; entre ellos, los mecanismos de disipación de la energía en el viento solar, y en las magnetosferas planetarias, junto con el calentamiento de estos plasmas. Estos procesos son extremadamente importantes para las posibles aplicaciones de clima espacial, y de la interacción Sol-Tierra, cuyos mecanismos sólo se podrán describir correctamente tras la comprensión de sus procesos fundamentales. Además, dado que los procesos disipativos no son exclusivos de los plasmas del Siste-

ma Solar, los resultados de este trabajo de titulación tienen importancia para todos los plasmas astrofísicos turbulentos, y para aquellos de laboratorio y de fusión. El estudio de las tasas de cascada de energía nos proporciona una comprensión detallada de cómo funcionan intrínsecamente nuestros modelos teóricos, los mismo que sirven para adaptar los resultados obtenidos en investigaciones posteriores de SND o datos satelitales. Este trabajo de titulación permite el desarrollo de nuevos métodos de tratamiento de datos o mejores formas de calcular derivados 3D en datos de naves espaciales, lo que puede ayudar a diseñar futuras misiones de naves espaciales. Entonces, el interés actual en el tema es de alta relevancia, por sus consecuencias, no solo en astrofísica y en la física espacial, si no en la fusión nuclear y otras aplicaciones tecnológicas. La relevancia de la temática en el Ecuador es aún más fuerte, considerando que la investigación en clima espacial (y su afectación local) ha sido excipiente y necesita un impulso.

1.3 Objetivos

1.3 Objetivo General

Analizar las propiedades estadísticas globales y pseudo-locales de plasmas espaciales turbulentos mediante simulaciones numéricas.

1.3 Objetivos específico

- Desarrollar un proxy heurístico de transporte y disipación local de energía turbulenta en plasmas no colisionales del espacio circumterrestre e interplanetario, en régimen MHD, Hall-MHD e híbridos.
- Analizar las propiedades estadísticas del proxy de disipación/transporte de energía en el viento solar y/o en la magnetosfera.
- Estudiar las propiedades locales de las distribuciones de velocidad de partículas (protones) en sitios de alta disipación, baja disipación y de cascada inversa, mediante simulaciones híbridas.
- Determinar correlaciones entre el transporte de energía turbulenta local y los efectos cinéticos del plasma a escala sub-magnetohidrodinámica.

CAPÍTULO II

ANTECEDENTES

2.1 Estado del Arte

En el presente capítulo se presenta un breve enfoque teórico inicial, con premisas y derivaciones matemáticas utilizadas en la física de los plasmas y sus modelos.

Sorriso-Valvo y sus colaboradores [31], realizaron un estudio en la ciudad de Italia, con el fin de comprender las interconexiones entre las estructuras turbulentas y los procesos cinéticos de pequeña escala, se explora a través del análisis de la simulación numérica híbrida bidimensional de Vlasov-Maxwell (HVM), con partículas y a través de un proxy de la tasa de transferencia de energía turbulenta, a saber, la tasa de transferencia de energía local (LET). Primero evidenció las correlaciones entre pares de variables, incluidas las relacionadas con procesos cinéticos y con la desviación de las distribuciones maxwellianas. Luego, describieron las propiedades generales y las leyes de escala estadística del LET, confirmando su confiabilidad para la descripción de la cascada turbulenta y revelando su topología texturada. Finalmente, la conexión entre dicho proxy y las variables de diagnóstico exploraron utilizando un promedio condicional, lo que muestra que varias cantidades aumentan en presencia de un gran flujo de energía positiva y se reducen cerca de los sitios de flujo negativo. Estas observaciones pueden ayudar a determinar qué procesos están involucrados en la disipación de energía a pequeña escala, como por ejemplo, las inestabilidades de ion-ciclotrón o espejo típicamente asociadas con la anisotropía perpendicular de temperatura.

Por otro lado, Ferrand y sus colaboradores [21], realizaron un estudio en la ciudad de Francia, investigó las leyes exactas en turbulencia magnetohidrodinámica incompresible, realizan una comparación entre varias leyes exactas existentes en turbulencias Hall Magnetohidrodinámica Incompresible (HMHDI) para mostrar su equivalencia, a pesar de que provienen de diferentes derivaciones matemáticas. Utilizaron la homogeneidad estadística, revisaron la ley propuesta por Hellinger et al. [20] y demostraron que puede escribirse, después de ser corregido por un factor multiplicativo, en una forma más compacta que implica sólo términos de flujo expresados como incrementos de los campos

turbulentos. La contribución de Hall de esta ley se prueba y se compara con otras leyes por Galtier [18], Banerjee and Galtier [32] utilizando simulaciones numéricas directas de turbulencia de electrones tridimensionales MHD con un campo magnético medio moderado. Se muestra que las leyes estudiadas son equivalentes en el rango de inercia, ofreciendo así varias opciones sobre la formulación a utilizar según las necesidades finalmente recomiendan utilizar una expresión independiente del campo guía medio para analizar datos numéricos o in situ de la nave espacial.

Recientemente, Vásconez et al. [4], en el año 2021, realizó un estudio en Quito, Ecuador, investigó las propiedades locales y globales de la transferencia de energía en modelos de turbulencia de plasma, en el marco de SND previamente investigado por Perrone et al. [33]. En su trabajo, Hall - Magnetohydrodynamic (HMHD), Fluido de Landau (FL), y simulaciones bidimensionales híbridas de Vlasov-Maxwell (HVM) en regímenes turbulentos, realizaron en condiciones de plasma sin colisión, considerando un campo magnético ambiental fuera del plano. La difusividad magnética se introdujo cuidadosamente en los modelos de fluidos. Los campos o los resultados obtenidos a partir de estas simulaciones nos permiten explorar diferentes escalas vinculadas a su respectivo rango de validez. En esta investigación utilizaron tres modelos numéricos, a saber, HMHD, LF y HVM, que describen bajo la misma configuración 2D un plasma sin colisiones, en condiciones típicas del viento del plasma Solar, en un estado turbulento cuasi desarrollado. Sus análisis se basaron en la transferencia de energía local y global de este estado, para este alcance, el proxy heurístico LET se calculó en las tres simulaciones numéricas antes mencionadas (que usan esquemas numéricos diferentes) bajo las mismas condiciones iniciales, dando como resultado similitud.

2.2 El Sol

El Sol es la estrella más cercana a nuestro planeta y a la vez es un gigantesco laboratorio natural donde se puede observar y estudiar gran cantidad de fenómenos físicos. Esta compuesto por Hidrógeno ($\sim 75\%$), Helio ($\sim 24\%$) y otros elementos ($\sim 1\%$), como Oxígeno, Nitrógeno y Carbono [34, 35].

Como se puede observar en la Figura 2.1, el Sol está estructurado por un núcleo, una zona radiativa, una zona convectiva, la fotosfera, la cromosfera, la región de transición y

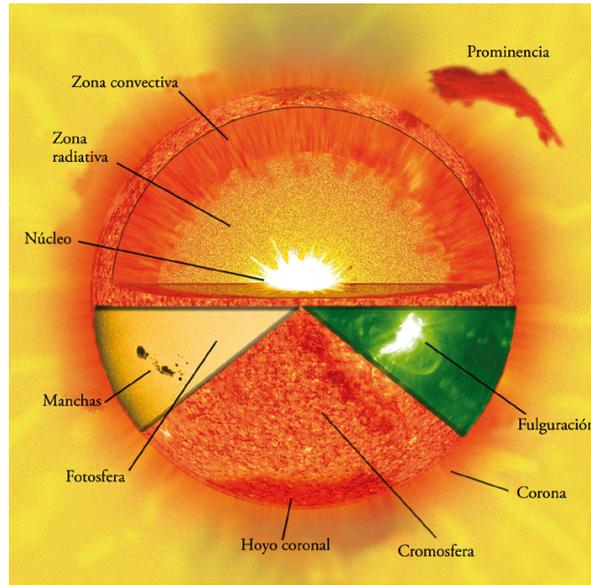


Figura 2.1: Estructura solar, de acuerdo a los más recientes modelos [2].

la corona solar. En el núcleo se produce energía en forma de radiación electromagnética, que viaja a través de la zona radiativa hasta alcanzar la superficie solar (fotosfera). En la zona convectiva, la energía es transportada por convección. En la fotosfera, se pueden observar manchas solares, fáculas (zonas brillantes) y también la parte superior de las células de la zona convectiva. En la cromosfera, se observan playas cromosféricas que son dominadas por los campos magnéticos, filamentos o protuberancias (que se cree que son tubos helicoidales de plasma y campo magnético). La región de transición, es la capa que separa la cromosfera y la corona solar, allí la densidad cae bruscamente y aumenta la temperatura a niveles extremos que va de $\sim 10^4$ K a $\sim 10^6$ K [36]. La corona solar, es la capa más externa del Sol y se encuentra a temperaturas coronales de millones de grados Kelvin. Aquí los átomos se encuentran altamente ionizados. La corona solar, presenta configuraciones de campo magnético abiertas y cerradas. Las regiones de campo magnético abierto son las zonas que al ser observadas desde el Sistema Solar lucen como oscuras, también llamados huecos coronales. En esta zona se transporta el plasma a la heliósfera y al medio interplanetario, formando lo que se conoce como SW. En las regiones de campo magnético cerradas (zonas brillantes) el campo magnético y la densidad son más altos que en el resto de la corona, es un lugar propicio para el confinamiento del plasma [2].

2.3 El Plasma

Una vez que se ha presentado la fuente principal de plasma en nuestro Sistema Solar, se puede explicar algunas de sus características. El plasma es considerado como el tercer estado de la materia ocupa 99,9% de la materia visible de nuestro universo. Es una forma de gas parcial o totalmente ionizado, producido al elevar la temperatura de un gas neutro o al estar en presencia de un campo electromagnético fuerte, de modo que las especies cargadas (iones positivos, iones negativos, electrones) puedan desprenderse de las partículas neutras (átomos) y vagar por el gas. Macroscópicamente, el plasma no se diferencia mucho de un gas neutro, ya que tiende a conservar una neutralidad global de cargas (contiene tantas cargas positivas como negativas). Sin embargo, las porciones microscópicas del plasma pueden mostrar grandes diferencias en las densidades de carga, lo que lleva a una variedad de efectos que hacen que los plasmas se comporten de manera muy diferente al gas neutro. Esta particularidad se denomina cuasi-neutralidad, es decir, más allá de una escala espacial y temporal específica, un plasma es casi neutro [2].

El grado de colisionalidad de las partículas que conforman el plasma es un factor determinante para su comportamiento. En los plasmas con colisiones internas abundantes, el movimiento de las partículas cargadas está dictado por el campo electromagnético macroscópico, pero también por su interacción con las partículas vecinas a través de las fuerzas de Coulomb. En esta situación, sus movimientos estarán correlacionados hasta cierto punto y serán representativos del comportamiento global del plasma. Los plasmas no colisionales, son plasmas diluidos en los que las partículas cargadas tienen poca o ninguna interacción entre sí. Debido a esto, cada partícula tendrá su propio comportamiento, que puede ser totalmente diferente al movimiento global del plasma y es este tipo de plasma el que se estudia en este trabajo de titulación, debido al gran interés en los plasmas espaciales [7]. Físicamente hablando, la interacción básica de un plasma es de carácter electromagnético, es decir; donde se encuentran relacionados estrechamente los campos eléctricos $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$ y magnéticos $\mathbf{B}(\mathbf{x}, t)$. Campos que obedecen las ecuaciones de Maxwell:

$$\text{Maxwell - Gauss: } \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_{\epsilon}}{\epsilon_0}; \quad (2.1)$$

$$\text{Maxwell - Gauss: } \nabla \cdot \mathbf{B} = \mathbf{0}; \quad (2.2)$$

$$\text{Maxwell - Faraday: } \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}; \quad (2.3)$$

$$\text{Maxwell - Ampere: } \nabla \times \mathbf{B} = \nabla \cdot \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (2.4)$$

donde ρ y \mathbf{J} son las fuentes del campo electromagnético.

2.4 El Viento Solar

El viento solar es un flujo magnetizado, formado de partículas cargadas cuasi no colisionales, que se entrelaza con los campos eléctricos y magnéticos originados en el Sol [1, 7]. Debido a su expansión radial, está en constante interacción con la magnetosfera. El SW presenta dos regímenes: viento solar rápido, asociado a los huecos coronales de las regiones polares del Sol, caracterizado por velocidades de $\sim 700 - 800$ km/s y el viento lento, asociado a los huecos coronales, que están ubicados en las regiones ecuatoriales y poseen velocidades de ~ 400 km/s [3]. En la Figura 2.2 se aprecian tres órbitas polares del satélite Ulysses fotografiando la superficie solar. El panel (a) muestra la polaridad característica del régimen de viento lento. Las líneas rojas muestran líneas de campo magnético que se alejan del Sol, mientras que las líneas azules ilustran aquellas líneas que se dirigen radialmente hacia el Sol. Claramente, en este régimen, la dirección de las líneas de campo se distribuyen equitativamente entre las regiones norte y sur del ecuador solar. La ausencia de estas líneas de campo en la zona ecuatorial también es característica. El régimen de viento rápido se muestra en el panel (b) cuyas características son consistentes con la máxima actividad solar. En este caso, no se puede diferenciar entre polaridades latitudinales. Finalmente, en la tercera órbita, panel (c) se aprecia la inversión de la polaridad del campo magnético interplanetario, esto debido a que el campo magnético cambia aproximadamente cada 11 años [2].

Debido a la alta conductividad, el SW arrastra consigo al campo magnético solar. En su expansión por el medio interplanetario, el SW interactúa con el campo magnético de la Tierra, conocido como magnetosfera. En la Figura 2.3 se observa la estructura

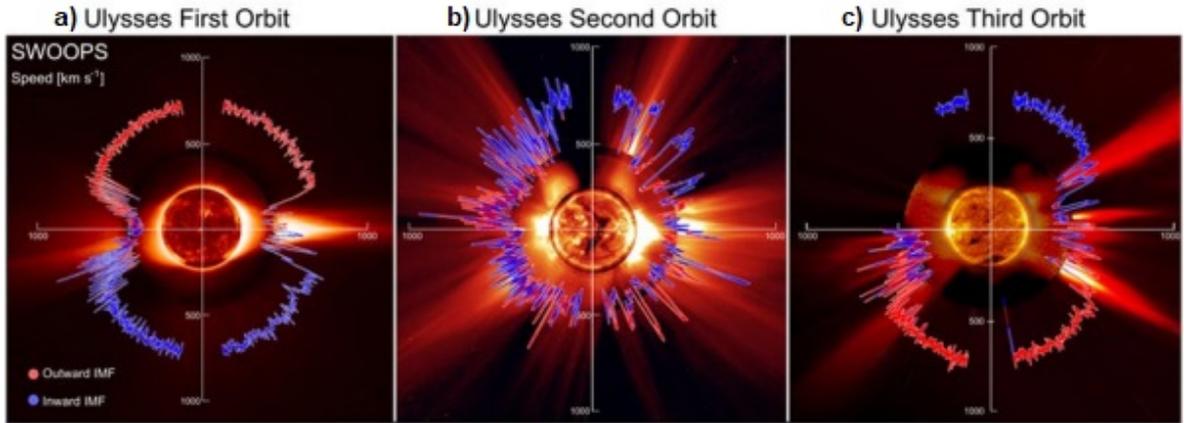


Figura 2.2: Velocidad y campo magnético del viento solar, medido por el satélite Ulyses. Las líneas de color azul representan la dirección del campo magnético interplanetario expedido radialmente desde la superficie solar hacia el Sistema Solar. Las líneas de color rojo representan el campo magnético interplanetario dirigido hacia la superficie solar [3].

general de la magnetosfera. En esta se distinguen tres grandes regiones: la onda de choque, la magnetopausa y la magnetofunda. La onda de choque se forma debido a que el SW es supermagnetosónico (rápido). La magnetopausa es la frontera magnética entre el campo magnético terrestre y el SW. La magnetofunda es relativamente delgada, y es donde se confina el plasma caliente. Aquí, el viento solar pasa del régimen supermagnetosónico al submagnetosónico (lento) [2]. En la Tabla 2.1 y Tabla 2.2, se

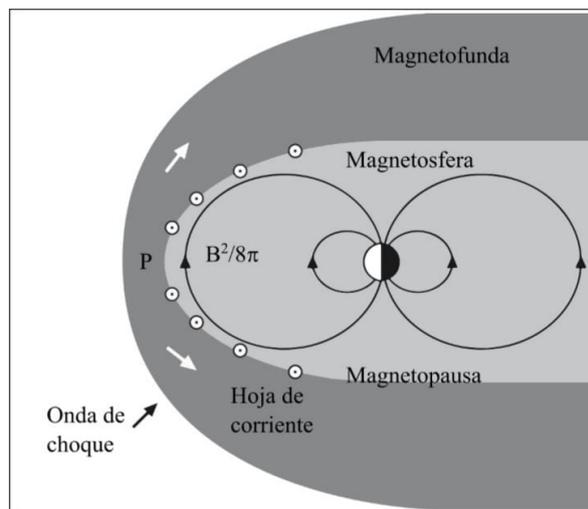


Figura 2.3: Esquema de la magnetosfera terrestre. Onda de choque, Magnetopausa y Magnetofunda [2].

presenta un resumen de algunos parámetros físicos del viento solar, como velocidad, frecuencias y longitudes, medidos a ~ 1 unidad astronómica ($1 \text{ AU} = 1,496 \times 10^8 \text{ km}$, equivalente a la distancia promedio entre la Tierra y el Sol) [1].

Tabla 2.1: Valores típicos de los parámetros del SW, medidos por Helios 2 a 1 UA [1].

Parámetros SW	Viento Lento	Viento rápido
Densidad numérica	$\sim 15 \text{ cm}^{-3}$	$\sim 4 \text{ cm}^{-3}$
Velocidad aparente	$\sim 350 \text{ km/s}$	$\sim 600 \text{ km/s}$
Temperatura de protones (T_p)	$\sim 5 \times 10^4 \text{ K}$	$\sim 2 \times 10^5 \text{ K}$
Temperatura de electrones (T_e)	$\sim 2 \times 10^5 \text{ K}$	$\sim 1 \times 10^5 \text{ K}$
Temperatura de partículas- α	$\sim 2 \times 10^5 \text{ K}$	$\sim 8 \times 10^5 \text{ K}$
Campo Magnético	$\sim 6 \text{ nT}$	$\sim 6 \text{ nT}$
Velocidad de Alfvén	$\sim 30 \text{ km/s}$	$\sim 60 \text{ km/s}$

El SW ofrece a la comunidad científica una oportunidad única para estudiar la física del plasma. En la Tabla 2.1 se indica las características de este viento, que corresponden a un flujo supersónico y superalfvénico (su velocidad es mucho mayor que la velocidad del sonido y la velocidad del Alfvén $C_A = |\mathbf{B}|/\sqrt{4\pi\rho}$, donde $|\mathbf{B}|$ es la magnitud del campo magnético y ρ es la densidad de masa del plasma), en cuyo interior los experimentos espaciales han proporcionado una gran cantidad de datos, con una resolución que no está disponible en ningún laboratorio en la Tierra [7].

En la Tabla 2.2, se destaca la escala espacial que caracteriza los plasmas, conocida como longitud de Debye (λ_D). Radio dentro de la cual existe neutralidad de carga y a la que le corresponde una escala de tiempo $\tau_P = 2\pi/\omega_P$, donde ω_P es la frecuencia de plasma. τ_P puede definirse como el tiempo requerido para que un plasma restablezca su estado original si una de sus variables dinámicas (densidad, velocidad del fluido, presión, etc.) sufre una pequeña perturbación (de primer orden). λ_D y ω_P son parámetros fundamentales de cada tipo de especie cargada que conforma el plasma. Se nota que la longitud iónica de Debye y la frecuencia iónica de plasma se denotan por λ_{D_i} y ω_{D_i} , respectivamente. Para los electrones, los parámetros respectivos son λ_{D_e} y ω_{D_e} . Precisamente, la Tabla 2.2 presenta las magnitudes aproximadas características del viento lento y rápido. En función de magnitudes físicas conocidas, las longitudes de Debye y frecuencias de plasma mencionadas se detallan como:

Parámetro	λ_{D_i}	λ_{D_e}	ω_{D_i}	ω_{D_e}
Expresión	$\sqrt{\frac{\epsilon_0 k_B T_i}{n_i Z^2 e^2}}$	$\sqrt{\frac{\epsilon_0 k_B T_e}{n_e Z^2 e^2}}$	$\sqrt{\frac{n_i Z^2 e^2}{m_i \epsilon_0}}$	$\sqrt{\frac{n_e Z^2 e^2}{m_e \epsilon_0}}$

donde los subíndices i y e corresponden a iones y electrones, respectivamente. n es la densidad numérica de cada especie, Z es la valencia iónica, T es la temperatura, e es

Tabla 2.2: Valores típicos de los parámetros del SW a 1 UA . Estos valores se calcularon usando los parámetros de la 2.1[1].

	Parámetros SW	Viento Lento	Viento rápido
Velocidades	Ion sound	~ 60 km/s	~ 60 km/s
	Proton Thermal	~ 35 km/s	~ 70 km/s
	Electron Thermal	~ 3000 km/s	~ 2000 km/s
Frecuencias	Proton cyclotron	~ 0.1 Hz	~ 0.1 Hz
	Electron cyclotron	$\sim 2 \times 10^2$ Hz	$\sim 2 \times 10^2$ Hz
	Plasma	$\sim 2 \times 10^5$ Hz	$\sim 1 \times 10^5$ Hz
	Proton-proton collision	$\sim 2 \times 10^{-6}$ Hz	$\sim 1 \times 10^{-7}$ Hz
Longitudes	Debye	~ 4 m	~ 15 m
	Proton gyroradius	~ 130 km	~ 260 km
	Electron gyroradius	~ 2 km	~ 1.3 km
	Proton-proton collision	~ 1.2 AU	~ 40 AU

la carga electrónica, m corresponde a la masa y, finalmente, ε_0 es la permitividad del espacio vacío. A partir de estas definiciones, se nota que para un plasma con $Z = 1$, es decir; donde se asume cuasi-neutralidad [1],

$$\frac{\lambda_{D_i}}{\lambda_{D_e}} \approx \sqrt{\frac{T_i}{T_e}}, \frac{\omega_{P_i}}{\omega_{P_e}} \approx \sqrt{\frac{m_e}{m_i}}. \quad (2.5)$$

2.5 Modelos físicos de un plasma

Un plasma se puede tratar microscópicamente o macroscópicamente, según sea el caso de estudio. El enfoque microscópico se conoce como enfoque cinético, mientras que el tratamiento macroscópico se denomina enfoque fluido. A continuación, se introduce una breve y esquemática presentación del enfoque cinético del plasma sin entrar en derivaciones formales y detalladas.

2.5 Enfoque cinético del plasma

En el enfoque cinético, un plasma es considerado como un sistema de partículas cargadas que interactúan entre sí (iones y electrones). En algunos casos también pueden contener un número considerable de átomos neutros. En la teoría cinética del plasma se estudia la evolución temporal del plasma con la ayuda de las funciones de distribución de probabilidad. Este enfoque tiene en cuenta el comportamiento colectivo de las partículas, así como su comportamiento individual. Por lo tanto, se necesita conocer la naturaleza de las fuerzas de interacción microscópica, junto a las fuerzas macroscópicas externas, para construir una descripción cinética de un fenómeno físico en el sistema [37],[38], Banerjee

Partiendo de la función de distribución $f_j = f_j(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$, definida como la densidad de partículas de la especie j del plasma en el espacio de fases seis-dimensional (\mathbf{x}, \mathbf{v}) . Esto es, el número de partículas en un elemento infinitesimal de volumen $d^3v d^3x = dv_z dv_y dv_x dx dy dz$ en torno al punto (\mathbf{x}, \mathbf{v}) y en el instante t . De aquí, se deduce que el número total de partículas N_j de la especie j del plasma es

$$N_j(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_j(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d^3v d^3x. \quad (2.6)$$

Integrando apropiadamente esta ecuación, se pueden definir los momentos de orden cero, uno y dos de la función de distribución, respectivamente:

$$n_j(\mathbf{x}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_j(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d^3v; \quad (2.7)$$

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \sum_j q_j \int d^3v f_j(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t); \quad (2.8)$$

$$\mathbf{u}_j(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{n_j(\mathbf{x}, t)} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{v} f_j(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d^3v; \quad (2.9)$$

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}, t) = \sum_j q_j \int d^3v \mathbf{v} f_j(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = \sum_j q_j n_j(\mathbf{x}, t) \mathbf{u}_j(\mathbf{x}, t); \quad (2.10)$$

$$P_j^{ik}(\mathbf{x}) = m \int_{-\infty}^{\infty} (v_i - \mathbf{u}_i^j(\mathbf{x}, t))(v_k - \mathbf{u}_k^j(\mathbf{x}, t)) f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d^3v, \quad (2.11)$$

donde, la ecuación (2.7) define la densidad numérica, (2.8) es la densidad de carga total, (2.9) estima la velocidad fluida, la ecuación (2.10) es la densidad de corriente total del plasma y (2.11) corresponde al tensor de presión. Entonces, para estudiar un

plasma con colisiones internas, el dominio de la ecuación de velocidad para las especies j , esta dada por la ecuación de Boltzmann, que describe la evolución temporal de la función de distribución f_j [38, 39, 40],

$$\frac{\partial f_j}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \frac{\partial f_j}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{a} \cdot \frac{\partial f_j}{\partial \mathbf{v}} = \left(\frac{\delta j}{\delta t} \right)_{\text{colisiones}}, \quad (2.12)$$

donde \mathbf{u} es el vector de velocidad para la especie j , \mathbf{a} es la aceleración y esta dada por la fuerza neta de Lorentz asociada a algún campo eléctrico y/o magnético total, $\mathbf{F}_L = m\mathbf{a} = m(d\mathbf{v}/dt) = q_j[\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}]$. El término del lado derecho es un operador colisional, que describe las correlaciones entre las partículas [41, 42]. En caso que se desprece los efectos de colisión de corto alcance entre las partículas, el término “colisional” de la parte derecha de la última ecuación desaparece,

$$\frac{\partial f_j}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \frac{\partial f_j}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{a} \cdot \frac{\partial f_j}{\partial \mathbf{v}} = 0. \quad (2.13)$$

Esta ecuación es conocida como la ecuación de Vlasov.

2.5 Enfoque fluido del plasma

Además de la representación cinética detallada anteriormente, los plasmas también se pueden describir mediante un enfoque fluido. En este acercamiento, la dinámica del plasma se describe solo en términos de variables macroscópicas (que a su vez se derivan del enfoque cinético) y no incluye detalles microscópicos. La descripción fluida de un plasma se puede expresar usando las definiciones de momentos de la ecuación de Vlasov. Mediante integraciones sucesivas en el espacio de velocidades de la ecuación (2.13) y tomando en consideración las definiciones (2.8) y (2.10), se obtiene la *ecuación de continuidad* para la especie j ,

$$\frac{\partial n_j}{\partial t} + \nabla \cdot (n_j \mathbf{u}_j) = 0. \quad (2.14)$$

Si se usa la definición de presión (2.11), se multiplica el resultado por la velocidad microscópica \mathbf{u} y se integra la ecuación en el espacio de velocidades, se tiene la *ecuación*

de *momentum* para cada especie j ,

$$n_j m_j \frac{d\mathbf{u}_j}{dt} = n_j q_j (\mathbf{E} + \mathbf{u}_j \times \mathbf{B}) - \Delta P_j, \quad (2.15)$$

correspondiente a la ecuación de Navier-Stokes en presencia de fuerzas electromagnéticas. También se pueden derivar otras ecuaciones para momentos superiores, como la ecuación de evolución de la energía,

$$n_j \frac{d}{dt} \left(\frac{m_j u_j^2}{2} \right) = n_j q_j \mathbf{u}_j \cdot \mathbf{E} - \mathbf{u}_j \cdot \nabla P_j. \quad (2.16)$$

En consecuencia, el sistema de ecuaciones resultante, sin importar el orden máximo que se elija para calcular sus momentos, no se cierra, ya que cada ecuación que se agrega al sistema introduce una nueva variable. Por lo tanto, para cerrar el sistema se requiere una ecuación que conecte las variables de orden superior con las variables de orden inferior. Por ejemplo, es usual usar una ecuación de estado,

$$P = n_j^{\gamma_j} \quad (2.17)$$

donde P es la presión total, γ_j es el índice politrópico; en particular, cuando $\gamma = 1$ se recupera el caso isotérmico, $\gamma = 0$ corresponde al caso isobárico (presión constante) y cuando $\gamma \rightarrow \infty$ se recupera el caso isométrico (densidad constante). se nota que en el caso de plasmas ionizados “calientes”, no tienen colisiones suficientes para isotropizar el sistema [37, 41].

2.6 Magnetohidrodinámica

En las frecuencias más bajas, equivalente a escalas temporales mayores a las consideradas hasta el momento se puede considerar a iones y electrones como unidos. En este caso, el plasma se comporta como un fluido conductor de electricidad. Las ecuaciones que describirían este sistema son conocidas como el modelo de la Magnetohidrodinámica (MHD) ideal. Este modelo simplificado de plasma supone que los electrones e iones están tan fuertemente magnetizados que el plasma se comporta como si las líneas de campo magnético estuviesen atadas a él, lo que equivale a considerar frecuencias de interés mucho menores que las ciclotrónicas de cada especie j [41].

Las ecuaciones de la MHD pueden obtenerse mediante la combinación de las ecuaciones de Navier-Stokes (2.14)-(2.15) y las ecuaciones de Maxwell (2.1)-(2.4) [43]. Para iniciar, se considera un modelo monofluido, es decir, todas las especies se comportan como un solo fluido. Se toma en cuenta el modelo más simplista de un fluido: formado únicamente por iones H^+ y electrones, etiquetados como especies i y e , respectivamente. se tiene definir la densidad de masa, $\rho = m_i n_i + m_e n_e$, la densidad de carga, $\rho_c = q_i n_i + q_e n_e$ y la velocidad del fluido $\mathbf{u} = (m_i n_i \mathbf{u}_i + m_e n_e \mathbf{u}_e)/\rho$. Con estas definiciones, y al sumar las ecuaciones (2.14), para ambas especies, se tiene

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0. \quad (2.18)$$

Claramente, la condición de incompresibilidad $\partial \rho / \partial t = 0$, aplicada a la ecuación previa, la convierte en

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2.19)$$

De manera similar, al sumar las ecuaciones (2.15), para ambas especies, se puede demostrar que

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right] = -\nabla P + \mathbf{f}_{\text{ext}}, \quad (2.20)$$

donde \mathbf{f}_{ext} son las fuerzas externas. A continuación, si se introduce la fuerza de Lorentz para una distribución de carga continua definida como $\mathbf{F} = \mathbf{J} \times \mathbf{B}$, donde $\mathbf{J} = \rho \mathbf{u}$ y la fuerza resistiva de viscosidad $(\rho \nu \nabla^2 \mathbf{u})$, con un coeficiente de viscosidad ν en el sistema y considerando una presión simple, la ecuación (2.20) se convierte en

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right] = -\nabla P + (\mathbf{J} \times \mathbf{B}) + (\rho \nu \nabla^2 \mathbf{u}), \quad (2.21)$$

donde el coeficiente $\nu = \eta / \rho$ (viscosidad cinemática). La incompresibilidad del flujo ecuación (2.19) elimina la posibilidad de propagación de todas las ondas sonoras de alta frecuencia, lo que se denomina: límite incompresible. El término no lineal en las últimas dos ecuaciones representa la derivada convectiva (o sustancial). Por supuesto, se puede agregar en el lado derecho de esta ecuación todas las fuerzas externas, que eventualmente actuarían sobre el fluido.

Finalmente, para completar el sistema de ecuaciones MHD se utiliza la ecuación de Maxwell-Àmpere (2.4). El segundo término del lado derecho de la ecuación de Ampère a menudo se descarta en los límites no relativistas y de cuasi neutralidad [44]. Entonces, la ecuación (2.4) se expresa como $\mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{B}/\mu_0$. Al reemplazar esta expresión en el término de la fuerza de Lorentz, la ecuación (2.21) se convierte en

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \left[\nabla P + \frac{(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}}{\mu_0} \right] + \nu \nabla^2 \mathbf{u}. \quad (2.22)$$

Si se desarrolla $(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}$ ¹,

$$\begin{aligned} \nabla(\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}) &= (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B} + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B}) \\ \nabla(B^2) &= 2(\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B} - (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} - (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} \\ \nabla(B^2) &= 2(\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B} - 2(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} \end{aligned}$$

con lo que $(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B} - \nabla(B^2)/2$. Término que se reemplaza en la ecuación (2.22), y se tiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} &= -\frac{1}{\rho} \nabla P + \frac{1}{\mu_0 \rho} \left[(\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B} - \frac{\nabla(B^2)}{2} \right] + \nu \nabla^2 \mathbf{u}, \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} &= -\frac{1}{\rho} \nabla P + \frac{1}{\mu_0 \rho} (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B} - \frac{1}{2\mu_0 \rho} \nabla(B^2) + \nu \nabla^2 \mathbf{u}, \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} &= -\frac{1}{\rho} \nabla P - \frac{1}{\rho} \nabla \left(\frac{B^2}{2\mu_0} \right) + \frac{1}{\mu_0 \rho} (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B} + \nu \nabla^2 \mathbf{u}, \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} &= -\nabla \left(\frac{P}{\rho} + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) + \frac{1}{\mu_0 \rho} (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B} + \nu \nabla^2 \mathbf{u}, \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} &= -\nabla P_{tot} + \left(\frac{\mathbf{B}}{\sqrt{\mu_0 \rho}} \cdot \nabla \right) \frac{\mathbf{B}}{\sqrt{\mu_0 \rho}} + \nu \nabla^2 \mathbf{u}. \end{aligned}$$

En esta etapa, se puede definir la normalización $\mathbf{b} = \mathbf{B}/\sqrt{\mu_0 \rho}$, con lo que la ecuación (2.22) se convierte en la primera ecuación de la MHD

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla P_{tot} + (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{b} + \nu \nabla^2 \mathbf{u}, \quad (2.23)$$

donde $P_{tot} = P + B^2/2$. Y además, $\nabla \cdot \mathbf{b} = 0$.

Para cerrar el sistema se puede usar una ecuación que describa la evolución temporal

¹Se desarrolla por medio de las fórmulas vectoriales de Jackson [45]: $\nabla(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = (\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{b} + (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{a} + \mathbf{a} \times (\nabla \times \mathbf{b}) + \mathbf{b} \times (\nabla \times \mathbf{a})$

del campo magnético. Si se parte desde la ecuación de Maxwell-Faraday (2.3), que propone una ecuación dinámica para \mathbf{B} en función de \mathbf{E} , se puede eliminar el campo eléctrico utilizando la ley de Ohm $\mathbf{J} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B})$. En su forma más simple, dentro de un conductor sólido, esta ley conecta la densidad de corriente al campo eléctrico a través de la conductividad σ . Aquí estamos en presencia de un fluido conductor cuyo movimiento en el campo magnético global contribuirá a la densidad de corriente por inducción. Esta contribución se reflejará en la ley de Ohm mediante la adición de un término $\mathbf{u} \times \mathbf{B}$, que conduce a modelos MHD resistivos. Entonces,

$$\nabla \times \mathbf{J} = \sigma \nabla \times \mathbf{E} + \sigma \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}). \quad (2.24)$$

A continuación, se utiliza la ecuación de Maxwell-Ampere (2.4) en donde se aplica el rotacional a los dos lados de la ecuación,

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{J}, \\ \nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) &= \mu_0 \nabla \times \mathbf{J}, \end{aligned}$$

de donde,

$$\nabla \times \mathbf{J} = \frac{\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B})}{\mu_0} \quad (2.25)$$

A partir de aquí, se reemplaza (2.25), la ecuación de Maxwell-Faraday (2.3) en la ecuación (2.24), y se tiene

$$\begin{aligned} \frac{\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B})}{\mu_0} &= \sigma \left(-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) + \sigma \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}), \\ \frac{\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B})}{\mu_0} \sigma &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}), \end{aligned}$$

La última expresión se modifica con la ecuación de Maxwell-Gauss (2.2) y la difusividad magnética $\eta = 1/\mu_0\sigma$, entonces

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) + \eta \nabla^2 \mathbf{B}. \quad (2.26)$$

Para el desarrollo de $\nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B})$, nuevamente, se utiliza identidades vectoriales co-

nocidas y la segunda ecuación de Maxwell (2.2)

$$\nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) = \mathbf{u}(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{u}) + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{B},$$

$$\nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{B} \quad (2.27)$$

Relación que, al reemplazarla en la ecuación (2.26), nos permite escribir:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{B} = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \eta \nabla^2 \mathbf{B}. \quad (2.28)$$

Para expresar esta expresión en unidades previamente introducidas, se puede dividir la ecuación (2.28) para $\sqrt{\mu_0 \rho}$. De esta manera, se tiene la segunda ecuación de la MHD,

$$\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{b} = (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \eta \nabla^2 \mathbf{b}, \quad (2.29)$$

En resumen, el sistema de ecuaciones que componen el modelo magnetohidrodinámico es:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla P_{tot} + (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{b} + \nu \nabla^2 \mathbf{u}, \quad (2.30)$$

$$\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} + (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{u} = (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \eta \nabla^2 \mathbf{b}, \quad (2.31)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (2.32)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{b} = 0, \quad (2.33)$$

$$P = n^\gamma. \quad (2.34)$$

2.7 Variables de Elsässer

Las variables de Elsässer nos permiten recuperar la forma fluida del sistema de ecuaciones del modelo MHD, acoplado el campo magnético al campo de velocidades. Para

proceder con este acoplamiento, primero, se suman las ecuaciones (2.30) y (2.31):

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{u} + \mathbf{b}) + (\mathbf{u} \cdot \nabla)(\mathbf{u} + \mathbf{b}) &= -\nabla P_{tot} + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + (\mathbf{b} \cdot \nabla)(\mathbf{u} + \mathbf{b}) + \eta \nabla^2 \mathbf{b}, \\ \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{u} + \mathbf{b}) + (\mathbf{u} \cdot \nabla)(\mathbf{u} + \mathbf{b}) - (\mathbf{b} \cdot \nabla)(\mathbf{u} + \mathbf{b}) &= -\nabla P_{tot} + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \eta \nabla^2 \mathbf{b}, \\ \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{u} + \mathbf{b}) + (\mathbf{u} \cdot \nabla - \mathbf{b} \cdot \nabla)(\mathbf{u} + \mathbf{b}) &= -\nabla P_{tot} + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \eta \nabla^2 \mathbf{b}, \\ \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{u} + \mathbf{b}) + [(\mathbf{u} - \mathbf{b}) \cdot \nabla](\mathbf{u} + \mathbf{b}) &= -\nabla P_{tot} + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \eta \nabla^2 \mathbf{b},\end{aligned}$$

Las combinaciones lineales entre \mathbf{u} y \mathbf{b} , nos permiten notar que esta última relación se puede escribir de manera aún más compacta, usando los cambios de variables: $\mathbf{u} + \mathbf{b} = \mathbf{z}^+ - \mathbf{C}_A$, $\mathbf{u} - \mathbf{b} = \mathbf{z}^- + \mathbf{C}_A$, $2\mathbf{u} = \mathbf{z}^+ + \mathbf{z}^-$, $\mathbf{u} = (\mathbf{z}^+ + \mathbf{z}^-)/2$, $\nu^+ = (\nu + \eta)/2$, $\nu^- = (\nu - \eta)/2$ [46, 15]. En particular, las variables z^+ y z^- son muy útiles cuando se quiere estudiar las correlaciones entre las fluctuaciones de velocidad y campo magnético. La última ecuación, en función de las variables de Elssässer, se escribiría como:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{z}^+ - \mathbf{C}_A) + [(\mathbf{z}^- + \mathbf{C}_A) \cdot \nabla](\mathbf{z}^+ - \mathbf{C}_A) &= -\nabla P_{tot} + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \eta \nabla^2 \mathbf{b}, \\ \frac{\partial \mathbf{z}^+}{\partial t} - \frac{\partial \mathbf{C}_A}{\partial t} + [(\mathbf{z}^- + \mathbf{C}_A) \cdot \nabla](\mathbf{z}^+ - \mathbf{C}_A) &= -\nabla P_{tot} + \nu \nabla^2 \left(\frac{z^+ + z^-}{2} \right) + \eta \nabla^2 \mathbf{b}, \\ \frac{\partial \mathbf{z}^+}{\partial t} + [(\mathbf{z}^- + \mathbf{C}_A) \cdot \nabla] \mathbf{z}^+ &= -\nabla P_{tot} + \nu^+ \nabla^2 \mathbf{z}^+ + \nu^- \nabla^2 \mathbf{z}^- + \eta \nabla^2 \mathbf{b} + \frac{\partial \mathbf{C}_A}{\partial t} + [(\mathbf{z}^- + \mathbf{C}_A) \cdot \nabla] \mathbf{C}_A \\ &\quad - \left(\frac{\eta}{2} \right) \nabla^2 (\mathbf{z}^+ - \mathbf{z}^-), \\ \frac{\partial \mathbf{z}^+}{\partial t} + [(\mathbf{z}^- + \mathbf{C}_A) \cdot \nabla] \mathbf{z}^+ &= -\nabla P_{tot} + \nu^+ \nabla^2 \mathbf{z}^+ + \nu^- \nabla^2 \mathbf{z}^- + \eta \nabla^2 \mathbf{b} + \frac{\partial \mathbf{C}_A}{\partial t} \\ &\quad + [(\mathbf{z}^- + \mathbf{C}_A) \cdot \nabla] \mathbf{C}_A - \eta \nabla^2 \mathbf{C}_A,\end{aligned}$$

En el caso ideal, se eliminan los términos que contienen la difusividad magnética η y la variación de la velocidad de Alfvén \mathbf{C}_A ,

$$\partial_t \mathbf{z}^+ + (\mathbf{z}^- \cdot \nabla) \mathbf{z}^+ = -\nabla P_{tot} + \nu^+ \nabla^2 \mathbf{z}^+ + \nu^- \nabla^2 \mathbf{z}^-. \quad (2.35)$$

se nota que esta relación tiene la misma forma de la ecuación de Navier-Stokes para el

campo z^+ . Con un poco más de Álgebra, se puede restar las ecuaciones (2.23) y (2.29):

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{u} - \mathbf{b}) + (\mathbf{u} \cdot \nabla)(\mathbf{u} - \mathbf{b}) &= -\nabla P_{tot} + \nu \nabla^2 \mathbf{u} - (\mathbf{b} \cdot \nabla)(\mathbf{u} - \mathbf{b}) - \eta \nabla^2 \mathbf{b}, \\ \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{u} - \mathbf{b}) + (\mathbf{u} \cdot \nabla + \mathbf{b} \cdot \nabla)(\mathbf{u} - \mathbf{b}) &= -\nabla P_{tot} + \nu \nabla^2 \mathbf{u} - \eta \nabla^2 \mathbf{b}.\end{aligned}$$

y al usar el mismo cambio de variable, en función de z^+ y z^- , se tiene:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{z}^- + \mathbf{C}_A) + [(\mathbf{z}^+ - \mathbf{C}_A) \cdot \nabla](\mathbf{z}^- + \mathbf{C}_A) &= -\nabla P_{tot} + \frac{\nu}{2} \nabla^2 \mathbf{z}^+ + \frac{\nu}{2} \nabla^2 \mathbf{z}^- - \eta \nabla^2 \mathbf{b}, \\ \frac{\partial \mathbf{z}^-}{\partial t} + [(\mathbf{z}^+ - \mathbf{C}_A) \cdot \nabla] \mathbf{z}^- &= -\nabla P_{tot} + \frac{\nu}{2} \nabla^2 \mathbf{z}^+ + \frac{\nu}{2} \nabla^2 \mathbf{z}^- - \eta \nabla^2 \mathbf{b} - \frac{\partial \mathbf{C}_A}{\partial t} - [(\mathbf{z}^+ - \mathbf{C}_A) \cdot \nabla] \mathbf{C}_A \\ &\quad + \left(\frac{\eta}{2}\right) \nabla^2 \mathbf{z}^+ - \left(\frac{\eta}{2}\right) \nabla^2 \mathbf{z}^- + \left(\frac{\eta}{2}\right) \nabla^2 \mathbf{z}^- - \left(\frac{\eta}{2}\right) \nabla^2 \mathbf{z}^+, \\ \frac{\partial \mathbf{z}^-}{\partial t} + [(\mathbf{z}^+ - \mathbf{C}_A) \cdot \nabla] \mathbf{z}^- &= -\nabla P_{tot} + \left(\frac{\nu - \eta}{2}\right) \nabla^2 \mathbf{z}^+ + \left(\frac{\nu + \eta}{2}\right) \nabla^2 \mathbf{z}^- - \eta \nabla^2 \mathbf{b} \\ &\quad - \frac{\partial \mathbf{C}_A}{\partial t} - [(\mathbf{z}^+ - \mathbf{C}_A) \cdot \nabla] \mathbf{C}_A + \left(\frac{\eta}{2}\right) \nabla^2 \mathbf{z}^+ - \left(\frac{\eta}{2}\right) \nabla^2 \mathbf{z}^-, \\ \frac{\partial \mathbf{z}^-}{\partial t} + [(\mathbf{z}^+ - \mathbf{C}_A) \cdot \nabla] \mathbf{z}^- &= -\nabla P_{tot} + \nu^- \nabla^2 \mathbf{z}^+ + \nu^+ \nabla^2 \mathbf{z}^- - \eta \nabla^2 \mathbf{b} - \frac{\partial \mathbf{C}_A}{\partial t} \\ &\quad - [(\mathbf{z}^+ - \mathbf{C}_A) \cdot \nabla] \mathbf{C}_A + \left(\frac{\eta}{2}\right) \nabla^2 (\mathbf{z}^+ - \mathbf{z}^-), \\ \frac{\partial \mathbf{z}^-}{\partial t} + [(\mathbf{z}^+ - \mathbf{C}_A) \cdot \nabla] \mathbf{z}^- &= -\nabla P_{tot} + \nu^- \nabla^2 \mathbf{z}^+ \\ &\quad + \nu^+ \nabla^2 \mathbf{z}^- - \frac{\partial \mathbf{C}_A}{\partial t} - [(\mathbf{z}^+ - \mathbf{C}_A) \cdot \nabla] \mathbf{C}_A + \eta \nabla^2 \mathbf{C}_A.\end{aligned}$$

Una vez más, se puede escribir el caso ideal si se eliminan los términos que contienen la difusividad magnética η y la variación temporal de C_A ,

$$\partial_t \mathbf{z}^- + (\mathbf{z}^+ \cdot \nabla) \mathbf{z}^- = -\nabla P_{tot} + \nu^+ \nabla^2 \mathbf{z}^- + \nu^- \nabla^2 \mathbf{z}^+, \quad (2.36)$$

En este punto se unifican las ecuaciones (2.35) y (2.36) en una sola expresión. El cambio de variable de Elsässer, conduce a la forma más simétrica de las ecuaciones MHD, en el caso incompresible [47?]. Las ecuaciones de MHD se escriben

$$\partial_t z^\pm + (\mathbf{z}^\mp \cdot \nabla) \mathbf{z}^\pm = -\nabla P_{tot} + \nu^+ \nabla^2 \mathbf{z}^\pm + \nu^- \nabla^2 \mathbf{z}^\mp, \quad (2.37)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{z}^\pm = 0, \quad (2.38)$$

donde $\nu_{\pm} = \nu \pm \eta/2$ y también se puede agregar un término de fuerza \mathbf{F}^{\pm} , que son términos eventuales de forzamiento externo, al lado derecho de la ecuación 2.37.

Expresar las ecuaciones MHD en términos de las variables de Elsässer es muy útil porque hace más fácil e intuitivo el análisis de los fenómenos de procesos de turbulencia. Es importante notar que el término no lineal es proporcional a las dos variables, entonces la no linealidad desaparece si uno de los campos de Elsässer se anula, es decir, $\mathbf{z}^{\mp} = 0$ y $\mathbf{z}^{\pm} = 0$ es un resultado de ecuaciones no lineales (fluctuaciones Alfvénicas). Se concluye que las ecuaciones MHD tienen la misma estructura que las ecuaciones de Navier-Stokes. La principal diferencia proviene del hecho de que el acoplamiento no lineal ocurre solo entre fluctuaciones que se propagan en direcciones opuestas [48].

2.8 Ecuación de von Kármán-Howarth

Para facilitar la manipulación matemática se adoptó a la convección de suma de Einstein, para índices repetidos [49], y la notación tensorial, donde $\mathbf{z}^{\pm} = z^i$, $\mathbf{z}^{\mp} = z^j$, $\nabla = \partial^i$, $\nabla^2 = \partial_j \partial^j = \partial^{jj} = \partial_{jj}$ [11]. En esta notación, las ecuaciones MHD se expresan directamente como:

$$\partial_t z^i + z_j \partial^j z^i = -\partial^j p + \nu^+ \partial_j \partial^j z^i + \nu^- \partial_j \partial^j z_i, \quad (2.39)$$

Por otra parte, al evaluar todos los campos y operadores en una locación desplazada por \mathbf{r} , se puede definir que $\mathbf{z}^{\pm}(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \equiv \mathbf{z}^{\pm}(\mathbf{x}') = z^{i'}$ y, consecuentemente, $\nabla \equiv \partial^{i'}$, $\nabla^2 \equiv \partial_{j'} \partial^{j'} = \partial^{j'j'} = \partial_{j'j'}$ [49]. En este caso, $z^{i'}$ también cumpliría la ecuación (2.39),

$$\partial_t z^{i'} + z_{j'} \partial^{j'} z^{i'} = -\partial^{j'} p' + \nu^+ \partial_{j'} \partial^{j'} z^{i'} + \nu^- \partial_{j'} \partial^{j'} z_{i'}, \quad (2.40)$$

Si se multiplica la ecuación (2.39) por $z_{i'}$ y a la ecuación (2.40) por z_i , se tiene

$$z_{i'} (\partial_t z^i + z_j \partial^j z^i = -\partial^j p + \nu^+ \partial_j \partial^j z^i + \nu^- \partial_j \partial^j z_i), \quad (2.41)$$

y,

$$z_i (\partial_t z^{i'} + z_{j'} \partial^{j'} z^{i'} = -\partial^{j'} p' + \nu^+ \partial_{j'} \partial^{j'} z^{i'} + \nu^- \partial_{j'} \partial^{j'} z_{i'}). \quad (2.42)$$

Cuando se suma las ecuaciones (2.41) y (2.42), se acopla,

$$z_{i'}\partial_t z^i + z_i\partial_t z^{i'} + z_{i'}z_j\partial^j z^i + z_i z_{j'}\partial^{j'} z^{i'} = -z_{i'}\partial^j p - z_i\partial^{j'} p' + \nu^+(z_{i'}\partial_j\partial^j z^i + z_i\partial_{j'}\partial^{j'} z^{i'}) + \nu^-(z_{i'}\partial_j\partial^j z_i + z_i\partial_{j'}\partial^{j'} z_{i'}),$$

$$\partial_t \langle z^i z_{i'} \rangle + z_{i'}z_j\partial^j z^i + z_i z_{j'}\partial^{j'} z^{i'} = -z_{i'}\partial^j p - z_i\partial^{j'} p' + \nu^+(z_{i'}\partial_j\partial^j z^i + z_i\partial_{j'}\partial^{j'} z^{i'}) + \nu^-(z_{i'}\partial_j\partial^j z_i + z_i\partial_{j'}\partial^{j'} z_{i'}),$$

y tras un poco de manipulación matemática, se puede estimar un balance de energía local en turbulencia isotrópica homogénea. Para ello, se aplica el promedio espacial $\langle \dots \rangle$ a toda la última ecuación,

$$\partial_t \langle z^i z_{i'} \rangle + \langle z_{i'}z_j\partial^j z^i \rangle + \langle z_i z_{j'}\partial^{j'} z^{i'} \rangle = -\langle z_{i'}\partial^j p \rangle - \langle z_i\partial^{j'} p' \rangle + \nu^+ \langle z_{i'}\partial_j\partial^j z^i + z_i\partial_{j'}\partial^{j'} z^{i'} \rangle + \nu^- \langle \nu^-(z_{i'}\partial_j\partial^j z_i + z_i\partial_{j'}\partial^{j'} z_{i'}) \rangle,$$

En esta relación, se puede usar la integración por partes y la incompresibilidad. De esta manera, los términos $\langle z_{i'}\partial^j p \rangle = \langle z_i\partial^{j'} p' \rangle = 0$ [49] se anulan y, consecuentemente,

$$\partial_t \langle z^i z_{i'} \rangle + \langle z_{i'}z_j\partial^j z^i \rangle + \langle z_i z_{j'}\partial^{j'} z^{i'} \rangle = \nu^+ \langle z_{i'}\partial_j\partial^j z^i + z_i\partial_{j'}\partial^{j'} z^{i'} \rangle + \nu^- \langle z_{i'}\partial_j\partial^j z_i + z_i\partial_{j'}\partial^{j'} z_{i'} \rangle. \quad (2.43)$$

Si se considera que $\partial^{j'} = -\partial^j$, $\partial^{j'} = \partial^{r_j}$, $-\partial^j = \partial^{r_j}$ y $\Delta \mathbf{z}^i = \mathbf{z}^i - \mathbf{z}^i$ [11], se puede desarrollar por partes la última ecuación (2.43), empezando por el segundo y tercer término. Además, usando homogeneidad e incompresibilidad [49], la solución del término no lineal se expresa como

$$\langle z_{i'}z_j\partial^j z^i \rangle + \langle z_i z_{j'}\partial^{j'} z^{i'} \rangle = -\frac{1}{2}\partial^{r_j} \langle \Delta z_i \Delta z^i \Delta z_j \rangle, \quad (2.44)$$

Luego, bajo los mismos criterios previos, los términos viscosos se pueden expresar como

$$\nu^+ \langle z_{i'}\partial_j\partial^j z^i + z_i\partial_{j'}\partial^{j'} z^{i'} \rangle = 2\nu^+ \partial_{r_j} \partial^{r_j} \langle z_{i'} z^i \rangle, \quad (2.45)$$

y

$$\nu^- \left\langle z_{i'} \partial_j \partial^j z_i + z_i \partial_{j'} \partial^{j'} z_{i'} \right\rangle = 2\nu^- \partial_{r_j} \partial^{r_j} \langle z_{i'} z^i \rangle. \quad (2.46)$$

respectivamente. A continuación, se reemplaza las ecuaciones (2.42), (2.43) y (2.44) en la ecuación (2.41) para obtener:

$$\partial_t \langle z^i z_{i'} \rangle - \frac{1}{2} \partial_{r_j} \langle \Delta z_i \Delta z^i \Delta z_j \rangle = 2\nu^+ \partial_{r_j} \partial^{r_j} \langle z_{i'} z^i \rangle + 2\nu^- \partial_{r_j} \partial^{r_j} \langle z_{i'} z^i \rangle, \quad (2.47)$$

Ahora, se define la tasa de disipación de energía $\epsilon^\pm \equiv \partial_{r_j} \partial^{r_j} \langle z_{i'} z^i \rangle$ y se analiza los diferentes términos de la relación de von Kármán-Howarth bajo el supuesto de estacionariedad ($r \rightarrow 0$) y turbulencia completamente desarrollada ($\nu \rightarrow 0$). Complementariamente, en su estado estacionario, $t \rightarrow \infty$, el término de la izquierda de la ecuación (2.47) desaparece y, de manera similar, se eliminan los términos disipativos, lo que nos deja con una sola expresión:

$$-\frac{1}{2} \lim_{r \rightarrow 0} \lim_{\nu \rightarrow 0} \lim_{t \rightarrow \infty} \nabla \mathbf{r} \cdot \left\langle |\Delta z^i|^2 \Delta z_j \right\rangle = \lim_{r \rightarrow 0} \lim_{\nu \rightarrow 0} \lim_{t \rightarrow \infty} 2\epsilon^\pm, \quad (2.48)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \lim_{\nu \rightarrow 0} \lim_{t \rightarrow \infty} \nabla \mathbf{r} \cdot \left\langle |\Delta \mathbf{z}^\pm|^2 \Delta \mathbf{z}^\mp \right\rangle = -4\epsilon^\pm,$$

donde ϵ^\pm es la tasa de disipación de energía por unidad de masa de las pseudo energías $|z^\pm|^2/2$. La ecuación (2.48) es conocida como la relación de von Kármán-Howarth-Monin [20, 11, 50].

2.9 Ley de Yaglom-Politano-Pouquete (YPP)

El trabajo de Andrei Nikolaevich Kolmogorov, en 1941, sigue siendo una fuente importante de inspiración para la investigación de la turbulencia. Una de sus principales leyes es la ley de 4/5 (ver Anexo 5.4), obtenida mediante el cálculo tensorial y gracias a los resultados previos de von Kármán-Howarth-Monin [49], quienes obtuvieron una ecuación dinámica para tensores de correlación de tercer orden. En este trabajo se presenta un cálculo similar, propuesto por Yaglom et al. y luego revisado por Antonia et al. [52]. Trabajos que condujeron a una, ligeramente diferente ley 4/3. Nuestra meto-

dología inicia bajo los supuestos de homogeneidad estadística, estacionalidad temporal, número de Reynolds alto e isotropía.

A partir de la relación 2.48, y usando el Teorema de divergencia de Gauss, que relaciona la integral de volumen de una divergencia con el flujo a través de una superficie cerrada, se plantea que

$$\nabla \mathbf{r} \cdot \langle |\Delta \mathbf{z}^\pm|^2 \Delta \mathbf{z}^\mp \rangle = -4\epsilon^\pm.$$

A continuación, se integra la última ecuación en una esfera de volumen arbitrario V ,

$$\iiint_V \nabla \mathbf{r} \cdot \langle |\Delta \mathbf{z}^\pm|^2 \Delta \mathbf{z}^\mp \rangle dV = \iiint_V -4\epsilon^\pm dV, \quad (2.49)$$

equivalente a

$$\iint_S \langle |\Delta \mathbf{z}^\pm|^2 \Delta \mathbf{z}^\mp \rangle \cdot d\mathbf{S} = -4\epsilon^\pm \iiint_V dV.$$

En particular, el lado izquierdo es la integral de superficie sobre el límite del volumen V , y representa el flujo total a través del límite S , mientras que el lado derecho es una integral de volumen, por lo que se puede proceder como:

$$\iint_S \langle |\Delta z^\pm|^2 \Delta z_{\parallel}^\mp \rangle \hat{r} \cdot \hat{r} dS = -4\epsilon^\pm \left(\frac{4}{3} \pi r^3 \right);$$

$$\langle |\Delta z^\pm|^2 \Delta z_{\parallel}^\mp \rangle \iint_S dS = -\frac{16}{3} \pi \epsilon^\pm r^3;$$

$$\langle |\Delta z^\pm|^2 \Delta z_{\parallel}^\mp \rangle (4\pi r^2) = -\frac{16}{3} \pi \epsilon^\pm r^3,$$

donde Δz_{\parallel}^\mp representa el componente de incremento Δz^\mp a lo largo de la dirección r , y donde se sobreentiende que se trabaja en un espacio físico tridimensional. Finalmente, la Ley YPP se escribe como

$$\langle |\Delta z^\pm|^2 \Delta z_{\parallel}^\mp \rangle = -\frac{4}{3} \epsilon^\pm r, \quad (2.50)$$

2.10 Aproximación Hall de la MHD

A escalas cercanas a la longitud de inercia del protón y al proton skin depth, los modelos MHD ya no son válidos [23]. Una “mejora” para el modelo MHD, es el modelo Hall-Magnetohidrodinámico (HMHD), que permite incluir los efectos ciclotrónicos de los

iones. De la misma forma, aún cuando se consideran frecuencias mucho menores que la ciclotrónica de electrones, se levanta la restricción sobre la frecuencia ciclotrónica de los iones, permitiendo ondas con frecuencias comparables [4]. Esta suposición se expresa explícitamente en un cambio en la Ley de Ohm [41].

El modelo Hall-MHD se ha utilizado para describir y comprender una variedad de fenómenos de plasma de laboratorio y espaciales interesantes, durante las últimas décadas. La teoría se ha aplicado con éxito a la estructuración de expansiones de plasma sub-Alfvénicas y al transporte rápido de campos magnéticos en switchbacks de plasma. En los últimos años se ha hecho evidente que la física Hall-MHD juega un papel fundamental para explicar los procesos de reconexión magnética y esto ha alentado a la comunidad científica el interés en este tema [53, 54].

En el límite de un fluido incompresible, las ecuaciones Hall-MHD se pueden deducir partiendo desde las ecuaciones de Navier-Stokes (2.19) y (2.21) [43, 20],

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0; \quad (2.51)$$

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) = -\nabla P + (\mathbf{J} \times \mathbf{B}) + (\rho \nu \nabla^2 \mathbf{u}) + \mathbf{f}_e \quad (2.52)$$

Por otra parte, se utiliza la ecuación de Maxwell-Àmpere (2.4), sin tomar en consideración la corriente de desplazamiento, $\mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{B} / \mu_0$. A continuación, se puede reemplazar el término de la Fuerza de Lorentz y dividir por ρ a la ecuación (2.52), entonces ésta se convierte en

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \left(\nabla P + \frac{(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}}{\nu_0} \right) + \nu \nabla^2 \mathbf{u}. \quad (2.53)$$

Si se desarrolla el término $(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}^2$ y se expresa en función de la normalización $\mathbf{b} = \mathbf{B} / \sqrt{\mu_0 \rho}$, la ecuación (2.53) se convierte en

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla P_{tot} + (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{b} + \nu \nabla^2 \mathbf{u}; \quad (2.54)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{b} - \nabla P_{tot} + \mathbf{d}_r, \quad (2.55)$$

²Se desarrolla por medio de las fórmulas vectoriales de Jackson [45]

donde P_{tot} es la presión total constituida por la presión del plasma y la presión magnética, y se ha elegido $\mathbf{d}_r = \nu \nabla^2 \mathbf{u}$. De esta manera, la ecuación (2.55) puede ser considerada como la tercera ecuación de la Hall-MHD.

En este trabajo, nos interesa particularmente el –así llamado– “efecto Hall”: en presencia de un campo magnético perpendicular a la densidad de corriente, las fuerzas de Lorentz crean una asimetría local de distribución de carga, lo que genera a su vez un bucle de retroalimentación que influye en la densidad de corriente. Este efecto es especialmente importante ya que permite que el modelo final describa (al menos parcialmente) las pequeñas escalas del plasma, que se encuentran típicamente alrededor y por debajo de la escala característica del ión. Modelos más complejos pueden considerar otros efectos, como la presión e inercia de los electrones. En este contexto, se usa la Ley de Ohm generalizada,

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} + \sigma \mathbf{u} \times \mathbf{B} - \frac{\sigma}{n q_e} \mathbf{J} \times \mathbf{B} + \frac{\sigma}{n q_e} \nabla P + \frac{\sigma m_e}{n q_e^2} \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t}. \quad (2.56)$$

Claramente, en la aproximación de primer orden, la ecuación (2.56) se reduce a

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} + \sigma \mathbf{u} \times \mathbf{B} - \frac{\sigma}{n q_e} \mathbf{J} \times \mathbf{B}, \quad (2.57)$$

misma que se puede reducir a través de la ecuación de Maxwell-Àmpere (2.4), sin los efectos de corriente de desplazamiento,

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J},$$

de donde,

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) &= \mu_0 \nabla \times \mathbf{J}; \\ \nabla \times \mathbf{J} &= \frac{\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B})}{\mu_0}; \\ \nabla \times \mathbf{J} &= \frac{\nabla(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \nabla^2 \mathbf{B}}{\mu_0}; \\ \nabla \times \mathbf{J} &= -\frac{\nabla^2 \mathbf{B}}{\mu_0}. \end{aligned}$$

donde se ha usado $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$. De esta manera, si se reemplaza la última expresión en

la ley de Ohm (2.57) y se aplica el rotacional,

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{J} &= \sigma \nabla \times \mathbf{E} + \sigma \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) - \frac{\sigma}{n q_e} \nabla \times (\mathbf{J} \times \mathbf{B}); \\ -\frac{\nabla^2 \mathbf{B}}{\mu_0} &= \sigma \left[\nabla \times \mathbf{E} + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{B} - \frac{\sigma}{n q_e} [(\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{J} - (\mathbf{J} \cdot \nabla) \mathbf{B}] \right].\end{aligned}$$

En este punto se usa la tercera ecuación de Maxwell (2.3) para reemplazar el rotacional del campo eléctrico $\nabla \times \mathbf{E}$,

$$\begin{aligned}-\frac{\nabla^2 \mathbf{B}}{\mu_0 \sigma} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{B} - d_i [(\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{J} - (\mathbf{J} \cdot \nabla) \mathbf{B}]; \\ -\eta \nabla^2 \mathbf{B} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{B} - d_i (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{J} - d_i (\mathbf{J} \cdot \nabla) \mathbf{B}; \\ -\eta \nabla^2 \left(\frac{\mathbf{B}}{\sqrt{\mu_0 \rho}} \right) &= -\frac{\partial}{\partial t} \frac{\mathbf{B}}{\sqrt{\mu_0 \rho}} + \left(\frac{\mathbf{B}}{\sqrt{\mu_0 \rho}} \cdot \nabla \right) \mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \nabla) \frac{\mathbf{B}}{\sqrt{\mu_0 \rho}} - d_i \left(\frac{\mathbf{B}}{\sqrt{\mu_0 \rho}} \cdot \nabla \right) \mathbf{J} - d_i (\mathbf{J} \cdot \nabla) \frac{\mathbf{B}}{\sqrt{\mu_0 \rho}}; \\ -\eta \nabla^2 \mathbf{b} &= -\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} + (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{b} - d_i (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{J} - d_i (\mathbf{J} \cdot \nabla) \mathbf{b}; \\ P &= n_j^\gamma,\end{aligned}$$

donde $\omega_{pi} = \sqrt{n_i q_e^2 / n_i \epsilon_0}$, $d_i = c / \omega_{pi}$. Si además, se define $\mathbf{d}_n = \eta \nabla^2 \mathbf{B}$, se tiene

$$\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} = -(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{b} + (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{u} - d_i (\mathbf{J} \cdot \nabla) \mathbf{b} - d_i (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{J} + \mathbf{d}_n. \quad (2.58)$$

Entonces, en resumen, el sistema de ecuaciones del modelo Hall-MHD incompresible esta conformado por

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{b} - \nabla P_{tot} - \mathbf{d}_\nu; \quad (2.59)$$

$$\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} = -(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{b} + (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{u} - d_i (\mathbf{J} \cdot \nabla) \mathbf{b} - d_i (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{J} + \mathbf{d}_n; \quad (2.60)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{b} = 0; \quad (2.61)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (2.62)$$

2.11 Inclusión del efecto Hall en la Ley de YPP

Actualmente, en la literatura existen tres leyes diferentes para el régimen incompresible Hall-MHD. En sus respectivos trabajos, Banerjee and Galtier [32], Galtier [18], Hellinger et al. [20], presentaron una generalización de la ecuación de von Kármán-Howarth

en el marco Hall-MHD turbulento e incompresible, basados en los supuestos de homogeneidad estadística, estacionalidad en el tiempo, un número de Reynolds alto e isotropía. Asimismo, Ferrand et al. [21], considerando turbulencias homogéneas, trabajaron con tensores de correlación de dos puntos dependiendo solo del desplazamiento relativo l . Sobre este trabajo, mayor detalle matemático de las “leyes exactas” (no son tal, debido a la inclusión de escalas ajenas y lejanas al rango inercial) se puede encontrar en la tesis de Ferrand [38], y en las referencias encontradas ahí. En cuanto a la parte que nos interesa en este documento, debo indicar que a partir de las ecuaciones (2.55) y (2.58)

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} &= -(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{b} - \nabla P_{tot} + \mathbf{d}_r; \\ \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} &= -(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{b} + (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{u} - d_i(\mathbf{J} \cdot \nabla) \mathbf{b} - d_i(\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{J} + \mathbf{d}_n,\end{aligned}$$

la tasa media de inyección de energía total se expresa como la combinación de las funciones de estructura de tercer orden correspondientes al flujo de cascada turbulenta MHD [47, 55] y las correcciones Hall [18], válida en el rango inercial; es decir, en el límite de grandes números de Reynolds cinéticos/magnéticos,

$$-4\epsilon = \nabla_l \cdot \langle (\delta \mathbf{u} \cdot \delta \mathbf{u}) \delta \mathbf{u} + (\delta \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{b}) \delta \mathbf{u} - 2(\delta \mathbf{u} \cdot \delta \mathbf{b}) \delta \mathbf{b} - \frac{1}{2} d_i (\delta \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{b}) \delta \mathbf{j} + d_i (\delta \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{j}) \delta \mathbf{b} \rangle. \quad (2.63)$$

La forma de esta expresión nos permite identificar fácilmente las “contribuciones” del efecto Yaglom:

$$\mathbf{Y}_1(x, y, z) = (\delta \mathbf{u} \cdot \delta \mathbf{u}) \delta \mathbf{u}, \quad (2.64)$$

$$\mathbf{Y}_2(x, y, z) = (\delta \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{b}) \delta \mathbf{u}, \quad (2.65)$$

$$\mathbf{Y}_3(x, y, z) = -2(\delta \mathbf{u} \cdot \delta \mathbf{b}) \delta \mathbf{b}, \quad (2.66)$$

$$(2.67)$$

y las contribuciones del efecto Hall:

$$\mathbf{H}_1(x, y, z) = d_i(\delta\mathbf{b} \cdot \delta\mathbf{j})\delta\mathbf{b}, \quad (2.68)$$

$$\mathbf{H}_2(x, y, z) = -\frac{1}{2}d_i(\delta\mathbf{b} \cdot \delta\mathbf{b})\delta\mathbf{j}. \quad (2.69)$$

De esta manera, la Ley de YPP, que incluye correcciones de las escalas iónicas, se puede expresar de la siguiente manera

$$-4\epsilon = \nabla_\ell \cdot \langle \mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_2 + \mathbf{Y}_3 + \mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2 \rangle \quad (2.70)$$

Se intuye que los métodos para calcular el operador ∇ y el promedio espacial $\langle \dots \rangle$ influirán en el resultado del lado derecho de la ecuación 2.70. Esto, además de las características (relativas a su dimensión) del espacio físico donde el plasma turbulento evoluciona temporalmente. De manera general, en el caso de turbulencia isotrópica [56],

$$-\frac{4}{d}\epsilon_l = \frac{1}{\ell} (\epsilon_{Y1} + \epsilon_{Y2} + \epsilon_{Y3} + \epsilon_{H1} + \epsilon_{H2}), \quad (2.71)$$

donde d es la dimensión espacial donde se desarrolla la turbulencia. En esta última relación, se ha usado $\epsilon_{Y1} = (\delta\mathbf{u} \cdot \delta\mathbf{u})\delta u_l$, que mide la energía cinética disponible para ser transportada por la componente longitudinal de $\delta\mathbf{u}$, $\epsilon_{Y2} = (\delta\mathbf{b} \cdot \delta\mathbf{b})\delta u_l$ cuantifica la energía magnética que será transportado por $\epsilon_{Y3} = \delta u_l$, $-2(\delta\mathbf{u} \cdot \delta\mathbf{b})\delta b_l$ esta relacionado con las correlaciones velocidad-campo magnético, $\epsilon_{H1} = -d_i(\delta\mathbf{b} \cdot \delta\mathbf{b})\delta j_l/2$ indica la cantidad de energía magnética de advección por las fluctuaciones del campo de densidad de corriente longitudinal y $\epsilon_{H2} = d_i(\delta\mathbf{b} \cdot \delta\mathbf{j})\delta b_l$ esta relacionado con las correlaciones de campo de densidad de corriente magnética acoplado a las fluctuaciones longitudinales del campo magnético.

Por ejemplo, si la turbulencia se desarrolla en presencia de un campo magnético guía (fuerte), sus indicadores de turbulencia se concentran en el espacio bidimensional, perpendicular a dicho campo [56, 4]. En este caso $d = 2$ y, consecuentemente,

$$-2\epsilon_l = \epsilon_{Y1\ell} + \epsilon_{Y2\ell} + \epsilon_{Y3\ell} + \epsilon_{H1\ell} + \epsilon_{H2\ell}. \quad (2.72)$$

De forma análoga, en el caso que la turbulencia se desarrolle isotrópicamente en el

espacio tridimensional,

$$-\frac{4}{3}\epsilon_{i\ell}l = \epsilon_{Y1\ell} + \epsilon_{Y2\ell} + \epsilon_{Y3\ell} + \epsilon_{H1\ell} + \epsilon_{H2\ell}. \quad (2.73)$$

Relaciones que extienden las ecuaciones (4) y (5) de Politano and Pouquet [56] a su límite Hall. se nota que, en la ecuación (2.63), los dos últimos términos desaparecen cuando $d_i \rightarrow 0$, recuperando la clásica ley de Yaglom [56].

2.12 Proxy heurístico de Local Energy Transfer

Recientemente, Sorriso-Valvo et al. [31] introdujo un proxy heurístico, que se centra en la cantidad de energía “disponible”, en una escala dada, para transferirse a escalas inmediatamente inferiores o superiores. Precisamente, su nombre, Local Energy Transfer (LET) se refiere a aquello. La definición de este proxy se basa en la ecuación (2.70), y las definiciones (2.64)-(2.68), de manera que:

$$-\frac{4}{d}\epsilon_{\ell\ell} \equiv \mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_2 + \mathbf{Y}_3 + \mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2. \quad (2.74)$$

Hasta la fecha, el proxy ha sido utilizado exitosamente para identificar características iónicas específicas, como haces. Lugares donde dominan la alineación entre el campo magnético, a escalas pequeñas, y las fluctuaciones de velocidad. Esto ha proporcionado información sobre la alternancia de signos de las fluctuaciones mixtas –locales– de tercer orden, que podrían estar relacionadas con las propiedades fractales de la transferencia de energía asociada y, por tanto, con procesos disipativos a pequeña escala [57]. Otra de sus aplicaciones ha sido la estimación de las propiedades de escala de los diferentes canales de energía. Los resultados de estos trabajos reflejan la naturaleza geométrica altamente compleja de los flujos turbulentos y que las contribuciones locales, asociadas con la energía, y la transferencia no lineal entre helicidades tienen propiedades de escala similares. En consecuencia, se sugiere que las propiedades fractales de las estructuras de corriente y de vorticidad son similares a las de las fluctuaciones Alfvénicas [58]. Por su parte, Vásconez et al. [4] utilizó el proxy LET para estimar las propiedades de escala local (y global) de diferentes canales de energía. Este enfoque se centró en la estructura de los flujos de energía, bajo el supuesto de que la cascada turbulenta

transfiere la mayor parte de la energía hasta disiparse en las pequeñas escalas, a través de varios procesos cinéticos de plasmas no colisionales. Este estudio se realizó con la ayuda de simulaciones numéricas de plasmas espaciales turbulentos.

se nota que este trabajo de titulación extiende el trabajo desarrollado por Váscquez et al. [4], donde surgió la necesidad de analizar la transferencia de energía en simulaciones tridimensionales de plasma turbulento. En el siguiente Capítulo se proporciona más información acerca de esta implementación.

CAPÍTULO III

MARCO METODOLÓGICO

3.1 Ubicación

El trabajo de investigación se desarrollo en las ciudades de Ambato, Santo Domingo y Quito, Ecuador.

3.2 Equipos y Materiales

La elaboración de esta tesis de investigación utilizó:

- Un computador portátil Marca Dell, Modelo 14 3000, Core i5.
- Software libre Ubuntu.
- Lenguajes de programación: GDL, Fortran y Matlab.
- Simulaciones, tipo benchmark, de plasmas MHD en estado cuasi turbulento.

3.3 Tipo de investigación

Investigación tipo correlacional - cualitativo.

3.3 Investigación bibliográfica

Para el desarrollo de este trabajo de investigación se realizó el estudio del arte mediante revisiones bibliográficas de artículos científicos, tesis doctorales y libros electrónicos.

3.3 Investigación aplicada

Fundamentados en el desarrollo matemático, desarrollado principalmente en torno a la aproximación Hall de la MHD, se implementó los códigos numéricos necesarios para analizar simulaciones tridimensionales –y consecuentemente de dimensiones menores– de plasmas turbulentos en los límites Hall ($di > 0$) y MHD ($di = 0$).

3.3 Investigación cualitativa

Los resultados de los análisis LET fueron comparados con la ley de Yaglom-Politano-Pouquet que incluye la extensión a las escalas Hall. Esta comparación se realizó con la ayuda de dos procesos de integración, implementados al tomar en consideración el espacio discreto, propio de las simulaciones de plasma.

3.4 Prueba de Hipótesis

Hipótesis Nula

El parámetro Local Energy Transfer (LET) provee información sobre la cantidad de energía local que un plasma turbulento dispone para la transferencia de energía, directa o inversa, entre diferentes escalas. La ley exacta no se podrá comprobar a través de simulaciones numéricas aplicando el modelo MHD.

Hipótesis Alternativa

El proxy de Local Energy Transfer (LET) provee información sobre la cantidad de energía local que un plasma en estado turbulento dispone para transferir energía, directa o inversamente, entre diferentes escalas. Este parámetro se correlaciona espacialmente con otros indicadores, como la densidad de corriente. Además, se podrá comprobar la ley de Yaglom-Politano-Pouquet a través de simulaciones numéricas MHD.

3.5 Población y muestra

En este trabajo de investigación se utilizó cuatro tipos de simulaciones numéricas, tres simulaciones bidimensionales de la velocidad, campo magnético y densidad de corriente en un intervalo de tiempo; y una simulación de tipo benchmark tridimensional de velocidad, campo magnético y densidad de corriente en un intervalo de tiempo.

3.6 Recolección de información

Las simulaciones numéricas bidimensionales y la simulación tridimensional de velocidad, campo magnético y densidad de corriente en un intervalo de tiempo que nos proporcionaron para el desarrollo de este trabajo de investigación, fueron obtenidas

en un servidor paralelizado Newton, del Departamento de Física de la Universidad de Calabria, Italia, y en el computador Mesocentre SIGAMM del Observatoire de la Cote d'Azur, Francia.

3.7 Procesamiento de la información

Para el desarrollo de la metodología empleada en este trabajo de investigación, se utilizó el enfoque del trabajo recientemente realizado por [4]. En la figura 3.1, muestra la componente de la densidad de corriente fuera del plano, $\langle j_z^2 \rangle$, tomada al instante $t = t^* = 60 \Omega^{-1}$. Parámetro que actúa como un indicador del estado de turbulencia del sistema [33]. Precisamente, esta figura sugiere que las tres simulaciones bidimensionales Hall Magnetohidrodinámica (HMHD), Fluido de Landau (FL) e Híbrido Vlasov-Maxwell (HVM), se encuentran en el mismo estado turbulento al instante t^* . De esta manera, eligió t^* para probar la ley de YPP (cuyo resultado corroboraría el estado turbulento del sistema) y calcular los términos del proxy LET. Luego, para probar si

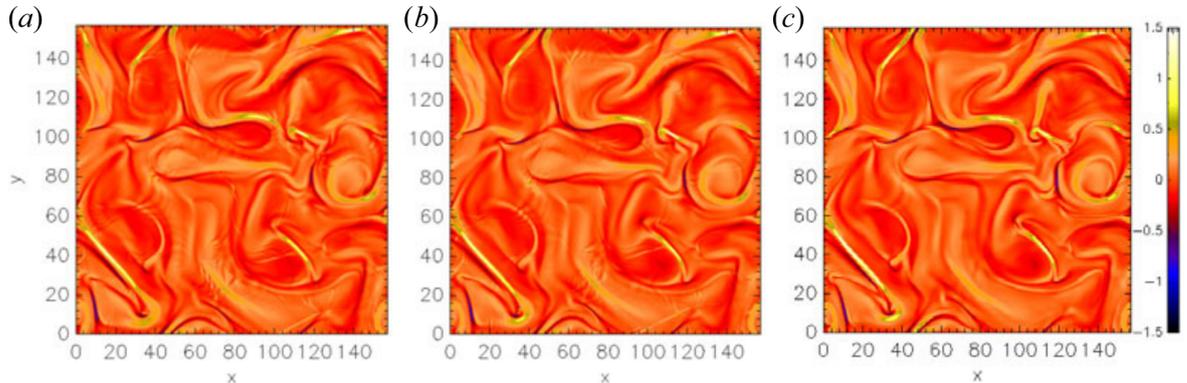


Figura 3.1: Gráfico de contorno de la densidad de corriente fuera del plano $j_z(x, y)$ para descripciones HMHD (a), LF (b) y HVM (c) en $t = t^*$ (Vásconez et al. [4]).

cumple con la ley de YPP, en la Figura 3.2, presentaron el promedio de la ecuación (2.72) sobre todo el dominio, calculado en las simulaciones Hall-MHD (panel a), LF (panel b) y HVM (panel c). En esta figura se nota la separación de las contribuciones de Yaglom (línea continua negra) y Hall (línea continua roja) para resaltar su amplitud relativa en cada escala. La suma de las dos contribuciones se representa con asteriscos, que se aproximan a la ley de YPP (con correcciones Hall) (2.70) a partir de $\sim d_i \approx 2$. Lo que sugiere un estado cuasi turbulento (principalmente) a partir de dichas escalas. Tras esta verificación, se llevó a cabo el cálculo del proxy LET, que se muestra en la

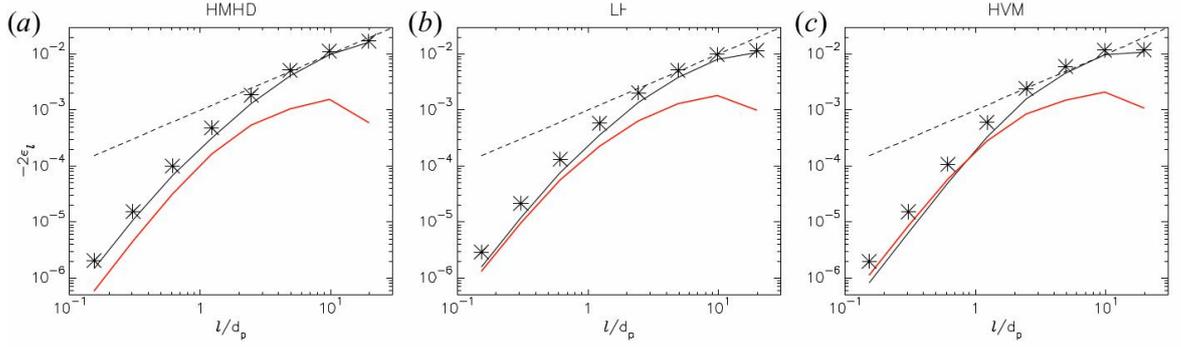


Figura 3.2: Tasa de cascada $-2\epsilon_l$ ley en función de la escala l . Presenta el promedio (2.72) sobre todo el dominio, correspondiente a las simulaciones Hall-MHD, LF y HVM (Vásconez et al. [4]).

Figura 3.3, donde se puede apreciar que la ubicación (e intensidad) de las estructuras presentes en este componente son consistentes para las tres simulaciones Hall-MHD (panel a), LF (panel b) y HVM (panel c). Se notó que en una comparación directa entre las estructuras de la Figura (3.1) con aquellas estructuras (cuasi bipolares del proxy LET) de la Figura 3.3, sugiere que existe una interconexión a escala cruzada entre la dinámica de fluidos y la cinética, de modo que no solo la cascada turbulenta impulsa los procesos cinéticos a pequeña escala, sino también controlan la cascada, actuando como una forma de disipación dinámica [4].

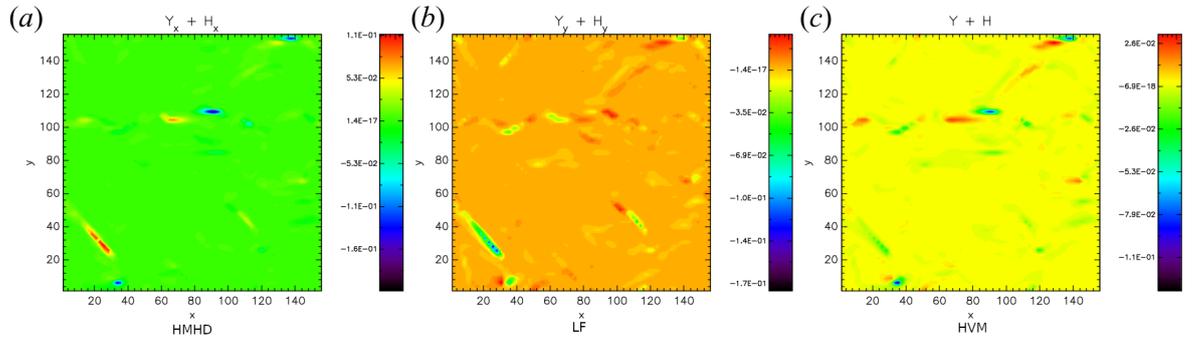


Figura 3.3: Contribución del efecto Yaglom y del efecto Hall de los modelos HHMD, LF Y HVM, calculados bajo las mismas condiciones iniciales (Vásconez et al. [4]).

Todos estos resultados obtenidos en [4] mostraron que el proxy LET es un indicador confiable de la “cantidad de energía” turbulenta que se encuentra en una escala y región dada, lista para ser transferida a sus escalas cercanas. El código desarrollado funciona correctamente en simulaciones bidimensionales y se podría utilizar como un indicador alternativo, para determinar lugares en donde existiría disipación de energía.

Es así que, siguiendo el mismo enfoque, en este trabajo de investigación se centra en

escribir un código numérico para calcular el proxy LET 3D (2.73) en simulaciones tridimensionales de plasmas similares a las detalladas en [4]. Se utilizó una simulación MHD ($d_i = 0$) tridimensional, tipo benchmark, de un sistema cuasi no lineal con condiciones de contorno periódicas en cada dirección espacial, $L \times L \times L$, con $L = 2\pi d_i$. Esta longitud está discretizada con $N_x = N_y = N_z = 384$ puntos de grilla.

Los algoritmos numéricos diseñados e implementados en este trabajo de investigación se pueden clasificar en dos etapas consecutivas. En la primera etapa, se calcula las variaciones, a cada escala ℓ , de los campos magnético, de velocidad y de densidad de corriente (si $d_i > 0$) para almacenar en memoria los momentos de tercer orden (??) de cada simulación. Las simulaciones de este tipo cumplen varias condiciones de estabilidad numérica para alcanzar límites no lineales. En particular, para ventaja de nuestros algoritmos, son periódicos en una o más direcciones. Más adelante se aprecia que esto nos permite usar la cantidad máxima de pares de puntos para calcular promedios.

Pseudoalgoritmo

Para calcular el parámetro LET y la ley de Yaglom-Politano-Pouquet se desarrolló un algoritmo y un código numérico escrito en lenguaje GNU Data Language (GDL): `yaghall_div3d.pro`.

El programa requiere de los siguientes parámetros de entrada (Input):

- Los valores de `Nx`, `Ny`, `Nz` que son el número de puntos en la grilla 3D en los que se tiene información en los datos. Estos datos deben colocarse en una cuadrícula regular 3D en las tres direcciones del espacio.
- `lx`, `ly`, `lz` son la longitud física de las dimensiones x , y y z , respectivamente. Es deseable, aunque no necesario, que su valor sea múltiplo de 2.
- `di` almacena el valor del proton/ion skin depth.
- `rho` es la matriz escalar que almacena la densidad de masa.
- El valor de `nsubint` determina el número de puntos en el subintervalo de integración.
- `nlag` es el número de escalas.

- B_x , B_y , B_z son las componentes del campo magnético. Estos datos se ingresan a la memoria del programa a través de un fichero y se almacenan en matrices escalares.
- Los valores de u_x , u_y , u_z que son los componentes del vector velocidad. Estos datos se ingresan al programa a través de un fichero.
- Los valores de j_x , j_y , j_z son los componentes del vector de densidad de corriente. Estos parámetros son opcionales dependiendo del valor de di . Si $di = 0$ entonces la densidad de corriente se considera nula, es decir $j_x = j_y = j_z = 0$. El valor de los componentes también depende del valor de $jterm$, si este es 0 entonces los componentes se leen desde un fichero; en caso de que $jterm$ sea 1, los componentes se calculan internamente.

El programa genera (output) archivos que contienen cada término del sistema (2.64), (2.68) nombrados como `yaghall_1i.dat`, donde i identifica la escala $\ell = 2^{i-1}$ de la cual proviene el mapa (del proxy LET). Cada columna del archivo corresponde a: lugar de grilla x , lugar de grilla y , lugar de grilla z , $\mathbf{Y}_1(x, y, z)$, $\mathbf{Y}_2(x, y, z)$, $\mathbf{Y}_3(x, y, z)$, $\mathbf{H}_1(x, y, z)$, $\mathbf{H}_2(x, y, z)$. Se notará que estos mapas tendrán la dimensión espacial de los archivos de ingreso. Además, se generan los archivos `eps1i.dat`, en los que cada columna está escrito: escala ϵ_{Y1} , ϵ_{Y2} , ϵ_{Y3} , ϵ_{H1} , ϵ_{H2} , definidos anteriormente. Para estos cálculos el programa realiza el siguiente procedimiento:

- Se inicializan los parámetros de entrada.
- Se leen los ficheros que corresponde a los valores de los componentes del campo (b_x , b_y , b_z), velocidad (u_x , u_y , u_z), y densidad de corriente (j_x , j_y , j_z), si existiera.
- Se divide las componentes del campo magnético, si la simulación no posee esta normalización, para $4\pi\rho$.
- Se construyen dos tensores de campos magnético B y de velocidad v , a partir de los componentes, a la vez que se despeja la memoria ocupada previamente por dichas componentes.

- Si $d_i > 0$, el código necesita las componentes de la densidad de corriente. Si $j_{\text{term}} = 0$, entonces se leen las componentes j_x , j_y , j_z de ficheros externos. Caso contrario, se calculan con el rotacional del campo magnético, $\mathbf{j} = \nabla \times \mathbf{B}$, que explícitamente

$$\begin{aligned} j_x &= \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z}; \\ j_y &= \frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x}; \\ j_z &= \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y}. \end{aligned}$$

Tras esta lectura, o cálculo, de componentes se construye el tensor \mathbf{Jt} , análogamente a los anteriores campos. Se itera para cada una de las n_{lag} escalas:

- El valor de $\text{isc}=2^{\wedge}i_{\text{lag}}$, el valor de n_{scale} almacena $\text{round}(\text{isc})$ y el valor de scale almacena $\text{pixel}*\text{float}(n_{\text{scale}})$.
- Se calcula $\delta \mathbf{B}$ ($\delta \mathbf{B}$) y $\delta \mathbf{u}$ ($\delta \mathbf{u}$) como la diferencia, en la escala, del cambio del tensor de campo magnético \mathbf{B} y del tensor de velocidades \mathbf{V} , respectivamente.
- Se calcula los diferenciales de segundo orden $dvdv$ ($\delta \mathbf{u} \cdot \delta \mathbf{u}$), $dbdb$ ($\delta \mathbf{B} \cdot \delta \mathbf{B}$), $dvdb$ ($\delta \mathbf{u} \cdot \delta \mathbf{B}$).
- El termino $\mathbf{yag1}$, \mathbf{Y}_1 , se calcula como $(\delta \mathbf{u} \cdot \delta \mathbf{u})\delta \mathbf{B}$, mientras que divy1 está dada como la divergencia de $\mathbf{yag1}$, es decir $\nabla \cdot \mathbf{Y}_1$. Análogamente el termino $\mathbf{yag2}$, \mathbf{Y}_2 , se calcula como $(\delta \mathbf{B} \cdot \delta \mathbf{B})\delta \mathbf{u}$, mientras que divy2 está dada como la divergencia de $\mathbf{yag2}$, es decir $\nabla \cdot \mathbf{Y}_2$, además, el termino $\mathbf{yag3}$, \mathbf{Y}_3 , se calcula como $-2(\delta \mathbf{u} \cdot \delta \mathbf{B})\delta \mathbf{B}$, mientras que divy1 está dada como la divergencia de $\mathbf{yag3}$, es decir $\nabla \cdot \mathbf{Y}_3$.
- Si es que d_i es diferente de 0 se debe considerar los términos Hall, por tanto se calcula $\delta \mathbf{j}$ ($\delta \mathbf{j}$) como la diferencia en la escala del cambio del tensor de densidad de corriente eléctrica. Además se calcula el producto punto cruzado entre las diferenciales del campo y de la densidad de corriente $dbdj$ ($\delta \mathbf{B} \cdot \delta \mathbf{j}$). Con esto se puede calcular el termino $\mathbf{hall1}$, $\mathbf{H}_1 = d_i(\delta \mathbf{B} \cdot \delta \mathbf{j})\delta \mathbf{B}$ y el termino $\mathbf{hall2}$, $\mathbf{H}_2 = -(d_i/2)(\delta \mathbf{B} \cdot \delta \mathbf{B})\delta \mathbf{j}$. Se calculan las divergencias de $\mathbf{hall1}$ y $\mathbf{hall2}$, dadas por divh1 ($\nabla \cdot \mathbf{H}_1$) y divh2 ($\nabla \cdot \mathbf{H}_2$) respectivamente.

- Como se sugiere en [38], el método de integración de $\langle \dots \rangle$ cambia los valores de cada término ϵ , que será comparado con la ley de YPP. Esta aseveración puede ser extendida a nuestros casos de estudio, con geometría discreta. Por este motivo, el código puede realizar un promedio en cada una de las “subregiones” en las que se subdivide la grilla. Cada subregión contiene `nsubint` puntos. Este promedio puede ser calculado a través del método de Simpson 3/8, si la subregión cuenta con al menos 4 puntos por cada dirección espacial. El método consiste en considerar 4 puntos críticos dentro de la subregión y realizar la siguiente operación:

$$m(x) = \frac{3}{8}f(x_0) + \frac{9}{8}f(x_1) + \frac{9}{8}f(x_2) + \frac{3}{8}f(x_3). \quad (3.1)$$

De esta manera se tiene una reducción de la resolución espacial de cada mapa (2.64)– (2.68), sobre los que se aplicarán la divergencia. Se nota que $\nabla_\ell \cdot \langle (\dots) \rangle = - \langle \nabla \cdot (\dots) \rangle$. Los mapas `letdivy1`, `letdivy2` y `letdivy3` almacenarán cada término del proxy LET. La suma directa de estos mapas nos permite obtener `letyagterm`, que almacena el proxy LET por cada escala.

- Si `d_i` es diferente de 0 entonces se debe considerar adicionalmente los términos de Hall, por tanto, se debe realizar el mapeo tanto de `divh1` y de `divh2` como `letdivh1` y `letdivh2` respectivamente. Se calcula el aporte total Hall `lethallterm` como la suma de ambos.
- Se realiza el cálculo de los valores de epsilon para cada término de `Yag` y de `Hall` (si `d_i \neq 0`). El cálculo de los epsilon es realizar un promedio sobre cada una de las subregiones de sus respectivos mapas. De esta forma para `letdivy1`, `letdivy2` y `letdivy2` se calculan `epsyag1`, `epsyag2` y `epsyag3` respectivamente. Si `d_i` es diferente de 0 también se calcula `epshall1` y `epshall2` a partir de `letdivh1` y `letdivh2` respectivamente. Finalmente, el programa imprime en ficheros de salida el mapa del termino `yag`, es decir `letyagterm`, para cada una de las escalas.

CAPÍTULO IV

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

4.1 Análisis de transferencia de energía

A continuación, se presenta los resultados obtenidos a partir de los conceptos brevemente detallados en el Capítulo 2, la metodología empleada como se indicó en el Capítulo 3, y siguiendo el mismo enfoque de Vázquez et al. [4]. En este contexto, utilizamos una simulación tridimensional tipo MHD, i.e. con $d_i = 0$, de plasma turbulento. La simulación de tipo “referencia” tiene un enfoque numérico Lattice Boltzmann que resuelve el conocido problema de vórtice de Orszag-Tang [59], con condiciones de contorno periódicas en cada dirección espacial, $L \times L \times L$, con $L = 2\pi d_i$, de una caja cúbica. Esta longitud está discretizada con $N_x = N_y = N_z = 384$ puntos de grilla. Las condiciones iniciales de los campos magnético y de velocidades son

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, 0) = v_0 (-2 \sin(y), 2 \sin(x), 0); \quad (4.1)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, 0) = B_0 (-2 \sin(2y) + \sin(z), 2 \sin(x) + \sin(z), \sin(x) + \sin(y)), \quad (4.2)$$

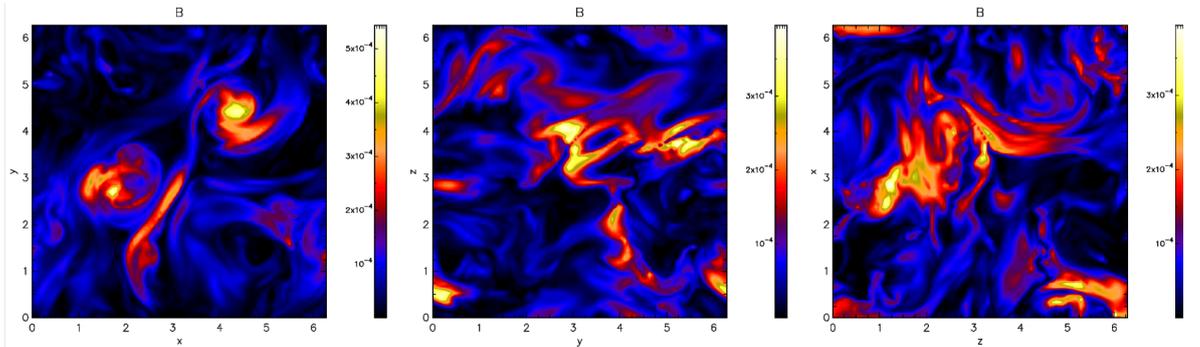


Figura 4.1: Cortes en los ejes $x - y$ (panel izquierdo), $y - z$ (panel central) y $z - x$ (panel derecho), de \mathbf{B}^2 , donde se puede apreciar la distribución espacial de varias estructuras.

respectivamente. El resultado de esta simulación se aprecia en la Figura 4.1 y Figura 4.2, donde apreciamos tres cortes diferentes de la energía magnética B^2 y energía cinética v^2 , respectivamente. Aunque podemos notar la presencia de varias estructuras complejas, a simple vista se identifica la acumulación de las mismas en ciertas regiones del espacio (indicando un comportamiento no homogéneo y no isotrópico), lo que implicaría que la simulación no ha alcanzado todavía un estado desarrollado de turbulencia.

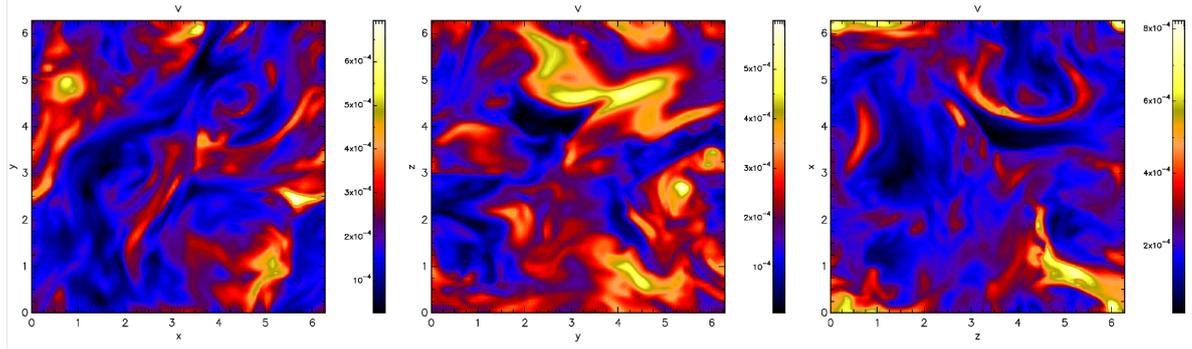


Figura 4.2: Cortes en los ejes $x-y$ (panel izquierdo), $y-z$ (panel central) y $z-x$ (panel derecho), de \mathbf{v}^2 , donde se puede apreciar la distribución espacial de varias estructuras.

En este punto, se inicia el análisis explorando el nivel de turbulencia de esta simulación benchmark, a través de la ecuación (2.70). Este resultado se presenta en la Figura 4.3, donde se nota claramente que se aleja de la ley de YPP y, consecuentemente, nos indica que la simulación no se encuentra en estado turbulento, o cuasi turbulento, desarrollado. Esta oportunidad se aprovechó, para estudiar si el cambio de resolución, que se puede

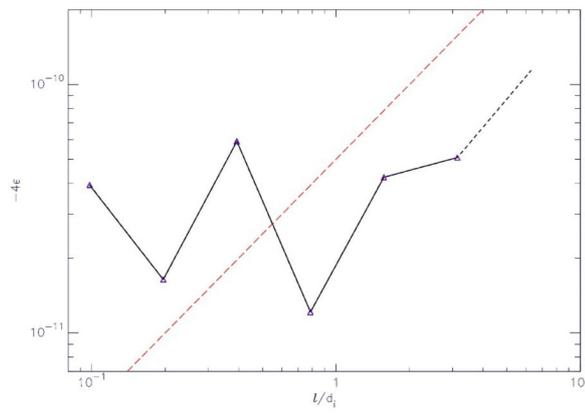


Figura 4.3: Estado turbulento de la simulación 3D. La línea negra sólida une los valores positivos del lado derecho de la ecuación (2.70) (ley de YPP), correspondiente a cada escala. La línea negra entrecortada une a la escala con un valor negativo. Para resaltar su estado no turbulento, la ley de potencia se expresa con una línea roja entrecortada.

realizar con el método de Simpson 3/8 (ecuación (3.1)), afectaría o no la aproximación de los términos de la ecuación (2.70) hacia la ley de YPP. Para ello, sin pérdida de generalidad, se realizó la operación $\langle \dots \rangle$ en subintervalos de 4 puntos de grilla por cada dirección física. Y, posteriormente, se promedió este resultado en las 96 subcajas resultantes. En la Figura 4.4 se muestra el valor de los componentes de la ecuación (2.73) con este tipo de integración. La línea entrecortada de color rojo representa la ley de YPP, los valores positivos (para cada escala) se representan con triángulos, mientras

que los valores negativos son representados con la línea entrecortada de color negro. Se nota que, debido al estado intrínseco de turbulencia de la simulación, el método de reducción de la resolución no mejora su proximidad a la ley de YPP. Sin embargo, se puede estimar que este método si influya en el cálculo de los términos de la ecuación (2.70) en una simulación en estado turbulento.

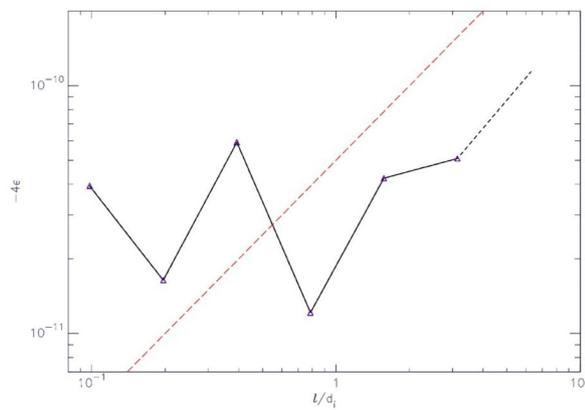


Figura 4.4: Tasa de cascada en función de la escala l , calculada con 96 sub-cajas de grilla. Como referencia, la ley de YPP se encuentra graficada con una línea roja entrecortada.

Una vez que se comprobó con los resultados que no se acerca a la ley de YPP, se realizó el cálculo del proxy LET con los campos magnético y de velocidad de la simulación tridimensional. Para identificar las estructuras que aparecen en la simulación en donde se forman zonas de interconexión magnética, islas magnéticas, ya que en estos lugares se conoce que se disipa energía, por eso es importante localizar las estructuras. En la Figura 4.5, se presenta el proxy LET, calculado con 7 escalas diferentes. Notamos las estructuras dispersas en el volumen.

Finalmente, para identificar de mejor manera la locación de las estructuras complejas, se presenta el proxy LET en tres cortes $x - y$ ($z = 0$), $y - z$ ($x = 0$) y $z - x$ ($y = 0$) calculados en la escala 7. En efecto, en la Figura 4.6 se nota claramente las zonas estructuradas, donde existe mayor probabilidad de disipación energética.

La localización de las estructuras coinciden (mayoritariamente) con aquellas vistas en la Figura 4.1 y Figura 4.2. Sin embargo, se puede decir que las estructuras del proxy LET tienen una clara bipolaridad (de signos).

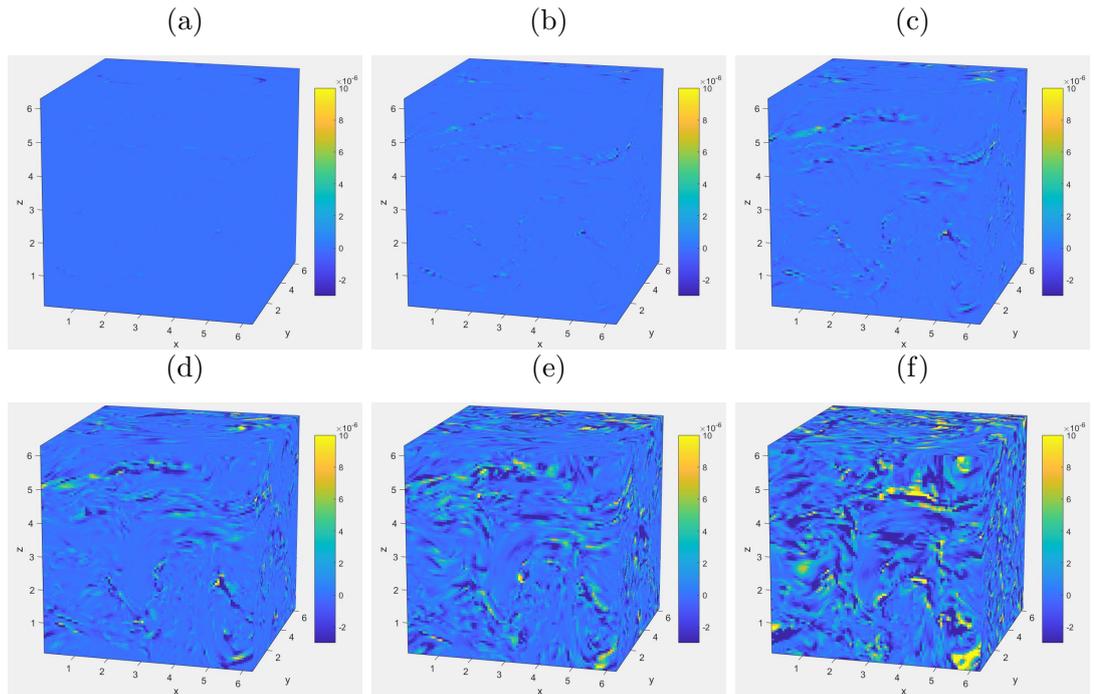


Figura 4.5: Proxy LET calculado en 6 escalas diferentes, como $\ell = 2^i$, en la simulación tridimensional.

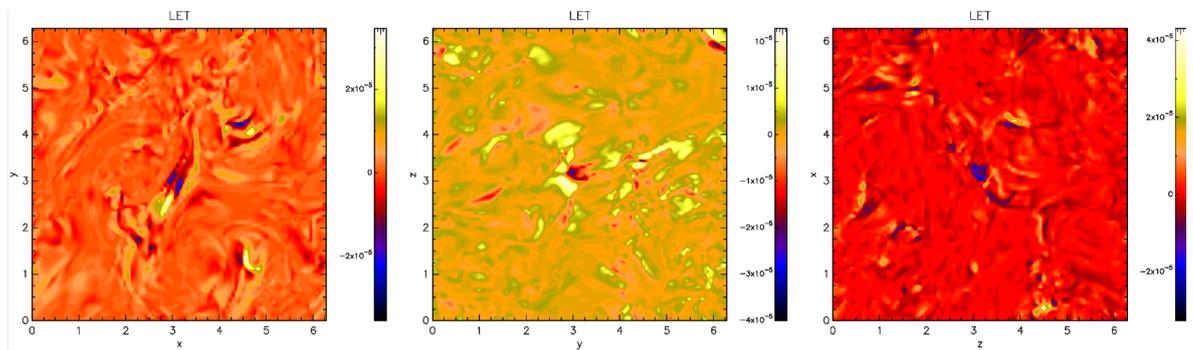


Figura 4.6: Cortes transversales del proxy LET (de la escala $i = 7$) en los planos $x - y$ (panel izquierdo), $y - z$ (panel medio) y $z - x$ (panel derecho), donde se puede apreciar las estructuras complejas.

CAPÍTULO V

CONCLUSIONES, RECOMENDACIONES, BIBLIOGRAFÍA Y ANEXOS

5.1 Conclusiones

En este trabajo de titulación estudiamos el análisis estadístico de las propiedades pseudo-locales en plasmas espaciales turbulentos sin colisiones, mediante simulaciones numéricas directas (SND) utilizando un proxy heurístico LET, que se calculó en una simulación numérica tridimensional HMHD de un estado cuasi-estable de turbulencia. Este trabajo estuvo estrechamente relacionado con el análisis de las propiedades locales y globales de la transferencia de energía en modelos bidimensionales de la turbulencia de plasma desarrollado por Vásconez et al. [4], ya que siguiendo el mismo enfoque se probó que el proxy LET 3D en la simulación MHD tridimensional con $d_i = 0$ y con un cambio en la resolución utilizando el método de Simpson con 4 puntos de grilla promediada en 96 subcajas en cada dirección espacial. En los 6 mapas tridimensionales presentados en la figura (4.5) se pudo notar estructuras tenues dispersas en el volumen las cuales fueron similares, pero no idénticas a las presentadas en las figuras 4.1 y 4.2. Por lo tanto, esto implica que existe una interconexión a escala cruzada entre la dinámica de fluidos y la cinética, de modo que no solo la cascada turbulenta impulsa los procesos cinéticos de pequeña escala, sino que estos últimos también controlan la cascada, actuando como una forma de disipación dinámica. Se necesitan más estudios para describir con más detalle dicha interconexión.

5.2 Recomendaciones

- Se debe utilizar el código numérico aplicado en este trabajo de investigación en simulaciones numéricas tridimensionales de campo magnético, velocidad en un intervalo de tiempo, en presencia de turbulencia, de tal manera que se pueda aproximar más a la Ley de YPP.
- Dado la limitación del tiempo, no se logró probar el código numérico para 192 puntos de grilla. Se recomienda continuar con este trabajo de investigación siguiendo el mismo enfoque, pero con un método integral genérico y comprobar si llega a aproximarse a la Ley de YPP.

5.3 Bibliografía

- [1] N. A. Krall and A. W. Trivelpiece, “Principles of plasma physics,” *American Journal of Physics*, vol. 41, no. 12, pp. 1380–1381, 1973.
- [2] J. M. R. Gómez, “La influencia del sol en la tierra y otros planetas: Clima espacial,” *Revista Brasileira de Ensino de Física*, vol. 43, 2021.
- [3] D. McComas, S. Bame, B. Barraclough, W. Feldman, H. Funsten, J. Gosling, P. Riley, R. Skoug, A. Balogh, R. Forsyth *et al.*, “Ulysses’ return to the slow solar wind,” *Geophysical Research Letters*, vol. 25, no. 1, pp. 1–4, 1998.
- [4] C. L. Vásconez, D. Perrone, R. Marino, D. Laveder, F. Valentini, S. Servidio, P. Mininni, and L. Sorriso-Valvo, “Local and global properties of energy transfer in models of plasma turbulence,” *Journal of Plasma Physics*, vol. 87, no. 1, 2021.
- [5] E. Marsch, “Kinetic physics of the solar corona and solar wind,” *Living Reviews in Solar Physics*, vol. 3, no. 1, pp. 1–100, 2006.
- [6] O. Alexandrova, C. H. K. Chen, L. Sorriso-Valvo, T. S. Horbury, and S. D. Bale, “Solar wind turbulence and the role of ion instabilities,” *Space Science Reviews*, vol. 178, no. 2, pp. 101–139, 2013.
- [7] R. Bruno and V. Carbone, “The solar wind as a turbulence laboratory,” *Living Reviews in Solar Physics*, vol. 10, no. 1, pp. 1–208, 2013.
- [8] S. J. Schwartz, P. Hellinger, S. Bale, C. Owen, R. Nakamura, A. Vaivads, L. Sorriso-Valvo, W. Liu, R. Wimmer-Schweingruber, M. Fujimoto *et al.*, “Cross-scale coupling in plasmas preface,” *PLANETARY AND SPACE SCIENCE*, vol. 59, no. 7, pp. 447–448, 2011.
- [9] V. Carbone, R. Bruno, L. Sorriso-Valvo, and F. Lepreti, “Intermittency of magnetic turbulence in slow solar wind,” *Planetary and Space Science*, vol. 52, no. 10, pp. 953–956, 2004.
- [10] A. Greco, W. Matthaeus, S. Servidio, P. Chuychai, and P. Dmitruk, “Statistical analysis of discontinuities in solar wind ace data and comparison with intermittent mhd turbulence,” *The Astrophysical Journal*, vol. 691, no. 2, p. L111, 2009.

- [11] F. Nikolaevich, *Turbulence: the legacy of AN Kolmogorov*. Cambridge university press, 1995.
- [12] H. Politano and A. Pouquet, “von kármán–howarth equation for magnetohydrodynamics and its consequences on third-order longitudinal structure and correlation functions,” *Physical Review E*, vol. 57, no. 1, p. R21, 1998.
- [13] L. Sorriso-Valvo, V. Carbone, A. Noullez, H. Politano, A. Pouquet, and P. Veltri, “Analysis of cancellation in two-dimensional magnetohydrodynamic turbulence,” *Physics of Plasmas*, vol. 9, no. 1, pp. 89–95, 2002.
- [14] L. Sorriso-Valvo, R. Marino, V. Carbone, A. Noullez, F. Lepreti, P. Veltri, R. Bruno, B. Bavassano, and E. Pietropaolo, “Observation of inertial energy cascade in interplanetary space plasma,” *Physical review letters*, vol. 99, no. 11, p. 115001, 2007.
- [15] R. Marino, L. Sorriso-Valvo, R. D’Amicis, V. Carbone, R. Bruno, and P. Veltri, “On the occurrence of the third-order scaling in high latitude solar wind,” *The Astrophysical Journal*, vol. 750, no. 1, p. 41, 2012.
- [16] L. Z. Hadid, F. Sahraoui, S. Galtier, and S. Huang, “Compressible magnetohydrodynamic turbulence in the earth’s magnetosheath: estimation of the energy cascade rate using in situ spacecraft data,” *Physical review letters*, vol. 120, no. 5, p. 055102, 2018.
- [17] R. Bandyopadhyay, M. Goldstein, B. Maruca, W. Matthaeus, T. Parashar, D. Rufolo, R. Chhiber, A. Usmanov, A. Chasapis, R. Qudsi *et al.*, “Enhanced energy transfer rate in solar wind turbulence observed near the sun from parker solar probe,” *The Astrophysical Journal Supplement Series*, vol. 246, no. 2, p. 48, 2020.
- [18] S. Galtier, “von kármán–howarth equations for hall magnetohydrodynamic flows,” *Physical Review E*, vol. 77, no. 1, p. 015302, 2008.
- [19] N. Andrés, P. D. Mininni, P. Dmitruk, and D. O. Gomez, “von kármán–howarth equation for three-dimensional two-fluid plasmas,” *Physical Review E*, vol. 93, no. 6, p. 063202, 2016.

- [20] P. Hellinger, A. Verdini, S. Landi, L. Franci, and L. Matteini, “von kármán–howarth equation for hall magnetohydrodynamics: hybrid simulations,” *The Astrophysical Journal Letters*, vol. 857, no. 2, p. L19, 2018.
- [21] R. Ferrand, S. Galtier, F. Sahraoui, R. Meyrand, N. Andrés, and S. Banerjee, “On exact laws in incompressible hall magnetohydrodynamic turbulence,” *The Astrophysical Journal*, vol. 881, no. 1, p. 50, 2019.
- [22] G. Zimbardo, A. Greco, L. Sorriso-Valvo, S. Perri, Z. Vörös, G. Aburjania, K. Chargazia, and O. Alexandrova, “Magnetic turbulence in the geospace environment,” *Space science reviews*, vol. 156, no. 1, pp. 89–134, 2010.
- [23] W. Matthaeus, S. Servidio, and P. Dmitruk, “Comment on “kinetic simulations of magnetized turbulence in astrophysical plasmas”,” *Physical review letters*, vol. 101, no. 14, p. 149501, 2008.
- [24] T. Parashar, M. Shay, P. Cassak, and W. Matthaeus, “Kinetic dissipation and anisotropic heating in a turbulent collisionless plasma,” *Physics of Plasmas*, vol. 16, no. 3, p. 032310, 2009.
- [25] E. Camporeale and D. Burgess, “The dissipation of solar wind turbulent fluctuations at electron scales,” *The Astrophysical Journal*, vol. 730, no. 2, p. 114, 2011.
- [26] L. Franci, A. Verdini, L. Matteini, S. Landi, and P. Hellinger, “Solar wind turbulence from mhd to sub-ion scales: high-resolution hybrid simulations,” *The Astrophysical Journal Letters*, vol. 804, no. 2, p. L39, 2015.
- [27] S. Servidio, F. Valentini, D. Perrone, A. Greco, F. Califano, W. Matthaeus, and P. Veltri, “A kinetic model of plasma turbulence,” *Journal of Plasma Physics*, vol. 81, no. 1, 2015.
- [28] S. S. Cerri, F. Califano, F. Jenko, D. Told, and F. Rincon, “Subproton-scale cascades in solar wind turbulence: driven hybrid-kinetic simulations,” *The Astrophysical Journal Letters*, vol. 822, no. 1, p. L12, 2016.
- [29] D. Grošelj, S. S. Cerri, A. B. Navarro, C. Willmott, D. Told, N. F. Loureiro, F. Califano, and F. Jenko, “Fully kinetic versus reduced-kinetic modeling of collisionless plasma turbulence,” *The Astrophysical Journal*, vol. 847, no. 1, p. 28, 2017.

- [30] L. Franci, S. Landi, A. Verdini, L. Matteini, and P. Hellinger, “Solar wind turbulent cascade from mhd to sub-ion scales: large-size 3d hybrid particle-in-cell simulations,” *The Astrophysical Journal*, vol. 853, no. 1, p. 26, 2018.
- [31] L. Sorriso-Valvo, D. Perrone, O. Pezzi, F. Valentini, S. Servidio, I. Zouganelis, and P. Veltri, “Local energy transfer rate and kinetic processes: the fate of turbulent energy in two-dimensional hybrid vlasov–maxwell numerical simulations,” *Journal of Plasma Physics*, vol. 84, no. 2, 2018.
- [32] S. Banerjee and S. Galtier, “An alternative formulation for exact scaling relations in hydrodynamic and magnetohydrodynamic turbulence,” *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, vol. 50, no. 1, p. 015501, 2016.
- [33] D. Perrone, T. Passot, D. Laveder, F. Valentini, P. Sulem, I. Zouganelis, P. Veltri, and S. Servidio, “Fluid simulations of plasma turbulence at ion scales: Comparison with vlasov-maxwell simulations,” *Physics of Plasmas*, vol. 25, no. 5, p. 052302, 2018.
- [34] M. Asplund, N. Grevesse, A. J. Sauval, and P. Scott, “The chemical composition of the sun,” *Annual review of astronomy and astrophysics*, vol. 47, pp. 481–522, 2009.
- [35] E. Papini, L. Franci, S. Landi, A. Verdini, L. Matteini, and P. Hellinger, “Can hall magnetohydrodynamics explain plasma turbulence at sub-ion scales?” *The Astrophysical Journal*, vol. 870, no. 1, p. 52, 2019.
- [36] A. M. Vásquez, “Modelado de fenómenos de plasma en la corona solar,” Ph.D. dissertation, Universidad de Buenos Aires. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, 2002.
- [37] C. Vásconez, F. Valentini, E. Camporeale, and P. Veltri, “Vlasov simulations of kinetic alfvén waves at proton kinetic scales,” *Physics of Plasmas*, vol. 21, no. 11, p. 112107, 2014.
- [38] R. Ferrand, “Multi-scale compressible turbulence in astrophysical plasmas viewed through theoretical, numerical and observational methods,” Ph.D. dissertation, Université Paris-Saclay, 2021.

- [39] S. Banerjee, “Compressible turbulence in space and astrophysical plasmas: Analytical approach and in-situ data analysis for the solar wind,” Ph.D. dissertation, Paris 11, 2014.
- [40] U. Kortshagen, C. Busch, and L. Tsendin, “On simplifying approaches to the solution of the boltzmann equation in spatially inhomogeneous plasmas,” *Plasma Sources Science and Technology*, vol. 5, no. 1, p. 1, 1996.
- [41] P. A. Muñoz Sepúlveda *et al.*, “Teoría cinética de inestabilidades paramétricas en plasmas,” 2011.
- [42] K. Miura and C. Groth, “Development of two-fluid magnetohydrodynamics model for non-equilibrium anisotropic plasma flows,” in *38th AIAA Plasmadynamics and Lasers Conference In conjunction with the 16th International Conference on MHD Energy Conversion*, 2007, p. 4373.
- [43] S. Ledvina, Y.-J. Ma, and E. Kallio, “Modeling and simulating flowing plasmas and related phenomena,” in *Comparative Aeronomy*. Springer, 2008, pp. 143–189.
- [44] G. y. R. L. Sahraoui, F y Belmont, “Formulación canónica hamiltoniana de la magnetohidrodinámica de hall: hacia una aplicación a la teoría de la turbulencia débil,” *Physics of Plasmas*.
- [45] J. D. Jackson, *Classical electrodynamics*. American Association of Physics Teachers, 1999.
- [46] J. T. Coburn, M. A. Forman, C. W. Smith, B. J. Vasquez, and J. E. Stawarz, “Third-moment descriptions of the interplanetary turbulent cascade, intermittency and back transfer,” *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, vol. 373, no. 2041, p. 20140150, 2015.
- [47] V. Carbone, L. Sorriso-Valvo, and R. Marino, “On the turbulent energy cascade in anisotropic magnetohydrodynamic turbulence,” *EPL (Europhysics Letters)*, vol. 88, no. 2, p. 25001, 2009.
- [48] R. Bruno and V. Carbone, “The solar wind as a turbulence laboratory,” *Living Reviews in Solar Physics*, vol. 2, no. 1, p. 4, 2005.

- [49] C. Herbert, *An Introduction to fluid turbulence*.
- [50] V. Carbone, R. Marino, L. Sorriso-Valvo, A. Noullez, and R. Bruno, “Scaling laws of turbulence and heating of fast solar wind: the role of density fluctuations,” *Physical review letters*, vol. 103, no. 6, p. 061102, 2009.
- [51] A. Yaglom *et al.*, “On the local structure of a temperature field in a turbulent flow,” in *Dokl. akad. nauk sssr*, vol. 69, no. 6, 1949, pp. 743–746.
- [52] R. Antonia, M. Ould-Rouis, F. Anselmet, and Y. Zhu, “Analogy between predictions of kolmogorov and yaglom,” *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 332, pp. 395–409, 1997.
- [53] J. D. Huba, “Hall magnetohydrodynamics-a tutorial,” *Space Plasma Simulation*, pp. 166–192, 2003.
- [54] J. Huba, “Hall magnetohydrodynamics in space and laboratory plasmas,” *Physics of Plasmas*, vol. 2, no. 6, pp. 2504–2513, 1995.
- [55] A. Verdini, R. Grappin, P. Hellinger, S. Landi, and W. C. Müller, “Anisotropy of third-order structure functions in mhd turbulence,” *The Astrophysical Journal*, vol. 804, no. 2, p. 119, 2015.
- [56] H. Politano and A. Pouquet, “Dynamical length scales for turbulent magnetized flows,” *Geophysical Research Letters*, vol. 25, no. 3, pp. 273–276, 1998.
- [57] L. Sorriso-Valvo, G. De Vita, F. Fraternali, A. Gurchumelia, S. Perri, G. Nigro, F. Catapano, A. Retinò, C. H. Chen, E. Yordanova *et al.*, “Sign singularity of the local energy transfer in space plasma turbulence,” *Frontiers in Physics*, p. 108, 2019.
- [58] L. Sorriso-Valvo, K. Elbakidze, O. Kharshiladze, and D. Kvaratskhelia, “Energy transfer process in space plasma turbulence,” *ENERGY*, vol. 34, 2020.
- [59] S. A. Orszag and C.-M. Tang, “Small-scale structure of two-dimensional magnetohydrodynamic turbulence,” *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 90, no. 1, pp. 129–143, 1979.

5.4 Anexos

De igual manera para obtener la ley 4/5 de Kolmogorov en el caso isotrópico, partimos de la relación de Von Karma-Howarth-Moni, utilizamos homogeneidad e isotropía, la función de estructura de velocidad de tercer orden $S_3(r)$ se puede relacionar con el tensor $S_{ij,k}(r) = \langle u_i(\mathbf{x})u_j(\mathbf{x})u_k(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \rangle$

$$S_3(r) = \frac{r^i r^j r^k}{r^3} \langle \delta u_i \delta u_j \delta u_k \rangle, \quad (5.1)$$

de manera que considerando $\langle \delta u_i \delta u_j \delta u_k \rangle = 2 [S_{ij,k}(r) + S_{ik,j}(r) + S_{kj,i}(r)]$ reemplazamos en $S_3(r)$ y tenemos que

$$S_3(r) = 2 \frac{r^i r^j r^k}{r^3} = [S_{ij,k}(r) + S_{ik,j}(r) + S_{kj,i}(r)] \quad (5.2)$$

Ahora, la forma más general de los tensores $S_{ij,k}$, $S_{ik,j}$, $S_{kj,i}$ son

$$\begin{aligned} S_{ij,k}(r) &= A(r) \delta_{ij} \frac{r_k}{r} + B(r) \left(\delta_{ik} \frac{r_j}{r} + \delta_{jk} \frac{r_i}{r} \right) + C(r) \frac{r_i r_j r_k}{r^3}, \\ S_{ik,j}(r) &= A(r) \delta_{ik} \frac{r_j}{r} + B(r) \left(\delta_{ij} \frac{r_k}{r} + \delta_{jk} \frac{r_i}{r} \right) + C(r) \frac{r_i r_j r_k}{r^3}, \\ S_{kj,i}(r) &= A(r) \delta_{jk} \frac{r_i}{r} + B(r) \left(\delta_{ik} \frac{r_j}{r} + \delta_{ij} \frac{r_k}{r} \right) + C(r) \frac{r_i r_j r_k}{r^3}. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Reemplazamos las ecuaciones (5.3) en la ecuación (5.2), tenemos

$$\begin{aligned} S_3(r) &= 2 \frac{r^i r^j r^k}{r^3} = \left\{ (A + 2B) \delta_{ij} \frac{r_k}{r} + (A + 2B) \delta_{ik} \frac{r_j}{r} + (A + 2B) \delta_{jk} \frac{r_i}{r} + 3C \frac{r^i r^j r^k}{r^3} \right\}, \\ &= \frac{2(A + 2B)}{r^4} r^i r^j r^k \delta_{ij} r_k + \frac{2(A + 2B)}{r^4} r^i r^j r^k \delta_{ik} r_j + \frac{2(A + 2B)}{r^4} r^i r^j r^k \delta_{jk} r_i + 6C \frac{r^i r^j r^k r^j r_k r^k}{r^6}, \\ &= \frac{2(A + 2B)}{r^4} r^i r_i r^k r_k \delta_{ij} r_k + \frac{2(A + 2B)}{r^4} r^i r_i r^j r^j \delta_{ik} r_j + \frac{2(A + 2B)}{r^4} r^i r_i r^j r^j \delta_{jk} r_i + 6C \frac{r^6}{r^6}, \\ &= 6(A + 2B) + 6C, \end{aligned}$$

sacando factor común tenemos la ecuación

$$S_3(r) = 6(A + 2B + C). \quad (5.4)$$

Haciendo cumplir la incompresibilidad $\partial^k S_{ij,k} = 0$, obtenemos relaciones entre las funciones A, B y C

$$\begin{aligned}\partial^{r_k} S_{ij,k}(r) &= \partial^{r_k} \left\{ A \delta_{ij} \frac{r_k}{r} + B \left(\delta_{ij} \frac{r_j}{r} + \delta_{jk} \frac{r_i}{r} + C \frac{r_i r_j r_k}{r^3} \right) \right\}, \\ &= \partial^{r_k} \left(A \delta_{ij} \frac{r_k}{r} \right) + \delta^{r_k} \left(B \delta_{ij} \frac{r_j}{r} \right) + \delta^{r_k} \left(B \delta_{jk} \frac{r_i}{r} \right) + \delta^{r_k} \left(C \frac{r_i r_j r_k}{r^3} \right),\end{aligned}\quad (5.5)$$

usando las relaciones $\partial_k (r_i/r) = \delta_{ik}/r - r_i r_k / r^3$, $\delta_{ik} \delta_{kj} = \delta_{ij}$ y $\delta_{ij} 0 \delta_{ji}$, obtenemos las soluciones para cada término de la ecuación (5.5)

$$\begin{aligned}\partial^{r_k} \left(A \delta_{ij} \frac{r_k}{r} \right) &= A' \delta_{ij} \frac{r_k}{r} + A \delta_{ij} \partial^{r_k} \frac{r_k}{r}, \\ &= A' \delta_{ij} \frac{r_k}{r} + A \delta_{ij} \left(\frac{\delta_{kk}}{r} - \frac{r_k r_k}{r^3} \right), \\ &= A' \delta_{ij} + A \delta_{ij} \left(\frac{3}{r} - \frac{1}{r} \right), \\ &= \left(A' + \frac{2A}{r} \right) \delta_{ij},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\partial^{r_k} \left(B \delta_{ij} \frac{r_j}{r} \right) &= B' \delta_{ik} \frac{r_j}{r} + B \delta_{ik} \partial^{r_k} \frac{r_j}{r}, \\ &= B' \delta_{ik} \frac{r_j r_k}{r^2} + B \delta_{ik} \left(\frac{\delta_{kj}}{r} - \frac{r_k r_j}{r^3} \right), \\ &= \frac{B'}{r^2} r_i r_j r^2 + \frac{B}{r} \delta_{ik} \delta_{kj} - \frac{B}{r^3} r_i r_j, \\ &= \left(\frac{B}{r} \right) \delta_{ij} + \left(B' - \frac{B}{r} \frac{r_i r_j}{r^2} \right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\partial^{r_k} \left(B \delta_{jk} \frac{r_i}{r} \right) &= B' \delta_{jk} \frac{r_i}{r} + B \delta_{jk} \partial^{r_k} \frac{r_i}{r}, \\ &= B' \delta_{jk} \frac{r_i r_k}{r^2} + B \delta_{jk} \left(\frac{\delta_{ki}}{r} - \frac{r_k r_i}{r^3} \right), \\ &= B' \frac{r_i r_k}{r^2} + \frac{B}{r} \delta_{jk} \delta_{ki} - \frac{B}{r^3} \delta_{jk} r_k r_i, \\ &= B' \frac{r_i r_k}{r^2} + \frac{B}{r} \delta_{ij} - \frac{B}{r^3} \left(\frac{r_i r_j}{r^2} \right), \\ &= \frac{B}{r} \delta_{ij} + \left(B' - \frac{B}{r} \right) \frac{r_i r_j}{r^2},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\partial^{r_k} \left(C \frac{r_i r_j r_k}{r^3} \right) &= C' \frac{r_i r_j r_k}{r^3} + C \partial^{r_k} \left(\frac{r_i r_j r_k}{r^3} \right), \\
&= C' \frac{r_i r_j}{r^2} + C \left(\frac{\delta_{ik}}{r} - \frac{r_i r_k}{r^3} \right) \frac{r_j r_k}{r^2} + \frac{r_i}{r} \partial^k \left(\frac{r_j r_k}{r^2} \right), \\
&= C' \frac{r_i r_j}{r^2} + C \frac{r_i}{r} \left[\frac{r_j}{r^2} - \frac{r_j}{r^2} - \frac{r_j}{r} \left(\frac{2}{r} \right) \right], \\
&= C' \frac{r_i r_j}{r^2} + C \frac{2r_i r_j}{r^3}, \\
&= \left(C' + \frac{2C}{r} \right) \frac{r_i r_j}{r^2},
\end{aligned}$$

reemplazando nos queda $\partial^{r_k} S_{ij,k}(r) = 0$, entonces

$$\left(A' + \frac{2A}{r} \right) \delta_{ij} + \left(2B' + C' - \frac{2(B-C)}{r} \right) \frac{r_i r_j}{r^2} = 0,$$

como soluciones

$$\begin{aligned}
A' + \frac{2(A+B)}{r} &= 0, \\
2B' + C' - \frac{2(B-C)}{r} &= 0.
\end{aligned} \tag{5.6}$$

Sacamos la traza del tensor $\partial_{r_k} S_i^{jk} = 0$

$$\begin{aligned}
\left[A' + \frac{2(A+B)}{r} \right] \delta_i^i + \left[2B' + C' - \frac{2(B-C)}{r} \right] \frac{r_i r_i}{r^2} &= 0, \\
3A' + \frac{6(A+B)}{r} + 2B' + C' - \frac{2(B-C)}{r} &= 0, \\
[3A' + 2B' + C'] + \frac{6A + 6B - 2B - 2C}{r} &= 0.
\end{aligned} \tag{5.7}$$

Sea el sistema de ecuaciones $y = 3A + 2B + C$ y $y' = 3A' + 2B' + C'$, calculamos $y' + \frac{2}{r}y = 0$, $y = 0$ y $y' = 0$, y las nuevas soluciones son

$$\begin{aligned}
3A + 2B + C &= 0, \\
3A' + 2B' + C' &= 0
\end{aligned} \tag{5.8}$$

Vamos a utilizar las ecuaciones (5.6) y (5.12)

$$A' + \frac{2(A+B)}{r} = 0A + B = \frac{-r}{2} A' B = \frac{-rA'}{2} - A \tag{5.9}$$

$$2B' + C' - \frac{2(B - C)}{r} = 0 \quad (5.10)$$

donde $S_{ijk}(r)$ es el tensor definido como

$$\delta^{rj} S_{ij,i} = (A' + 4B' + C') + \frac{2}{r} (A + 4B + C), \quad (5.11)$$

$$\delta^{rj} S_{ij,i} = -\epsilon, \quad (5.12)$$

Igualando la ecuación 5.11 y 5.12

$$(A' + 4B' + C') + \frac{2}{r} (A + 4B + C) = -\epsilon,$$

Reemplazamos B, C, B', C' , $B = -\frac{A'r}{2} - A \Rightarrow B' = -\frac{A''r}{2} - \frac{A'}{2} - A'$, $B' = -\frac{A''r}{2} - \frac{3}{2}A'$, $C = A'r - A \Rightarrow C' = A'r + A' - A' = C' = A''r$:

$$\begin{aligned} \left\{ A' + 4 \left[-\frac{A''r}{2} - \frac{3A'}{2} \right] + A''r \right\} + \frac{2}{r} \left\{ A + 4 \left[-\frac{A'r}{2} - A \right] + A'r - A \right\} &= -\epsilon \\ \{ A' - 2A''r - 6A' + A''r \} + \frac{2}{r} \{ A - 2A'r - 4A + A'r - A \} &= -\epsilon \\ -A''r - \delta A' + \frac{2}{r} (-A'r - 4A) &= -\epsilon \\ A''r + 7rA' + 8A &= \epsilon r, \end{aligned}$$

$$r^2 A'' + 7rA' + 8A = \epsilon r, \quad (5.13)$$

Considerando $A = r^m$, $A' = mr^{m-1}$, $A'' = m(m-1)r^{m-2}$, entonces la ecuación 2.39, queda expresado de la siguiente forma:

$$r^2 [m(m-1)r^{m-2}] + 7r [mr^{m-1}] + 8r^m = \epsilon r$$

Resolviendo la ecuación diferencial ordinaria tenemos

$$m(m-1)r^m + 7mr^m + 8r^m = 0$$

$$(m^2 - m + 7m + 8)r^m = 0$$

$$(m^2 + 6m + 8) = 0$$

$$(m+4)(m+2) = 0$$

$$m_1 = -4$$

$$m_2 = -2$$

Par la solution particulière

$$A_p = \alpha \epsilon r$$

$$A'_p = \alpha \epsilon$$

$$A''_p = 0$$

Entonces, reemplazando los valores en la ecuación (2.39)

$$r^2(0) + 7r(\alpha\epsilon) + 8(\alpha\epsilon r) = \epsilon r$$

$$7(\alpha\epsilon r) + 8\alpha\epsilon r = \epsilon r$$

$$15\alpha\epsilon r = \epsilon r$$

$$\alpha = \frac{1}{15}$$

Reemplazamos el valor de α en la solución particular $A_p = \frac{1}{15}\epsilon r$

$$A(r)_h = C_1 r^{m_1} + C_2 r^{m_2}$$

$$A(r)_h = C_1 r^{-4} + C_2 r^{-2}$$

Para la solución general tenemos

$$\begin{aligned}
 A &= A_h + A_p, A = C_1 r^{-4} + C_2 r^{-2} + \frac{1}{5} \\
 A &= \frac{C_1}{r^4} + \frac{C_2}{r^2} + \frac{\epsilon r}{15} \\
 \frac{A}{r} &= \frac{C_1}{r^5} + \frac{C_2}{r^3} + \frac{\epsilon}{15} \\
 \lim_{r \rightarrow 0} \frac{A}{r} &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{C_1}{r^5} + \frac{C_2}{r^3} + \frac{\epsilon}{15} = \lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{\epsilon}{15} \right)
 \end{aligned}$$

Entonces $C_1 = C_2 = 0 \Rightarrow \frac{A}{r} = \frac{\epsilon}{15}$. Para llegar a la ley $-\frac{4}{5}$ de Kolmogorov, se sabe que $S_3(r) = -12A$, $S_3(r) = -12\frac{\epsilon}{15}r$, entonces:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \lim_{\nu \rightarrow 0} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{S_3}{r}(r) = -\frac{12\epsilon}{15}$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \lim_{\nu \rightarrow 0} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{S_3}{r}(r) = -\frac{4\epsilon}{5} \tag{5.14}$$

Esta es la ley de $-4/5$.