# UNIVERSIDAD TÉCNICA DE AMBATO

## DIRECCIÓN DE POSGRADO

## MAESTRÍA EN DOCENCIA MATEMÁTICA

**TEMA:**

**USO DE LA PANTALLA DIGITAL INTERACTIVA CON EL SOFTWARE MAPLE Y SU INCIDENCIA EN EL PROCESO ENSEÑANZA-APRENDIZAJE COLABORATIVO DE CÁLCULO I DE LOS ESTUDIANTES DE SEGUNDO NIVEL DEL IST SECAP AMBATO.**

Trabajo de investigación Previa a la obtención del Grado Académico de Magíster en Docencia Matemática.

**Autor:** Ing. Oscar Eduardo Ruiz Robalino.

**Director:** Ing. Mg. Lenin Ríos Lara.

Ambato-Ecuador

2013

Al Consejo de Posgrado de la Universidad Técnica de Ambato**.**

El Tribunal Receptor de la Defensa del Trabajo de Investigación con el tema: **"USO DE LA PANTALLA DIGITAL INTERACTIVA CON EL SOFTWARE MAPLE Y SU INCIDENCIA EN EL PROCESO ENSEÑANZA-APRENDIZAJE COLABORATIVO DE CÁLCULO I DE LOS ESTUDIANTES DE SEGUNDO NIVEL DEL IST SECAP AMBATO."**, presentado por el Ingeniero Oscar Eduardo Ruiz Robalino y conformado por Ing. Mg. Franklin Pacheco Rodríguez, Ing. Mg. Javier Sánchez Guerrero, Ing. Mg. Efraín Tibanta Narváez Miembros del Tribunal, *Ing. Mg. Lenin Ríos Lara* , Director del Trabajo de Investigación y presidido por el Ing. Mg. Juan Garcés Chávez Presidente del Tribunal; Ing. Mg. Juan Garcés Chávez Director de Posgrado de la Universidad Técnica de Ambato, una vez escuchada la defensa oral el Tribunal aprueba y remite el trabajo de investigación para uso y custodia en las Bibliotecas de la UTA.

| | |
|---|---|
| ________________________<br>Ing. Mg. Juan Garcés Chávez<br>PRESIDENTE DEL TRIBUNAL<br>DE DEFENSA | ________________________<br>Ing. Mg. Juan Garcés Chávez<br>DIRECTOR DE POSGRADO |

________________________

Ing. Mg. Lenin Ríos Lara
DIRECTOR DE TRABAJO
DE INVESTIGACIÓN

________________________

Ing. Mg. Franklin Pacheco Rodríguez
MIEMBRO DEL TRIBUNAL

________________________

Ing. Mg. Javier Sánchez Guerrero
MIEMBRO DEL TRIBUNAL

________________________

Ing. Mg. Efraín Tibanta Narváez
MIEMBRO DEL TRIBUNAL

## AUTORÍA DE LA INVESTIGACIÓN

La responsabilidad de las opiniones, comentarios y críticas emitidas en el trabajo de investigación con el tema: **"USO DE LA PANTALLA DIGITAL INTERACTIVA CON EL SOFTWARE MAPLE Y SU INCIDENCIA EN EL PROCESO ENSEÑANZA-APRENDIZAJE COLABORATIVO DE CÁLCULO I DE LOS ESTUDIANTES DE SEGUNDO NIVEL DEL IST SECAP AMBATO.",** nos corresponden exclusivamente a: Ing. Oscar Eduardo Ruiz Robalino Autor de la Investigación e Ing. Mg. Lenin Ríos Lara Director del Trabajo de Investigación; y el Patrimonio intelectual del mismo a la Universidad Técnica de Ambato.

| | |
|---|---|
| Ing. Mg. Lenin Ríos Lara | Ing. Oscar Eduardo Ruiz Robalino |
| Director | Autor |

## DERECHOS DE AUTOR

Autorizo a la Universidad Técnica de Ambato, para que haga de este trabajo de investigación o parte de él, un documento disponible para su lectura, consulta y procesos de investigación, según las normas de investigación.

Cedo los derechos de mi trabajo de investigación, con fines de difusión pública además apruebo la reproducción de esta, dentro de las regulaciones de la Universidad.

Ing. Oscar Eduardo Ruiz Robalino.

CC. 1802683589

Autor

## DEDICATORIA

A mis padres Héctor y Esthelita por apoyarme toda la vida. A mi adorable esposa, mi compañera de éxitos y fracasos, mi bebe que está por nacer.
Y la razón de mejorar cada día, **Joel.**

Con amor,
**Oscar**

## AGRADECIMIENTO

A la Universidad Técnica de Ambato por haberme dado la oportunidad de actualizar y poner en práctica los conocimientos en beneficio de la comunidad educativa. A mis maestros por la probidad académica demostrada, merecedores de respeto y admiración, hoy dilectos amigos.

Al Ing. Mg. Lenin Ríos Lara, director de tesis, por sus sabios consejos y apoyo incondicional en la elaboración de este trabajo.

**Oscar Ruiz**

## INDICE GENERAL

**INDICE DE GRAFICOS**

**INDICE DE CUADROS**

**UNIVERSIDAD TÉCNICA DE AMBATO**

**DIRECCION DE POSGRADO**

**MAESTRÍA EN DOCENCIA MATEMÁTICA**

**"USO DE LA PANTALLA DIGITAL INTERACTIVA CON EL SOFTWARE MAPLE Y SU INCIDENCIA EN EL PROCESO ENSEÑANZA-APRENDIZAJE COLABORATIVO DE CÁLCULO I DE LOS ESTUDIANTES DE SEGUNDO NIVEL DEL IST SECAP AMBATO."**


**Autor:** Ing. Oscar Eduardo Ruiz Robalino

**Director:** Ing. Mg. Lenin Ríos Lara


**Fecha:** Agosto del 2013

## RESUMEN


El cambio siempre presenta oposición, y cuando este cambio genera interés para la práctica docente , que busca potencializar el uso de herramientas que se aplican en métodos innovadores a favor del aprendizaje de los estudiantes se construyen en un modelo colaborativo de recursos didácticos, el avance agigantado de los recursos tecnológicos crea retos académicos al aplicar estas poderosas herramientas en una síntesis tecnológica practica para impartir cátedra moderna, que nos plantea el trabajo grupal en equipos como la parte práctica lo exige en la vida diaria, preparando y motivando el liderazgo en cada trabajo. Los contenidos de Calculo I plantean el análisis, procedimiento y razonamiento, aplicables a problemas reales y su posible solución. Este trabajo de investigación constituye un propuesta diferente en la aplicación, del trabajo colaborativo el que favorece determinadas actividades cognitivas y de dinámica interpersonal que difícilmente se pueden promover a través de otras didácticas en el aula. Creando un grado de interacción en el trabajo conjunto que crece asociado al grado de autonomía con que trabaja el estudiante.



Descriptores: Software Maple, TIC´S, P.D.I, Recursos didácticos, Aprendizaje basado en Problemas, P.E.A ,

**TECHNICAL UNIVERSITY OF AMBATO**

**GRADUATE MANAGEMENT**

**MASTERY ON TEACHING MATHEMATICS**

**"USE OF AN INTERACTIVE DIGITAL DISPLAY WITH MAPLE SOFTWARE AND ITS IMPACT ON THE COLLABORATIVE LEARNING PROCESS OF CALCULUS I FOR SECOND LEVEL STUDENTS AT IST- SECAP OF AMBATO"**

**Author: Ing. Oscar Eduardo Ruiz Robalino**

**Director: Ing. Mg. Lenin Ríos Lara**

**Date: August, 2013**

## SUMMARY

Change always presents opposition, and when this change generates interest for teaching practice, which seeks to maximize the use of tools that are applied on innovative methods of learning for students are built on a collaborative model of teaching resources, the gigantic progress of technological resources creates academic challenges at applying these powerful technological tools in a practical synthesis to impart modern chair, which poses group work in teams as the required practice in daily life, preparing and motivating leadership in each job. The contents of Calculus I pose the analysis, procedure and reasoning applicable to real life problems and their possible solution. This research is a different proposal in the application, of the collaborative work that favors certain cognitive activities and interpersonal dynamics that are difficult to promote through other didactics in the classroom. Creating a level of interaction on joint work that grows associated to a degree of autonomy with which the student works.

Key words: Maple Software, ICT's, PDI, Teaching Resources, Problem Based Learning, PEA.

# INTRODUCCIÓN.

La investigación educativa tiene la posibilidad de establecer nuevas formas de análisis e interpretación sobre las potencialidades de la aplicación y uso de las TIC en la educación de tercer nivel. Tratamos de crear un espacio de reflexión y estudio sobre las matemáticas, con el propósito de mejorar el proceso de enseñanza y aprendizaje, y sobre los instrumentos conceptuales y metodológicos de índole general, que la didáctica de las Matemáticas está generando como campo de investigación.

El Cálculo diferencial e Integral establece una relación entre las variables es decir con el fin de proporcionar al estudiante herramientas matemáticas para modelar problemas que impliquen cambios, esta gestión se centra en la actividad del profesorado y en su control absoluto sobre los procesos que se dan.

Lejos de estimular aprendizajes estrictamente individuales fruto de la interacción entre el alumno y el docente o los recursos que este proporcione, el trabajo cooperativo busca aprendizajes nacidos de la interacción entre los estudiantes que constituyen un verdadero equipo de trabajo.

La propuesta tiene como propósito presentar un modelo de formación activa, formativa para el estudiante ya que enlaza las habilidades adquiridas con anterioridad y las que desarrolla en su estudio, requiere que cada uno de los componentes del grupo esté comprometido, tanto con su aprendizaje personal como con el aprendizaje del resto de miembros del equipo.

La idea no es tratar de ser un simple recurso tecnológico que ayude en el aprendizaje repetitivo, si no muestre de una mejor forma las diversas representaciones de un concepto matemático, logrando mayor interactividad cuando utiliza diferentes representaciones como la algebraica, la numérica y la gráfica al mismo tiempo.

El software Maple brinda esta plataforma donde se realiza cálculo básico de aritmética como cálculos avanzados en otras áreas como la estadística y la posibilidad de mostrar ejemplos en dos y tres dimensiones al graficar variables.

La presente investigación consta de seis capítulos.

**El Capítulo I**, se relaciona con el problema de investigación en donde se hace referencia al análisis del contexto, estableciendo causas y consecuencias así como su delimitación. En el problema de investigación se plantea los objetivos que se desean alcanzar, las interrogantes de estudio que regirán el proceso de investigación y la respectiva justificación e importancia.

**En el Capítulo II**, está determinado el marco teórico que servirá de base al desarrollo de la problemática enunciada, los antecedentes, las variables inmersas en el problema con su respectiva definición y el planteo de la hipótesis.

**El Capítulo III**, está formado por el marco metodológico en el cual se explicarán los métodos y técnicas utilizadas para el desarrollo del tema.

**El Capítulo IV,** contiene el marco administrativo donde se expresa los recursos que se utilizará en la investigación, el presupuesto que requiere la misma y todas las actividades a realizarse hasta llegar a su fin.

**El Capítulo V**, contiene las conclusiones y recomendaciones del trabajo de investigación.

**El capítulo VI**, contiene la propuesta de solución al problema planteado, esto es "Desarrollar un manual para el uso de la Pantalla Digital Interactiva con el software Maple, en la enseñanza-aprendizaje del Módulo de Cálculo I para los estudiantes de Segundo nivel del IST-SECAP Ambato."

Consta de datos informativos, antecedentes, justificación, objetivos generales y específicos, análisis de factibilidad, fundamentación científica técnica, el texto, administración.

Finalmente tenemos las referencias bibliográficas que sirvieron para la fundamentación teórica de la investigación, y los anexos donde se encuentran los cuestionarios de la investigación.

La propuesta tiene como meta contribuir al mejoramiento continuo de la Institución donde se realizó el proyecto de investigación dejando como precedente que esta puede ser mejorada o sufrir cambios acorde a la ley de Educación Superior.

# CAPÍTULO I

## EL PROBLEMA

**TEMA:**

"Uso de la pantalla digital interactiva con el software Maple y su incidencia en el proceso enseñanza-aprendizaje colaborativo de Cálculo I de los estudiantes de Segundo nivel del IST SECAP Ambato".

**PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.**

Las nuevas tecnologías de la información, de la comunicación avanzan a pasos agigantados e impactan en todo el quehacer del hombre contemporáneo y en sus entornos sociales, facilitando el entorno del aprendizaje de los estudiantes y su interacción con la pizarra.

La informática y sus desarrollos se han incorporado en todos los órdenes de la vida cotidiana conformando los rasgos peculiares de una nueva cultura. Mencionemos, como ejemplo, los cambios que estas nuevas tecnologías producen en la organización del trabajo, donde surgen nuevas ocupaciones, otras se transforman o inclusive desaparecen.

En esta realidad, el campo educacional queda necesariamente comprometido. Siendo la educación superior uno de los principales agentes socializadores, es la que tiene la responsabilidad de incorporarlo al currículo o sea de planificar su inclusión, de buscar su conocimiento y aprovechamiento efectivo.

Nuestra actitud reflexiva y comprensión crítica, aunados a los aportes de la psicología cognitiva, constituyen el marco dentro del cual debemos procurar pensar y expresar en términos formativos y de valores humanos los usos que la carrera de Automatización y Control Industrial le dará a estas nuevas tecnologías.

El IST-SECAP Ambato, cuenta con pocos recursos metodológicos actualizados para el apoyo de las carreras de Electricidad y Electrónica Industrial , Automatización y Control Industrial, la realidad en cuanto se refiere a la aplicación de la nuevas tecnologías de la información y comunicación en el proceso enseñanza-aprendizaje es tradicionalista, por cuanto se rigen al dictado de Módulos de 64 horas, de 4 horas diarias de clase hasta su culminación, no existe la capacitación suficiente a los docentes sobre aspectos de la Informática, como herramientas del desarrollo de metodologías de enseñanza multimedia y su interacción, mejorando de esta forma la participación activa de los estudiantes.

### 1.2.1. Contextualización.

Es indudable que dos de las características distintivas de toda civilización humana son la capacidad de comunicación entre los individuos y la capacidad de acumular, procesar y transmitir información. Hoy, existe una gran brecha entre el acceso a la información y a los recursos de la comunicación ya que las instituciones educativas no poseen igualdad de presupuesto para su implementación.

También es indudable que hoy se globalizan los fenómenos, que tanto los problemas de medio ambiente como los económicos, políticos o culturales tienen que ser visto en toda la complejidad de la escala planetaria. Analizar la realidad sólo desde perspectivas locales es cada vez más inútil. Parece obvio que, en estos tiempos, más que nunca, los recursos de comunicación y el acceso a la información son poder.

La palabra "poder" es poco atractiva para algunos, pero hay que saber cómo se "puede utilizar" para saber cómo mejorar la educación. Y lo mismo que sirve a unos como instrumento de poder y de control, sirve a otros para coordinar esfuerzos y compartir información.

Por todo lo dicho, surge la necesidad de crear nuevas formas de comunicación y acceso a la información, que son de uso común en las sociedades avanzadas, es una causa más de retraso de los países subdesarrollados en América Latina, pues nos impide adaptarnos para reaccionar ante la mejora continua del mundo de hoy.

El uso de una de las herramientas como la Pantalla Táctil ofrece hoy la manera de comunicarse, coordinar, acceder a información que puede facilitar y mejorar nuestro trabajo, ofrecer información que puede servir para la educación-sensibilización. Se puede disponer hoy de mecanismos rápidos y baratos de comunicación y acceso a información con cobertura mundial, es decir hacer uso de la Pantalla Táctil en el proceso enseñanza-aprendizaje dentro de educación.

La Pizarra Interactiva, también denominada (PDI) promueve la utilización pedagógica de las nuevas tecnologías de la información y la comunicación, mediante el trabajo en proyectos colaborativos para mejorar el proceso enseñanza-aprendizaje

Desarrolla y sostiene una comunicación entre el educador y los alumnos que trabajan en un entorno de Aprendizaje Colaborativo, es decir, en "la adquisición individual de conocimientos, competencias y formación en valores, que ocurren como resultado de la interacción en grupo".

La Pizarra Digital es el recurso tecno educativo que ha irrumpido con más fuerza en el contexto de la educación y formación en el siglo XXI. No cabe duda que todo centro educativo que trata de mostrar el nivel tecnológico de sus enseñanzas, que se encuentra en la punta de la calidad educativa, afirma disponer de un buen número de Pizarras Digitales.

La incorporación de la Pantalla Digital Interactiva en la formación de carreas de Tecnología en el Ecuador, lo cual se enmarca en una gran variedad de niveles educativos, áreas y grados de complejidad. Estos proyectos se desarrollan en un "entorno digital" que no requiere la presencia física de los elementos con los participantes y que proporciona un lugar de comunicación continua, sin limitaciones de tiempo y espacio.

Aplicados al campo de la educación podemos entender "alfabetización digital" como el grado de dominio básico que permite a un alumno la utilización del software de simulación en las sociedades de la información (como son las de los países de nuestro entorno) la alfabetización digital es un hecho constatable.

En cualquier centro de estudio superior se enseña a los alumnos el manejo del ordenador y la utilización de Internet. En esta sociedad es casi inexistente el aporte de todas las personas que participan en los espacios virtuales para mejorar la comunicación y la participación activa de la comunidad estudiantil para el estudio y manejo de programas para la resolución de aspectos de la matemática.

Una comunidad global de gente comprometida y educadores dedicados a esta filosofía, "orientadores de aprendizaje", según versa en el Artículo 80 de la Constitución Política del Ecuador establece que el Estado fomentará la ciencia y la tecnología, especialmente en todos los niveles educativos, dirigidas a mejorar la productividad, la competitividad, el manejo sustentable de los recursos naturales, y a satisfacer las necesidades básicas de la población.

El Instituto Superior Tecnológico SECAP de la ciudad de Ambato es uno de los centros de estudios de tercer nivel legalmente reconocido por el CONESUP de acuerdo a la resolución RCP S.17 N°305.06, cuenta con 7 carreras de nivel de Tecnología, la institución al igual que la mayoría de Universidades y centros de Educación Superior, está regida por la LOES el cual da los lineamientos para su funcionamiento en relación a las mallas curriculares.

La implementación de la nueva pizarra digital interactiva, para la especialidad de Automatización y Control Industrial , demandara muy bajo costo ya que con utilización de código libre para la comunicación inalámbrica bluetooth y de una cámara bluetooth apuntada a la superficie del pizarrón  transformando un aula tradicional en una aula PDI,  que permitirá al Instituto ofrecer una educación de calidad con la utilización de las nuevos programas informáticos como el maple que motiven la participación del estudiante.

### 1.2.2. Análisis Crítico.

El enseñar y aprender son temas fundamentales los cuales constituyen pilares fundamentales en el proceso educativo, de ellos se derivan las diferentes técnicas metodológicas y actividades que propone el docente al desarrollar su clase.

Son pocos los docentes que dinamizan tales procesos con el uso y apoyo de nuevas formas de despertar interés del estudiante en clase, esto desemboca en los criterios tradicionalistas de enseñanza aprendizaje  de la matemática  con una actitud memorista del estudiante, esta es una búsqueda de nuevos procesos de formación.

Ya que nos enfrentamos al desinterés por parte del estudiantado por adquirir conocimientos básicos, generando cierto grado de resistencia a la asimilación del conocimientos  matemáticos, bajo esta premisa los estudiantes se limitan solo a reproducir los deberes desarrollados por una sola persona  y por ende esto se refleja en las notas bajas de los estudiantes llevando a la consecuencia lógica de la pérdida del módulo.

De mantener los formatos clásicos de enseñanza en nuestra educación nunca descubriremos el potencial que existe dentro de cada estudiante, por lo que no se podrá tener estudiantes acorde  a los intereses institucionales de excelencia y de mejora continua para desarrollarse en su ámbito profesional.

Considerando que una alternativa metodológica es el trabajo colaborativo permitirá a los estudiantes de segundo nivel del módulo de Cálculo I, de la carrera de Tecnología en Electricidad y Electrónica Industrial del IST-SECAP, logren superar sus dificultades en la asignatura, este método presta la oportunidad de que los estudiantes sean dinámicos, participativos, solidarios y mejoren su aprendizaje en el módulo de Cálculo I de forma colectiva con todos los participantes, rompiendo los limitantes personales y procurando la aceptación y tolerancia de los desacuerdos personales de los distintas formas de abordar la solución de un problema matemático.

Bajo esta metodología desarrollaremos el respeto y fomentaremos el trabajo en equipo al manejar elementos tecnológicos logrando prepararlos para su búsqueda de solución de problemas con lógica analítica y procedimental que genere la matemática.

**1.2.3. Prognosis.**

De continuar la misma situación por la falta de capacitación e implementación de procesos interactivos como herramientas dentro del proceso enseñanza-aprendizaje, el perfil de salida de los Tecnólogos seguirá igual, que el modelo tradicionalista.

La participación activa en el aula de clase, fomenta el desarrollo de estudiantes creativos e innovadores, los cuales al manejar la pantalla digital interactiva a través, de la ayuda de software Maple permitirá que los egresados de las diferentes carreras mejoren su perfil profesional, resolviendo con prontitud problemas dentro del área de Cálculo I.

**1.2.4. Formulación del problema.**

¿Cómo incide el uso de la Pizarra Digital Interactiva, denominada (PDI), con el software Maple y su mejora en el proceso enseñanza-aprendizaje de Cálculo I de los estudiantes de segundo, nivel de la carrera de Automatización y de Control Industrial de IST-SECAP Ambato?

### 1.2.5. Preguntas Directrices.

a) ¿Qué software educativo utilizan los docentes de la institución para resolver problemas de cálculo y mejorar el proceso enseñanza-aprendizaje?
b) ¿Qué estrategias metodológicas utilizan los docentes del IST SECAP en el proceso enseñanza-aprendizaje?
c) ¿Con el uso de la pantalla táctil digital con el software maple mejorará y se dinamizará el proceso enseñanza-aprendizaje en la unidad académica bajo análisis?
d) ¿Cuáles son las expectativas de los estudiantes y los docentes sobre la incorporación de la pantalla táctil con del software maple en el proceso enseñanza-aprendizaje?
e) ¿Cómo se lleva el Proceso Enseñanza-Aprendizaje con los estudiantes de la Institución?

### 1.2.6. Delimitación del objeto de Investigación.

**Delimitación de contenidos.**

**CAMPO:** Módulo de Contenido de la Materia.
**ÁREA:** Cálculo I.
**ASPECTO:** Metodología de trabajo colaborativo con el uso del PDI.

**Delimitación Espacial.**

La presente investigación se realizará utilizando la Pantalla Digital Interactiva con el programa Maple en la materia de Cálculo I del segundo nivel de la carrera de Automatización y de Control Industrial de IST-SECAP Ambato, Provincia de Tungurahua, Ecuador.

**Delimitación Temporal.**

Se realiza en el semestre septiembre 2012-febrero 2013.

**JUSTIFICACIÓN.**

La importancia del trabajo de investigación radica en capacitar a los docentes, y estudiantes del IST SECAP, que no se puede quedar rezagados con los avances de la ciencia y la tecnología dentro de la educación, más específicamente de la PDI como instrumento del proceso enseñanza-aprendizaje. Conociendo que el proceso de enseñanza aprendizaje sólo es eficaz si se da a través de la relación entre lo cognitivo y lo psicomotriz, es decir aprendiendo a aprender y aprendiendo a hacer.

En cuanto se refiere a la novedad que presenta, lo constituye el ser los pioneros como institución en el cantón y provincia en la utilización de la PDI dentro del proceso enseñanza-aprendizaje, con la construcción de la PDI y la utilización del software maple servirá para mejorar el rendimiento académico de los estudiantes, puesto que se unirá las diferentes carreras con la informática, mejorando la calidad de educación que oferta el Instituto.

Los beneficiarios directos serán los estudiantes, del primer nivel de automatización y control industrial, ya que tendrán una herramienta básica, que permitirá que estos programas mejoren los conocimientos impartidos en el aula, logrando desarrollar en los jóvenes el interés por el conocimiento y la investigación, en lo posterior será todo el instituto, y a lo mejor toda la ciudad que aprovechará las bondades que la institución ofrece dentro de la vinculación con la Comunidad.

## 1.4. OBJETIVOS.

### 1.4.1. Objetivo General.

Determinar la incidencia del uso de la Pantalla Digital Interactiva con el software Maple en el proceso enseñanza-aprendizaje colaborativo de Cálculo I, de los estudiantes de segundo nivel de Electricidad y Electrónica Industrial IST-SECAP.

### 1.4.2. Objetivos Específicos.

- Diagnosticar el uso de los recursos tecnológicos y las estrategias didácticas que utilizan actualmente los docentes en la enseñanza del Cálculo I.

- Proponer el manual de uso para la Pantalla digital interactiva con el software maple en el proceso enseñanza-aprendizaje del Cálculo I.

- Aplicar el recurso de la pantalla digital interactiva con el software maple en la enseñanza de una unidad didáctica de cálculo I y evaluar el rendimiento académico.

## CAPÍTULO II

## MARCO TEÓRICO

### 2.1 ANTECEDENTES INVESTIGATIVOS.

Lo que se quiere probar en esta investigación es que los alumnos que usan las herramientas tecnológicas en un modelo virtual de educación para aprender Matemática en MAPLE logran diferencias significativas en los aprendizajes que aquellos que no la usan para su proceso de enseñanza esto conlleva a limitar si estos mismos alumnos logran una motivación mayor que aquellos que no la usan para su proceso de enseñanza, en consecuencia para validar la metodología de educación virtual es importante demostrar que tanto influye la motivación en el aprendizaje.

"(Tic) A PARTIR DEL SISTEMA DE APRENDIZAJE LET ME LEARN®: DOS ESTUDIOS DE CASO.

AUTORA: Laura Patricia Villamizar Carrillo
DIRECTOR DE TESIS: Dr. Ángel Pío González Soto
LUGAR: Tarragona – España.
AÑO: 2007.

INSTITUCION DONDE SE REALIZO LA INVESTIGACION: Departamento de Ingenierías Electrónica, Eléctrica, Telecomunicaciones y Sistemas de la Universidad de Pamplona en Colombia y al Departamento de Electrónica, Eléctrica, Automática e Ingeniería Informática de la Universidad Rovira i Virgili de Tarragona en España.

A pesar de las enormes potencialidades de los ordenadores para modificar en profundidad la manera de aprender, todo hace pensar que no nos encontramos aún ante una tecnología de efectos mágicos. Los ordenadores aportan una serie de potencialidades de innegable valor. Pero su utilización no es razón suficiente para que el aprendizaje se modifique en profundidad (Martí, 1992).

Como herramienta intelectual el ordenador permite incorporar activamente estrategias pedagógicas para mejorar el proceso instruccional, por lo que Riveros y Mendoza (2005) señalan que los usos del computador en educación son básicamente tres: como herramienta de trabajo, herramienta docente y sistema para compartir el conocimiento".

Los textos, folletos, libros, entre otros, serán otras fuentes de consulta, así como se emplearán las TIC que se encuentran a disposición en los diferentes sitios de la red, los que están al alcance de la comunidad del conocimiento, además del diálogo con personas especializadas en el tema que contribuirán a éxito del presente trabajo de investigación.

**2.2. Fundamentación Filosófica.**

La disciplina filosófica que reflexiona sobre el obrar humano que es un saber práctico, que tiene por objeto que las acciones de los hombres sean realizadas con sensatez, para lograr estudiantes que practiquen el bien común.

La investigación se enfoca en el Paradigma Crítico-Propositivo. Según Herrera y otros. (2004) **"**Crítico porque cuestiona los esquemas molde de hacer investigación que están comprometidas con la lógica instrumental del poder.

Propositivo en cuanto a la investigación no se detiene en la contemplación pasiva de los fenómenos, sino que además plantea alternativas de solución construidas en un clima de sinergia y pro actividad**".** (Pág. 136).

Se puede manifestar que este paradigma forma personas críticas de los problemas y fenómenos que se presentan en la realidad, pero al mismo tiempo proponen alternativas de solución valedera que van en beneficio personal, pero también en beneficio de la comunidad, considerando y respetando el pensamiento filosófico de cada persona, en el presente caso en la formación de profesionales éticos y morales en la parte humanística, con pensamiento de servicio social.

Fomentando la participación del estudiante con este método interactivo desarrollara en el educando, el trabajo cooperativo y desarrollo de técnicas grupales para mejorar el trabajo en equipo eje fundamental del técnico de campo, el tecnólogo es el mando medio entre el Ing. Jefe de Planta y los obreros la parte operativa de toda empresa Industrial.

**2.3. Fundamentación Legal.**

En este sentido en el informe Estándares TIC para la formación inicial docente elaborado por la UNESCO (2008, p. 104) se presenta un resumen de características relevantes de un conjunto de estándares analizados.

Otra de las propuestas que se han desarrollado está enfocada a evaluar y acreditar si realmente las personas poseen estos conocimientos del uso y manejo de TIC. El certificado internacional europeo de informática de usuario (ICDL/ECDL) es una prueba de conocimientos prácticos gestionada por la Fundación ECDL y que consta de siete módulos detallados (The European Computer Driving Licence Foundation, 2002): Conceptos Básicos de Tecnologías de Información, Uso del Computador y Administración de Archivos, Procesador de Textos, Hojas de Cálculo, Base de Datos, Presentaciones, Información y Comunicación.

En Chile, por ejemplo, se ha desarrollado un programa de formación en uso de las herramientas, audio visual basado en el estándar PDI (Pantalla Digital Interactiva) a cargo de la Fundación Chile. El objetivo de esta iniciativa denominada Clase digital es mejorar dichas aptitudes en alumnos y en docentes, así como contribuir a mejorar su empleabilidad.

Así través de ésta más de 1600 docentes y más de 30 mil alumnos han obtenido su certificación (Cortés, 2005). En el sistema educativo francés también ha implementado una acreditación del manejo de sistemas interactivos. El diploma B2i -Brevet Informatique e Internet- es obligatorio para superar las etapas educativas de la educación no universitaria.

El Certificado de Informática e Internet C2i, -Certificat Informatique e Internet- permiten al personal docente una utilización profesional de las herramientas de las TIC con los alumnos, esencialmente en el aula.
Desde el inicio del curso 2006-2007, todos los profesores en prácticas recibieron una formación para su capacitación de cara al C2i. A partir de junio de 2008, este título certifica que tras su formación inicial, el profesor en prácticas posee las aptitudes requeridas para el dominio de las TIC, requisito indispensable para su nombramiento definitivo (Éducnet, 2009,pag12-13).

Fundación Telefónica desarrolla este proyecto como parte del eje de Tecnología y Educación en el cual se han implementado 55 Aulas Fundación Telefónica en 44 escuelas, capacitando a 1400 docentes ecuatorianos que forman parte de la Red de Aprendizaje de Fundación Telefónica en Iberoamericana, la cual está conformada por 12696 profesores de 13 países.
A través de esta Red se realizan trabajos colaborativos tanto para formación como emprendimiento de proyectos educativos con base en las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC), contribuyendo con la educación de más 290.000 niños y niñas de 13 países de América Latina, de los cuales 40.000 son de Ecuador.

La investigación plantea, el uso del recurso informático como base del conocimiento interactivo, desarrollando un nuevo sistema de enseñanza con la aplicación de la capacitación docente, para el manejo de la aplicación PDI como herramienta en el desarrollo cognitivo en el estudiante que motivado por el uso de las herramientas tecnológicas mejora su aptitud ante el conocimiento de las Matemática.

Subtemas de los indicadores para la constelación de ideas

## 2.4. CATEGORÍAS FUNDAMENTALES.

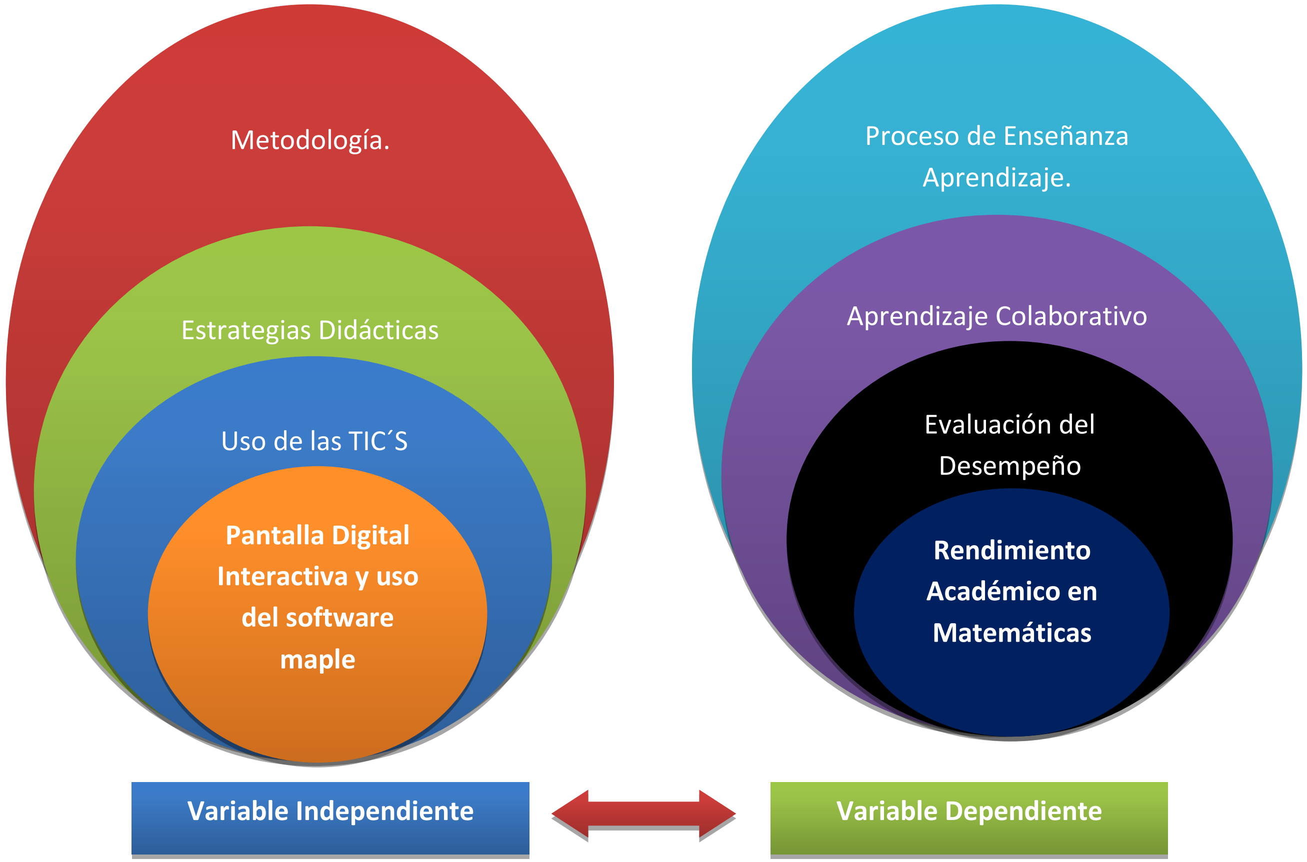



**Gráfico Nº 1** Red de Inclusiones

**Elaborado por:** El Investigador

**Constelación de Ideas Conceptuales.**

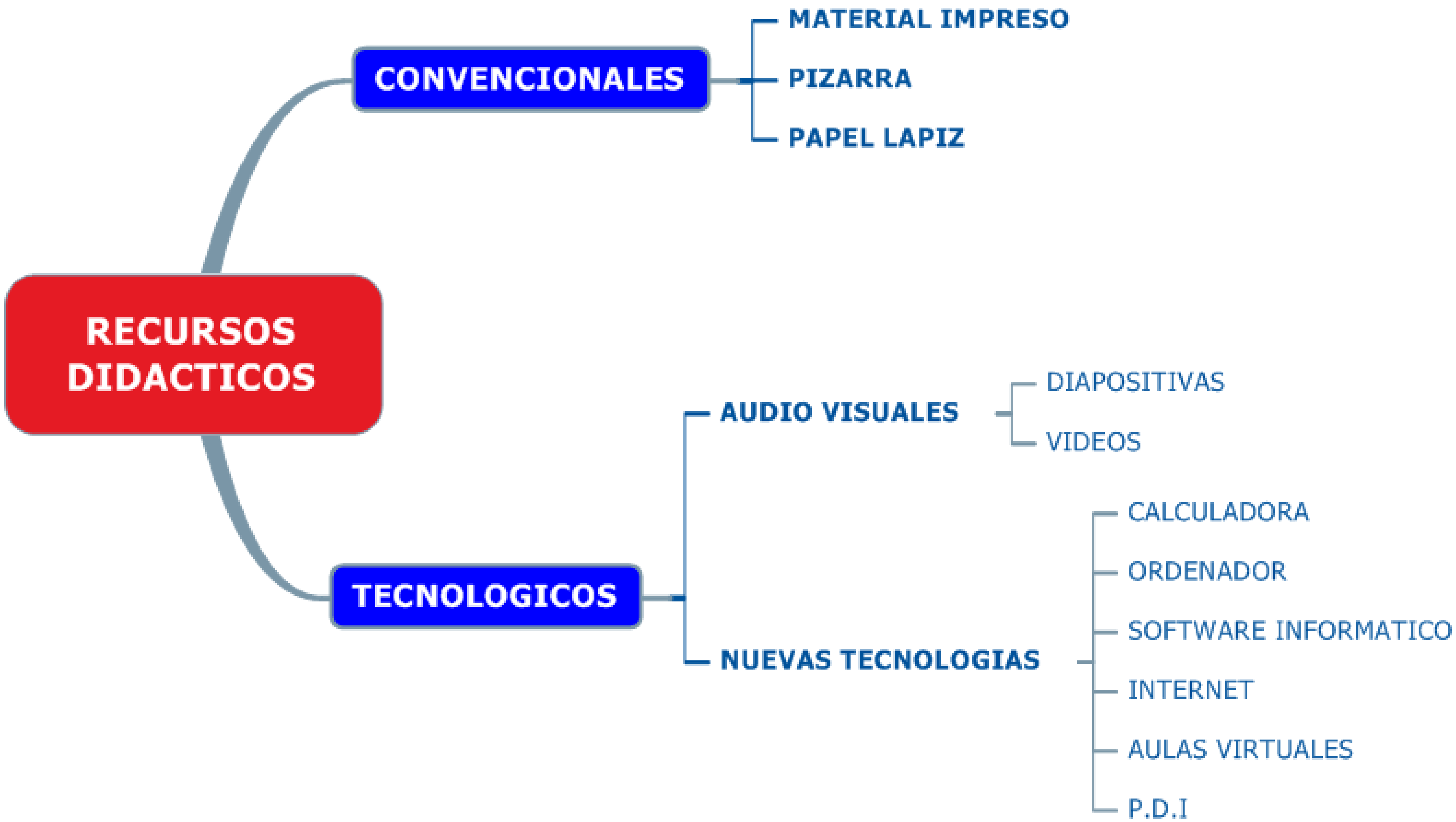



**Grafico N°2 Subcategorías de la VI**
**Elaborado por: El investigador**

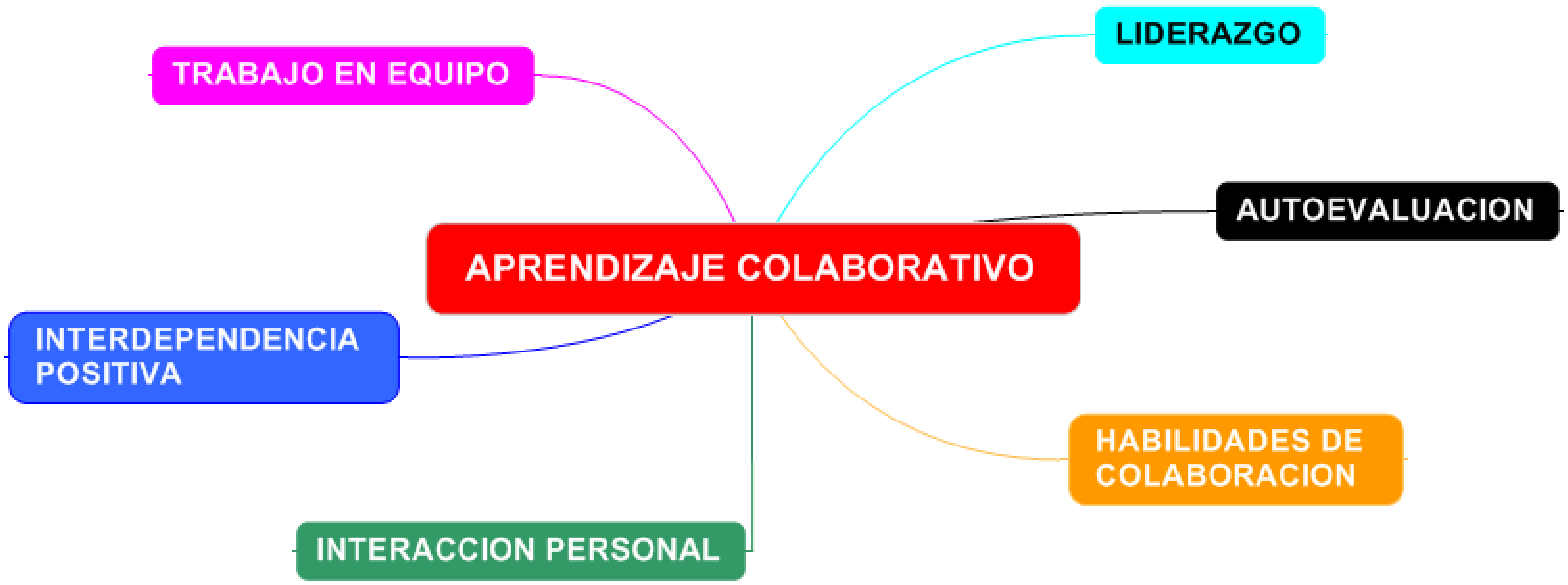



**Grafico N°3 Subcategorías de la VD**
**Elaborado por: El investigador**

### 2.4.1. Metodología Educativa.

La metodología, entendida de forma general como el conjunto de métodos, estrategias, procedimientos y actividades que se diseñan y planifican para dar coherencia al proceso de enseñanza – aprendizaje es, sin duda, un elemento privilegiado para proporcionar una respuesta educativa adecuada al alumnado que cursa segundo nivel de Electricidad y Electrónica industrial **IST-SECAP**

Sin embargo, la propia amplitud y complejidad de los procesos que se ponen en juego en una situación de enseñanza – aprendizaje, hace imposible considerar la metodología como una variable aislada de los otros factores que condicionan el desarrollo del currículum.

Dado que existe una relación de interdependencia entre los distintos elementos curriculares, las adaptaciones que se efectúen en alguno de ellos, suelen ir ligadas a cambios y modificaciones simultáneas en los otros. Así, por ejemplo, modificar la metodología puede suponer efectuar, a la vez, cambios tanto en el qué enseñar:
Objetivos, competencias, contenidos y actividades como en la organización y temporalización.

Este sistema de acciones o conjunto de actividades del profesor y sus estudiantes, organizadas y planificadas por el docente con la finalidad de posibilitar el aprendizaje de los estudiantes.

#### 2.4.1.1. Proceso docente educativo.

Uno de los indicadores que mejor identifican la idoneidad de una respuesta educativa es el relacionado con el cómo enseñar. Las decisiones adoptadas en torno a esta cuestión, conllevan hacer previamente el análisis de cómo aprende el alumno, cuáles son las circunstancias del contexto educativo y qué opción u opciones metodológicas son las más adecuadas en cada momento.

Las decisiones que se refieren al cómo enseñar, no vienen determinadas en ninguna normativa, no hay ninguna metodología insustituible, depende de muchos factores. Así habrá unas metodologías mejores para unos alumnos que para otros, más adecuadas para unos contenidos o que se ajusten mejor a las características del profesorado.

Estas reflexiones nos llevan a plantearnos dos cuestiones a tener en cuenta:
¿Cómo aprenden nuestros alumnos?
¿Cómo les vamos a enseñar?

Tan importante como conseguir una adecuada selección de qué es lo que enseñar es saber cómo hacerlo, es decir, decidir cuál va a ser la manera idónea de plantear las diferentes situaciones de aprendizaje.

Al igual que el alumnado se sirve de diversas estrategias para aprender hay también múltiples estrategias para enseñar.

**2.4.1.2. Componentes del proceso docente educativo.**

Posiblemente se aprende más fácilmente, con menos esfuerzo y mayor disfrute personal si el alumno:

- Está motivado porque se tienen en cuenta sus intereses, su estilo de aprendizaje, su capacidad y sus niveles de competencia curricular.
- Participa activamente.
- Consigue relacionar lo que tiene que aprender con lo que ya sabe.
- Participa en actividades diversificadas, adaptables y variadas, en situaciones y contextos reales o lo más cercano posible a lo real.

- Trabaja con materiales funcionales, acordes con su nivel de conocimiento, su cultura, percibiendo un sentido y utilidad práctica en lo que aprende.
- Obtiene los apoyos y ayudas que precisa y se respeta su ritmo de aprendizaje.

#### 2.4.1.3. Métodos de enseñanza aprendizaje.

La introducción del elemento técnico-colaborativo en la metodología que nosotros proponemos, se debe utilizar como un medio para favorecer el interés y la motivación del alumnado y no como un fin en sí mismo. La realización de tareas, el manejo de herramientas informáticas y la intervención sobre software Maple con el fin de desarrollar aprendizajes de utilidad práctica, crean un escenario educativo de una enorme utilidad en el proceso de enseñanza – aprendizaje.

Proponemos desarrollar las clases a través de estrategias metodológicas integradoras, activas, partiendo de situaciones contextualizadas que organizan los contenidos de los diferentes ámbitos del cálculo diferencial.

#### 2.4.1.4. Método explicativo ilustrativo.

Forma parte de los métodos expositivos mediante la cual el profesor trasmite nuevos conocimientos, se diferencia de la conversación porque es una exposición precisa del material de estudio sin la participación activa de los alumnos, sobre la base del análisis de hechos y demostraciones, incluyendo además, la formulación de conclusiones. Es bueno destacar que, independientemente de que se expone un nuevo material, el profesor debe estimular la actividad de los alumnos para que asimilen los conocimientos correctamente. La exposición sistemática del contenido, a través de la explicación puede ser interrumpida por algunas preguntas que el profesor formule a los alumnos. Éstos pueden hacer preguntas también después que el profesor termine su explicación.

Así, en la explicación sistemática del material de estudio, el profesor formula preguntas, crea ejercicios interactivos en la PDI y utiliza diversos recursos didácticos los cuales permiten esclarecer la comprensión del material que se explica y despertar el interés por el nuevo contenido de estudio.

La principal dificultad que se presenta durante la explicación es mantener siempre la mayor atención de todo el grupo, por lo que es necesario alternar este método con la participación activa de los estudiantes en el proceso de ejecución en la resolución de pasos para obtener respuesta en un ejercicio planteado de cálculo.

Una condición indispensable para despertar el interés por la explicación, es el lenguaje en que se exponga. Este debe ser claro, exacto y con palabras muy expresivas, dosificando la cantidad de términos técnicos utilizados.

**2.4.1.5. La motivación.**

Otro de los problemas existentes, muy relacionado con la metodología, es que, la enseñanza actual no se adecua a las necesidades que el alumno tiene. Los alumnos no se sienten motivados frente a lo que están estudiando, no sienten motivación para abordar nuevos aprendizajes en un enfoque en profundidad.

Hay que resaltar que "el aprendizaje se caracteriza como un proceso de adquisición de conocimientos y motivacional a la vez" (G. Cabanach et al., 1996, p. 9), en consecuencia, en la mejora del rendimiento académico debemos tener en cuenta tanto los aspectos cognitivos como los motivacionales.

Para aprender, es imprescindible "poder" hacerlo, lo cual hace referencia a las capacidades, los conocimientos, las estrategias, y las destrezas necesarias, pero además, es necesario "querer" hacerlo, tener la disposición, la intención y la motivación suficientes (Núñez y González- Pumariega, 1996,p.22).

En la actualidad, se necesita nuevas formas de aprendizaje que estimulen al alumno, motivación que se puede lograr mediante la participación activa, el recurso más utilizado hasta ahora, que no genera satisfacción duradera en el alumno, o mediante motivación personal del estudiante hacia la materia, desarrollando su integración social, mediante trabajos en grupo o estudiando la materia mediante aprendizaje significativo.

En general, mejorar la motivación de los alumnos, es uno de los principales problemas de la docencia, y su consecución, redundaría, con toda seguridad, en un incremento del rendimiento académico.

**2.4.1.6. Las competencias.**

Otro de los problemas que se está generalizando, es que las competencias y los contenidos adquiridos en los centros de enseñanza se encuentran cada vez más distantes de las competencias que las empresas y organizaciones quieren en sus plantillas (Guerrero y Clavero, 2004, p.64).

En niveles educativos superiores, ya se están introduciendo cambios de ajuste mediante la introducción en el Espacio Europeo de Educación Superior, pero en niveles inferiores no se ha producido ninguna modificación.

Las empresas y las organizaciones propias de la nueva economía, se caracterizaran por unos puestos de trabajo cada vez más exigentes, capaces de seguir el ritmo de la sociedad en su avance hacia el desarrollo del conocimiento y la capacidad de renovarlo continuamente. El empleado tipo de la sociedad del conocimiento, es versátil, capaz de integrarse en equipos diferentes, de desempeñar roles diversos, adaptándose con rapidez a los cambios y de desplegar un amplio abanico de habilidades sociales, indispensables para la interacción y la creación de activos intelectuales (Rastrollo y Castillo, 2003).

La demanda de nuevas competencias (adaptación, autonomía, iniciativa, liderazgo, comunicación) está siendo creciente. En el pasado, el énfasis se colocó en los lazos entre el estudio y la ocupación, pero los estudios recientes se centran básicamente en el rol del conocimiento general, las actitudes y las habilidades sociales.

Los centros de estudio tecnológico tienen la responsabilidad de formar, preparar y educar al alumno en el sentido más amplio, redefiniendo los procesos formativos, cuya finalidad tendera más a la facilitación de estrategias para la adquisición, generación y transmisión de conocimiento de forma permanente, unido todo ello al desarrollo de habilidades organizativas y sociales. La formación, más que simplemente "ensenar y aprender", tendrá que enfocarse a "ensenar a aprender", a "ensenar a desaprender" y a "ensenar a desenvolverse".

Teniendo en cuenta la problemática que existe en la educación actual y los nuevos conceptos que se están planteando como eje del cambio en la enseñanza, en esta investigación nos centraremos en la metodología del aprendizaje colaborativo y en las aportaciones que esta puede tener en el cambio educativo actual.

### 2.4.2. Aprendizaje Colaborativo.

#### 2.4.2.1. La colaboración.

La cultura de la colaboración, del trabajo en equipo o del intercambio entre iguales, ha tenido un gran auge en las iniciativas educativas más innovadoras. Así se refleja en la reciente reforma educativa que fomenta estrategias metodológicas basadas en la actividad y participación del alumnado, favoreciendo el pensamiento racional y crítico, el trabajo individual y colaborativo del alumno y alumna. Más específicamente se hace referencia también al aprendizaje colaborativo: para alcanzar las competencias básicas, entre ellas la de “aprender a aprender”, es necesario la ayuda de distintas estrategias y técnicas, de entre ellas la de “trabajo colaborativo”.

La colaboración es un principio que garantiza un proceso de enseñanza más creativo, sólido y enriquecedor, en la medida en que el profesorado y el alumnado se implican en la construcción y transmisión del conocimiento escolar. Por el contrario, la colaboración requiere de un lento aprendizaje, la intervención dinamizadora docente y una concepción pedagógica y organización del IST-SECAP que brinden numerosas y variadas oportunidades para formarse en el dialogo, el intercambio y el respeto a la diversidad, así como en el ejercicio de los derechos, deberes y potencialidades educativas de la colectividad.

Hay que tener en cuenta que en numerosas ocasiones es posible organizar la enseñanza de tal modo que los alumnos encuentren todo el sentido al hecho de adoptar una actitud activa, implicada y participativa. Los enfoques globalizadores y la metodología de proyectos, pueden contribuir eficazmente a que la adquisición de contenidos dispares, pertenecientes a áreas curriculares distintas, se contemple como necesaria para dar respuesta a un reto determinado, para llevar a término una elaboración especifica.

Los alumnos pueden interactuar en el instituto, y fuera de él, de tres formas básicas (Sapp 2006):

- Pueden competir entre sí para ver quién es el mejor, donde las actividades se organizan de forma que puedan alcanzar la meta propuesta si, y solo si, los otros no consiguen alcanzar la suya.

- Pueden trabajar individualmente para conseguir su meta sin prestar atención alguna a los otros estudiantes, cada alumno se preocupa de su propio trabajo y de alcanzar los objetivos de cada tema.

- Pueden trabajar colaborativamente de forma que cada uno esté tan interesado en el trabajo de los compañeros como en el suyo propio. El alumnado está estrechamente vinculado, de forma que cada uno de ellos puede alcanzar los objetivos si, y solo si, los otros alcanzan los suyos también.

Por lo que, se puede deducir que la forma como los docentes estructuran los objetivos de aprendizaje determina el modo en que interaccionaran los alumnos y alumnas entre sí y con el profesor o profesora y el cómo esta forma de interacción afectara a los procesos cognitivos y afectivos de la educación.

**2.4.2.2. Concepto de Aprendizaje Colaborativo.**

El aprendizaje colaborativo se refiere a una metodología o grupo de procedimientos de enseñanza que parten de la organización de la clase en pequeños grupos donde los alumnos trabajan conjuntamente de forma coordinada entre sí para resolver tareas académicas y profundizar en su propio aprendizaje.

Dos autores de referencia, los hermanos David y Roger Jonhson (2001), lo han definido “como aquella situación de aprendizaje en las que los objetivos de los participantes se hallan estrechamente vinculados, de tal manera que cada uno de ellos "solo puede alcanzar sus objetivos si y solo si los demás consiguen alcanzar los suyos.” Por consiguiente, estas personas tenderán a colaborar entre sí para conseguir sus respectivos objetivos.

Los procedimientos del trabajo en grupo y del aprendizaje colaborativo suelen confundirse, pero no son lo mismo.

El "trabajo en grupo" se utiliza para describir el procedimiento de organizar actividades en grupos pequeños. Y el "aprendizaje colaborativo" en cambio, pertenece a la categoría de trabajo en grupo, pero no todo trabajo en grupo en el aula es necesariamente aprendizaje colaborativo.

"El aprendizaje colaborativo es el uso instructivo de grupos pequeños para que los estudiantes trabajen juntos y aprovechen al máximo el aprendizaje propio y el que se produce en la interrelación". Para lograr esta meta, se requiere planeación, habilidades y conocimiento de los efectos de la dinámica de grupo. "El aprendizaje colaborativo se refiere a una serie de estrategias instrucciones que incluyen a la interacción colaborativa de estudiante a estudiante, sobre algún tema, como una parte integral del proceso de aprendizaje" (Kagan, 1994).

El trabajo en grupo, como tal, no toma en cuenta la responsabilidad individual involucrada en la contribución del alumno (carece de responsabilidad individual), y así se da la desigualdad en cuanto al trabajo invertido, es decir, siempre habrá estudiantes que harán todo o la mayoría del trabajo, mientras que otros contribuyen con muy poco o nada (carece de igualdad la participación)". Mientras que, el aprendizaje colaborativo, hace posible entender los conceptos que tienen que ser aprendidos a través de la discusión y resolución de problemas a nivel grupal, es decir, a través de una verdadera interrelación.

Usando este método, los estudiantes también aprenden las habilidades sociales y comunicativas que necesitan para participar en sociedad y "convivir" (Delors, 1996).

#### 2.4.2.3. Características del aprendizaje colaborativo.

El aprendizaje debe garantizar para que sea colaborativo (Díaz Barriga, 1999):

- La igualdad de cada individuo en el proceso de aprendizaje. Debe existir un grado de simetría en los roles que desempeñan los participantes en una actividad grupal.

- La realización de experiencias mutuas en el aula entre los diferentes compañeros de manera que haya una direccionalidad en el proceso de enseñanza aprendizaje (unos aprenden de otros).

- Promoción de la planificación y la discusión en conjunto, se favorezca el intercambio de roles, la distribución de responsabilidades y delimite la división del trabajo entre los miembros.

Para que los efectos del aprendizaje colaborativo sean efectivamente eficaces, este debe cumplir una serie de requisitos imprescindibles entre los que destacamos la interdependencia positiva e igualdad de estatus entre los miembros del grupo, lo cual no significa homogeneidad sino heterogeneidad de los sujetos que forman el grupo.

#### 2.4.2.4. Modelos de aprendizaje colaborativo.

Los modelos más utilizados, no los únicos, de aprendizaje colaborativo son:

1. **Equipos colaborativos y juegos de torneo** (Team games tournament; De Vries y Slavin, 1978) Los estudiantes son asignados a equipos heterogéneos. La función principal del equipo es ensenar a sus miembros y asegurarse de que todos están preparados para el torneo. Cada alumno compite con compañeros de su mismo nivel de rendimiento (con los que se sienta en una mesa), representando al equipo

que le ha entrenado. Las puntuaciones obtenidas por cada alumno se añaden a la puntuación media de su equipo.

Inmediatamente después del torneo, el profesor prepara un marcador que las incluye y que esta visible en el aula. La composición de los grupos para los torneos varía en función de los cambios producidos en el rendimiento.

2. **Equipo colaborativo y divisiones de rendimiento** (Student Teams Achievement Divisions, STAD; Slavin, 1978).

   Técnica de similares características a la anterior pero que sustituye los torneos por exámenes de realización individual que el profesor evalúa en relación con grupos de nivel homogéneo, en lugar de comparar al alumno con el conjunto de la clase.

   Una modalidad especial de esta técnica es la comparación del rendimiento alcanzado en la prueba por cada sujeto con el obtenido en la evaluación anterior. Cuando un alumno logra mejorar sus resultados anteriores, consigue los puntos para el equipo que le ha entrenado.

3. **Equipos colaborativos e individualización asistida** (Team Assisted Individualization, TAI; Slavin, Leavey y Madden, 1982, pg. 23).

   Combina el aprendizaje colaborativo con la instrucción individualizada, su objetivo es adaptar dicho aprendizaje a niveles de rendimiento extremadamente heterogéneos.

   Para llevar a cabo esta técnica se forman equipos heterogéneos de 4 a 5 alumnos, cada alumno trabaja dentro de su equipo con un texto programado por unidades de acuerdo con su nivel de rendimiento y en cada unidad, los alumnos realizan regularmente un conjunto de actividades.

Los compañeros de cada equipo trabajan por parejas de su propia elección, intercambiando las hojas de respuestas y corrigiéndose mutuamente los ejercicios. Cuando aciertan en un porcentaje igual o superior al 80 por cierto, pasan a la evaluación de la unidad, que es corregida por otro alumno-monitor. La puntuación de cada equipo procede de la suma de las puntuaciones que obtienen todos sus miembros y del número de pruebas que realizan.

4. **Aprendiendo juntos** (Learning Together, Johnson y Johnson, 1975, pg. 33).

   Los alumnos trabajan en grupos pequeños (en torno a tres miembros) y heterogéneos. La tarea se plantea de forma que haga necesaria la interdependencia (con un material único o con división de actividades que posteriormente se integran). Se evalúa el producto del grupo en función de determinados criterios especificados de antemano recompensados al equipo que mejor la ha realizado.

5. **Investigación de grupo** (Grup Investigation, GI; Sharan y Sharan, 1976, 1992, pg. 56).

   Se divide a los alumnos por equipos (de dos a seis miembros). Cada equipo elige un tema del programa y distribuye las tareas específicas entre sus miembros para desarrollarlas y elaborar un informe final. El profesor fomenta la discusión de la tarea por parte de los alumnos, les anima y les asesora para que elaboren un plan que permita desarrollar bien la tarea encomendada utilizando diversos materiales, fuentes de información, etc. Finalmente cada equipo de trabajo expone ante la clase el resultado de su tarea.

Tanto el profesor como los alumnos evalúan el producto de cada grupo. Estos modelos pueden ser combinados para enriquecer el repertorio de recursos a utilizar en las diferentes materias o actividades. El aprendizaje colaborativo, es una herramienta útil para desarrollar en los alumnos relaciones interpersonales, la integración, la tolerancia y la construcción de la igualdad en contextos heterogéneos.

De esta manera, los modelos más eficaces son los que incluyen equipos en los que se mezcla la diversidad existente en el aula, con sistemas de evaluación que permite distribuir el éxito entre todos los alumnos y proporcionar experiencias de igualdad de estatus a los miembros de cada grupo. Dicha eficacia puede explicarse teniendo en cuenta que proporcionan la oportunidad de compartir y conseguir con miembros del otro grupo (étnico, de género, de rendimiento) desde un estatus similar, metas fuertemente deseadas (como son las calificaciones), lo cual contribuye a desarrollar las habilidades sociales, la atracción interpersonal, disminuye las conductas inadecuadas de los alumnos y proporciona la oportunidad de descubrir las semejanzas inter-grupales existentes.

### 2.4.3. Tecnología de la información y la comunicación en el proceso enseñanza aprendizaje.

La sociedad actual, la sociedad llamada de la información, demanda cambios en los sistemas educativos de forma que éstos se tornen más flexibles y accesibles, menos costosos y a los que han de poderse incorporar los estudiantes en cualquier momento de su vida. Nuestra institución de formación superior, para responder a estos desafíos, debe revisar sus referentes actuales y promover experiencias innovadoras en los procesos de enseñanza-aprendizaje apoyados en las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC). Y, contra lo que estamos acostumbrados a ver, el énfasis debe hacerse en la docencia, en los cambios de estrategias didácticas de los profesores, en los sistemas de comunicación y distribución de los materiales de aprendizaje, en lugar de enfatizar la disponibilidad y las potencialidades de las tecnologías.

En efecto, las actividades ligadas a las TIC y la docencia han sido desarrolladas, generalmente, por profesores entusiastas, que han conseguido dotarse de los recursos necesarios para experimentar. Pero no existe en el organigrama de las Universidades una ubicación clara de la responsabilidad de los recursos de TIC para la docencia, ni un canal establecido para su financiación, gestión y desarrollo.

Los Servicios de Informática han podido en algunos casos darles cierto soporte, pero sin la imprescindible planificación docente y configuración pedagógica, por lo que se pone de manifiesto la rigidez de las estructuras universitarias para integrar en su funcionamiento cotidiano la utilización de las TIC en los procesos de enseñanza-aprendizaje.

Se requiere participación activa y motivación del profesorado, pero se necesita además un fuerte compromiso institucional. La cultura universitaria promueve la producción, la investigación en detrimento de la docencia y de los procesos de innovación en este ámbito. Y sin embargo procesos de este tipo parecen ser los que oxigenarán de alguna forma a las instituciones de tercer nivel.

Desde diversas instancias se pide a las instituciones de educación superior que flexibilicen sus procedimientos y su estructura administrativa para adaptarse a nuevas modalidades de formación más acordes con las necesidades que la nueva sociedad presenta.

#### 2.4.3.1. Contexto de la innovación.

Los procesos de innovación respecto a la utilización de las TIC en la docencia universitaria suelen partir, la mayoría de las veces, de las disponibilidades y soluciones tecnológicas existentes. Sin embargo, una equilibrada visión del fenómeno debería llevarnos a la integración de las innovaciones tecnológicas en el contexto de la tradición de nuestras instituciones. No podemos olvidar la idiosincrasia de cada una de las instituciones al integrar las TIC en los procesos de la enseñanza superior, tampoco que la dinámica de la sociedad puede dejarnos al margen.

Se hace imprescindible partir de un análisis del contexto donde la innovación se ha de integrar, ya sea desde el punto de vista geográfico (la distribución de la población, la ruptura del territorio en islas como es nuestro caso, las condiciones socio-laborales en las que nuestros posibles alumnos se desenvuelven,...) pedagógico (nuevos roles de profesor y alumno, mayor abanico de medios de aprendizaje, cambios en las estrategias didácticas,…), tecnológico (disponibilidad tecnológica de la institución y de los usuarios, etc..) o institucional.

Por otra parte, conviene aclarar, y más hablando de universidad, que innovación no siempre es sinónimo de investigación. Cuando Morín y Seurat (1998) definen innovación como "el arte de aplicar, en condiciones nuevas, en un contexto concreto y con un objetivo preciso, las ciencias, las técnicas, etc…", están considerando que la innovación no es solamente el fruto de la investigación, sino también el de la asimilación por parte de las organizaciones de una tecnología desarrollada, dominada y aplicada eventualmente a otros campos de actividad, pero cuya puesta en práctica en su contexto organizativo, cultural, técnico o comercial constituye una novedad.

Así pues cualquier proyecto que implique utilización de las TIC, cambios metodológicos, formación de los profesores, etc. constituye una innovación. En este sentido, creemos que aquellas instituciones educativas de tercer nivel que no contemplen cambios radicales en relación a los medios didácticos y a los sistemas de distribución de la enseñanza pueden quedar fuera de la corriente innovadora que lleva a las nuevas instituciones universitarias del futuro.

Y estos cambios pasan obligatoriamente por lograr que la enseñanza de nuestras universidades e institutos superiores de tecnología, convencionales sean más flexible. Las posibilidades de las TIC en la enseñanza superior están dando lugar a distintos modelos de organizaciones (Adell, 1997; Aoki, Fasse y Stowe, 1998; Salinas 1998a; Hanna,1998, pag. 41, ). Este último, por ejemplo, nos habla de 7 tipos distintos: universidades de educación a distancia basadas en la tecnología; instituciones privadas dirigidas a la enseñanza de adultos; universidades corporativas; alianzas estratégicas universidad-empresa; organizaciones de control de acreditación y certificación; universidades tradicionales extendidas, y universidades multinacionales globales.

Puede comprenderse que el éxito de las experiencias a desarrollar en las universidades convencionales dependerá de la transformación de algunas de las actuales estructuras que provocan el aislamiento institucional para potenciar equipos que conjuguen la calidad docente en sistemas presenciales con la interacción a través de las redes y que lleven a la cooperación en el diseño y la distribución de los cursos y materiales de educación a distancia en el marco de consorcios de instituciones dando lugar a verdaderas redes de aprendizaje, descritas en otros trabajos ( Harasim y otros, 1995; Salinas, 1995, 1996, pag. 45).

Nos encontramos ante un cambio cercano en las instituciones de tercer nivel (lo investigamos, lo desarrollamos, lo promovemos,…), pero al mismo tiempo existe la creencia de que no la contaminará. Por ello, la educación se encuentra en una situación paradójica: Por una parte está cercana y es una parte de esta revolución de la información, mientras que por otra, representando de alguna manera el segmento más conservador de la sociedad, es lenta en adoptar nuevas vías de tratar con la información y con la tecnología. Parece necesario, en este sentido, un compromiso institucional de aplicación de las TIC a la capacitación del docente. Con todo lo que ello implica.

**2.4.3.2. Explotación de las TIC.**

La explotación de las TIC en la docencia tiene como objetivo principal que los alumnos tengan acceso a los servicios educativos del campus desde cualquier lugar, de manera que puedan desarrollar personal y autónomamente acciones de aprendizaje.

Se pretende contribuir a la igualdad de oportunidades de los alumnos, a la oportunidad de acceso de la población estudiantil a la formación tecnológica-superior a mejorar la competencia profesional de manera constante. Para ello se ha implantado un modelo de formación apoyado en un sistema mixto en el que se utiliza tanto sesiones de video, como actividades presenciales, enseñanza a través de Internet mediante materiales de aprendizaje en la Web y explotación de comunicación telemática interactiva, etc.

**2.4.4. La pizarra digital interactivas (PDI).**

La Pizarra Digital Interactiva (PDI) es un recurso didáctico que se ha ido integrando progresivamente en nuestras aulas en los últimos años. Esta incorporación está motivada por su gran versatilidad a la hora de tratar contenidos que precises de un apoyo visual.

Por una parte puede ser utilizada como una pizarra tradicional, en la que escribimos los contenidos, ejemplos, problemas, ejercicios… y, por otra parte, nos permite explotar su propiedad interactiva incorporando vídeos e imágenes que pueden sufrir modificaciones en tiempo real.

Como era de esperar, al mismo tiempo que crece el número de aulas que disponen de una PDI aumenta el número de recursos didácticos que tienen a las mismas como soporte, basta con lanzar la búsqueda "Pizarra Digital Interactiva" en cualquier buscador de páginas web para comprobar la cantidad de recursos y esfuerzos que se están destinando a su uso en materia educativa.

La presente investigación en el área de Matemática, la misma que pretende ser una innovación educativa "Aprendizaje de las Matemática con el apoyo de la pizarra digital".

**2.4.4.1. PDI, sistema Hardware-Software.**

Formado por una cuaterna de elementos, conectados entre sí, que denotaremos como:

- Pizarra,
- Computadora
- Proyector
- Programa

Donde los tres primeros son componentes hardware y el último un componente software. Además, el componente software (Programa) ofrece la facilidad de recoger y enviar datos desde la Pizarra.

La definición anterior nos pone sobre aviso de que no debemos pensar en una PDI como una "pantalla" donde lo que escribimos se muestra sin más.

Además es fundamental en la definición la frase final ya que pone de manifiesto que es el binomio Pizarra-Programa el que la dota de una identidad propia, sin esta cuaterna anterior podría representar, por ejemplo, un sistema de proyección sin interacción.

Esquemáticamente podemos representar la situación de la siguiente manera:

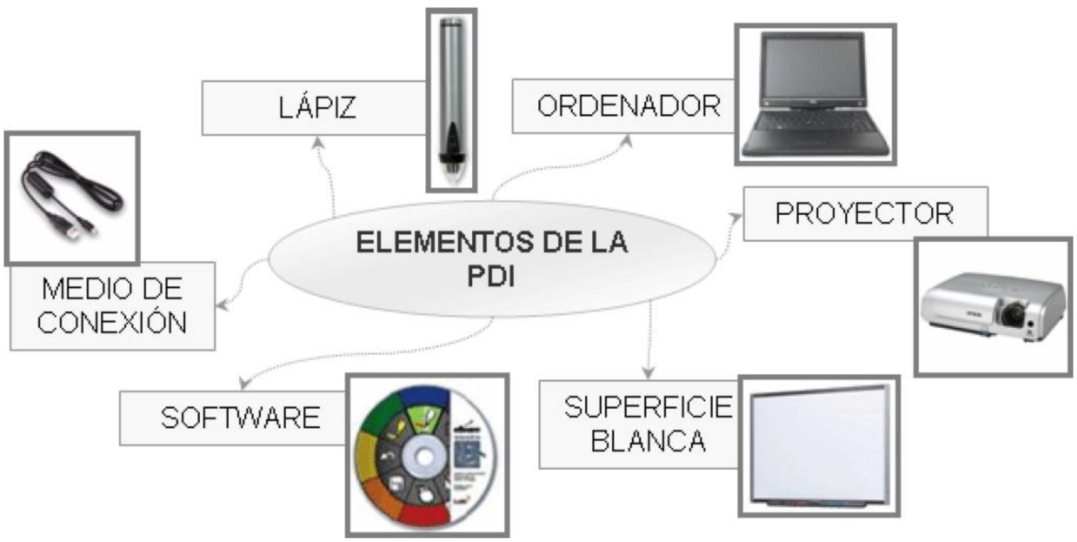



**Gráfico Nº 4** Esquema de los componentes de una PDI.
**Elaborado por:** El Investigador.

Un componente hardware es un componente electrónico físico destinado a realizar alguna función, por ejemplo un disco duro, el monitor, un proyector, etc. Los componentes Software son el conjunto de programa que se ejecuta en los componentes hardware. Así la asociación hardware-software pone de en el esquema de la Figura 1 se puede ver cómo están relacionados la cuaterna de elementos que forman una PDI.

En esta figura se ha seguido el convenio de representar con líneas de trazos continuos las conexiones físicas entre los elementos. Así se puede ver como los pares de elementos hardware Pizarra-Computadora y Computadora-Proyector deben mantener una conexión física permanente a lo largo de la sesión de trabajo. Por otra parte se ha representado con líneas de trazo discontinuo las relaciones entre los elementos hardware (Pizarra y Computadora) y el elemento software (Programa), de esta forma queremos poner de manifiesto que esta relación es de carácter simbólico.

Hasta este punto hemos descrito lo que entenderemos por PDI, sin embargo para poder manejar de forma eficiente este recurso debemos introducir la relación más importante, ésta es la relación de interacción entre el usuario y la PDI, que establece la forma en la que los Humanos nos comunicamos con el sistema anteriormente descrito.

Denotemos por PDI el conjunto de todas las cuaternas que determinan una PDI, es decir el conjunto de PDIs, y llamemos  al conjunto de todos los posibles modos de interacción del usuario.

Hasta este punto hemos descrito lo que entenderemos por PDI, sin embargo para poder manejar de forma eficiente este recurso debemos introducir la relación más importante, ésta es la relación de interacción entre el usuario y la PDI, que establece la forma en la que los Humanos nos comunicamos con el sistema anteriormente descrito.

**2.4.4.2. Modelo de comunicación.**

Denotemos por PDI el conjunto de todas las cuaternas que determinan una PDI, es decir el conjunto de PDIs, y llamemos al conjunto de todos los posibles modos de interacción del usuario

INTERACCIÓN: PDI → Usuario

**Gráfico Nº 5** Interacción usuario docente.

**Elaborado por:** El Investigador.

Que asocia a cada PDI la forma en la que el usuario interactúa con ella.

Por ejemplo de elementos del conjunto I listaremos los siguientes casos:

- A través de un puntero
- A través de ratón
- A través de lápiz digital
- A través de presión manual

El valor de la función INTERACCIÓN determina la tecnología de cada PDI ya que las relaciones software-hardware dependen de la forma en la que el usuario pretende comunicarse con el sistema PDI.

La función INTERACCIÓN nos permite definir una relación de equivalencia en el conjunto de PDI que nos proporcionará una primera clasificación de las mismas según el tipo de interacción que presentan.

Definición: Dado el conjunto PDI y la función INTERACCIÓN definidos anteriormente podemos definir la siguiente relación de equivalencia:

$A \; R \; B \longrightarrow$ INTERACCIÓN (A) = INTERACCIÓN (B)

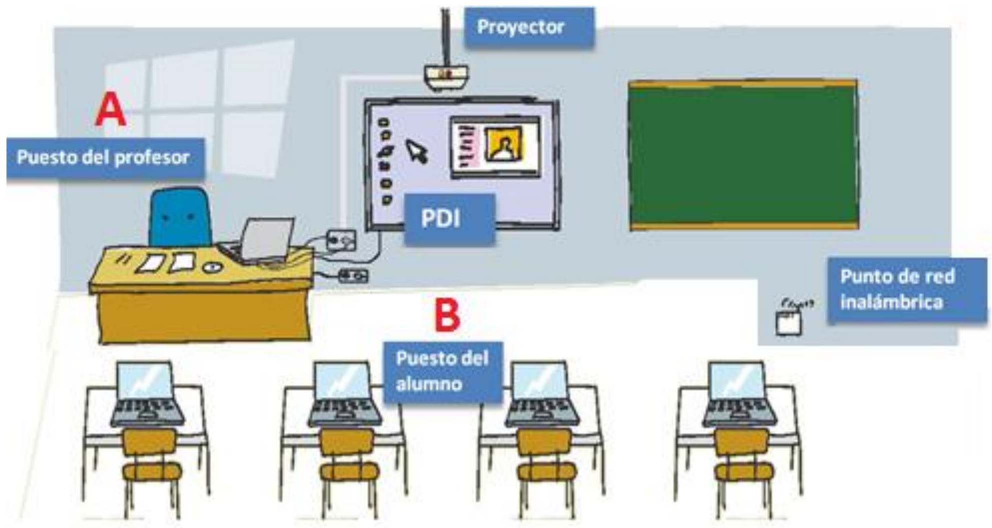



**Gráfico Nº 6** Interacción docente estudiante en el aula de clase.
**Elaborado por:** El Investigador.

De este modo las clases de equivalencia asociadas a la relación anterior determinan los grupos de PDIs que interactúan de la misma forma con el usuario. Para nuestro estudio seleccionaremos los representantes de las clases con el uso de PDI, cuyos métodos de interacción se presentaron anteriormente.

### 2.4.5. Programa de cálculo simbólico MAPLE.

MAPLE es un sistema de cálculo matemático: simbólico, numérico y gráfico, que se viene desarrollado desde 1980 en la Universidad de Waterloo, Canadá. Su nombre proviene de las palabras **MA**thematical **PLE**asure. La principal característica de MAPLE es que permite realizar cálculos simbólicos, además de contar con un gran conjunto de herramientas gráficas que permiten visualizar los resultados obtenidos.

Este programa de cálculo simbólico permite, además, realizar documentos técnicos, dado que el usuario puede crear hojas de trabajo interactivas basadas en cálculos

matemáticos en las que puede cambiar un dato o una ecuación y actualizar todas las soluciones inmediatamente.
Además, este programa cuenta con la posibilidad de traducir y exportar documentos realizados a otros formatos como HTML, RTF, LaTEX y XML.

MAPLE posee una estructura modular, compuesta por los siguientes elementos:

• El interface del usuario (Iris): Escrito en el lenguaje de programación C, se encarga de la entrada y análisis de las expresiones matemáticas, presentación en pantalla de las mismas, representación de gráficas y soporte para la comunicación entre el usuario y el sistema.
• El núcleo algebraico del sistema (kernel): Escrito también en C, interpreta la entrada y se ocupa de las operaciones algebraicas básicas. Se carga en memoria, junto con el interface, al arrancar el sistema.

• La biblioteca: Este elemento contiene más de 3000 comandos, la mayor parte de los cuáles están agrupados en diferentes librerías temáticas, compuestas por funciones, que se cargan automáticamente al ser llamadas. Las restantes funciones deben ser cargadas explícitamente por el usuario antes de ser utilizadas. El comando with(library) carga en memoria toda la librería especificada.

• El lenguaje de programación: Para resolver diferentes problemas específicos, cuya solución no se halla en la biblioteca, el usuario dispone del lenguaje de programación de alto nivel MAPLE, similar al lenguaje de programación Fortran 90 o al C, pero dotado de las estructuras de datos y de control necesarias para manipular objetos de tipo matemático. Los algoritmos implementados en este lenguaje poseen la misma funcionalidad, eficiencia e integración en el sistema que las funciones de la biblioteca, dado que ésta también está escrita en ese lenguaje.

Para empezar una sesión de MAPLE se hace clic en el icono MAPLE, en la carpeta del mismo nombre (o su “alias”, en el escritorio). Después aparece la ventana de trabajo, similar a la de muchas otras aplicaciones de Windows.

En la primera línea aparece el prompt, el carácter “mayor que” (>), de MAPLE. Todas las sentencias terminan3 con un carácter punto y coma (;). Cabe señalar que si no se termina la sentencia con el carácter punto y coma, y se pulsa Intro, el programa seguirá esperando a que se complete la instrucción. A medida que se van ejecutando comandos en la hoja de trabajo, MAPLE va creando variables, almacenando resultados intermedios, etc. Al estado del programa en un determinado momento de trabajo se le llama estado interno del programa, que contiene las variables definidas por el usuario, modificaciones de los valores por defecto, resultados anteriores e intermedios, etc.

El programa de cálculo simbólico MAPLE reconoce las constantes, operadores aritméticos y funciones matemáticas, y trabaja con números enteros con un número de cifras arbitrario. También puede trabajar con números racionales e irracionales, intentando siempre evitar operaciones aritméticas que introduzcan errores. Si en una sentencia uno de los números tiene un punto decimal, MAPLE calcula todo en aritmética de punto flotante. Por defecto se utiliza una precisión de 10 cifras decimales. La precisión en los cálculos de punto flotante se controla con la variable Digits. Por otra parte, la función evalf permite forzar la evaluación en punto flotante de cualquier expresión, como podemos apreciar a continuación:

```
> sqrt(9)+5^(1/3);
```

$(3+5)^{1/3}$

```
> evalf(%);
```

4.709975947

La función evalf(expr,n); evalúa una expresión a su valor en representación de punto flotante, el parámetro n indica el número de dígitos con que queremos representar dicho número, el cual puede ser omitido. Por ejemplo, para evaluar la expresión anterior con 40 dígitos sin cambiar el número de dígitos por defecto, se puede hacer:

> evalf(sqrt(9)+5^(1/3),40);

4.709975946676696989353108872543860109868

Además de los operadores tradicionales ( + , - , * , / , ^ ** , < , > , = , <= , >= , <> ) existen los operadores '!' para factorial, '@' para composición de funciones. El operador (%) representa el resultado de la última expresión evaluada por MAPLE.

Por ejemplo, la expresión ifactor(%); es la descomposición en factores primos del entero 4!

> 4!:

> ifactor(%);

$(2)^3*(3)$

Finalmente, merece la pena reseñar que MAPLE cuenta con una serie de constantes redefinidas entre las que están el número Pi, la unidad imaginaria i, los valores infinity y – infinity, y las constantes booleanas true y false y permite trabajar, a diferencia de los lenguajes de programación de alto nivel como Fortran, C o C++, con variables sin valor numérico, o lo que es lo mismo, variables no-evaluadas. Cabe resaltar que en MAPLE, una variable puede ser simplemente una variable, sin ningún valor asignado, al igual que cuando una persona trabaja con ecuaciones sobre una hoja de papel.

#### 2.4.5.1. Conocimientos previos.

Es recomendable estar familiarizado con entornos gráficos de ordenadores. También es necesario el conocimiento de la Matemática a nivel elemental y en particular es aconsejable conocer cómo se representan los números reales en coma flotante.

#### 2.4.5.2. Conceptos fundamentales.

Maple es un sistema de cálculo simbólico o algebraico. Ambas expresiones hacen referencia a la habilidad que posee Maple para trabajar con la información de la misma manera que lo haríamos nosotros cuando llevamos a cabo cálculos matemáticos analíticos. Mientras que los programas matemáticos tradicionales requieren valores numéricos para todas las variables, Maple mantiene y manipula los símbolos y las expresiones. Estas capacidades simbólicas permiten obtener soluciones analíticas exactas de los problemas matemáticos: por ejemplo se pueden calcular límites, derivadas e integrales de funciones, resolver sistemas de ecuaciones de forma exacta, encontrar soluciones de ecuaciones diferenciales, etc.

Como complemento a las operaciones simbólicas existe un amplio conjunto de rutinas gráficas que permiten visualizar información matemática compleja, algoritmos numéricos que dan soluciones en precisión arbitraria de problemas cuya solución exacta no es calculable y un lenguaje de programación completa y comprensible que permite al usuario crear sus propias funciones y aplicaciones.

Internamente Maple se estructura en tres partes. En primer lugar está el núcleo, formado por rutinas escritas y compiladas en lenguaje C, donde se realizan la mayor parte de los cálculos básicos hechos por el sistema. La segunda parte es un conjunto de librerías, donde se encuentra la mayoría de los comandos de Maple, y que están escritas en su propio lenguaje de programación (interpretado no compilado), lenguaje que permite al usuario crear sus propios comandos y añadirlos a la librería estándar (es por tanto un sistema extensible). Y finalmente la interfaz del programa a través de la cual es posible comunicarse con el sistema.

Esta interfaz de Maple tiene un aspecto muy similar a la de otros programas usados en sistemas operativos con entorno gráfico y permite el acceso a todas las funciones y capacidades del manipulador. Básicamente lo que aparece al invocar el programa Maple (haciendo doble clic en su icono, por ejemplo) es una ventana más o menos convencional en la que se encuentra integrado lo que en inglés se denomina "worksheet" y que nosotros traduciremos como "hoja de trabajo". La flexibilidad de la hoja de trabajo permite tanto la investigación en ideas Matemática como la creación de artículos técnicos sofisticados. De esta manera Maple presenta grandes posibilidades de aplicación y uso tanto en la investigación como en el trabajo profesional y por supuesto en la enseñanza de la Matemática.

En la sección siguiente describimos con más detalle la interfaz y la hoja de trabajo de Maple.

#### 2.4.5.3. La hoja de trabajo de Maple.

La interfaz gráfica de Maple permite realizar todas las operaciones de edición que cabría esperar de cualquier software moderno. Así, una vez que se invoca el programa, aparece la ventana siguiente.

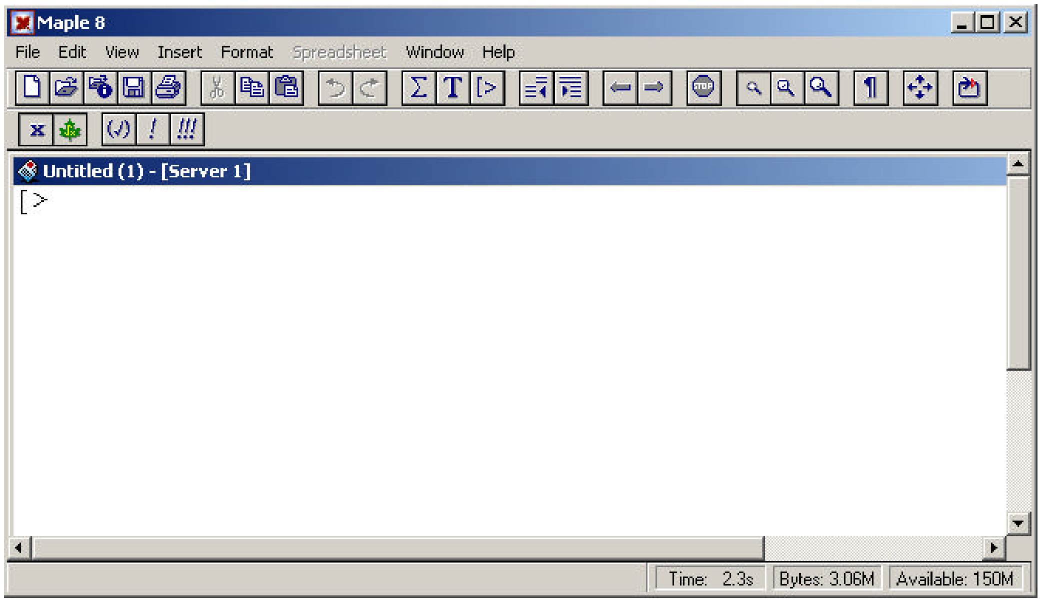



**Imagen Nº 1** Hoja de trabajo MAPLE.

**Elaborado por:** El Investigador.

En su parte superior está la barra de Menú, con menús tales como **File** (Archivo) o **Edit** (Edición), muy parecidos a los de cualquier otra aplicación con entorno gráfico (en la figura siguiente vemos desplegado el menú **Insert** (Insertar)). Inmediatamente debajo tenemos la barra de herramientas, que contiene botones para tareas comunes de edición y otras específicas de Maple algunas de las cuales comentaremos más adelante. Finalmente, debajo de la barra de herramientas, aparece la llamada barra de contexto que contiene controles específicos de la tarea que se está realizando en cada momento.

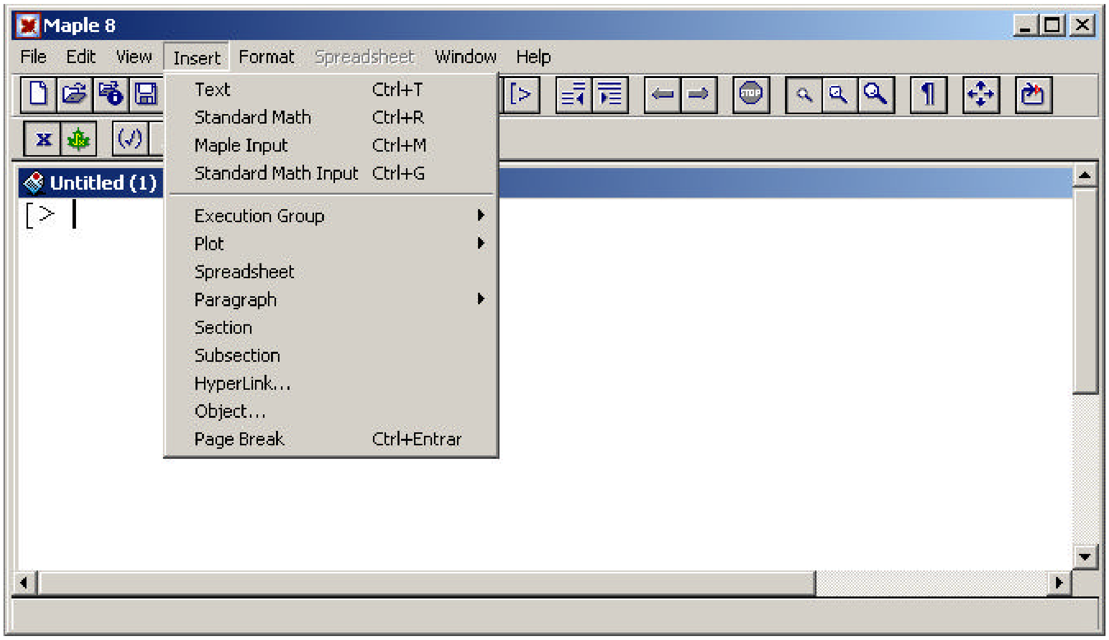



**Imagen Nº 2** Barra de contexto MAPLE.

**Elaborado por:** El Investigador.

Debajo de estas tres barras hay un área en blanco en la que se desplegará la hoja de trabajo: es la región donde el usuario va a introducir comandos de Maple, texto, etc. Por último, en la parte inferior de la pantalla se encuentra la barra de estado.

La hoja de trabajo, componente especial de la interfaz de Maple, es un entorno integrado en el que, interactivamente, se resuelven problemas y se documenta el trabajo. Contiene no solamente texto sino también comandos matemáticos vivos que generan resultados automáticamente. La resolución de problemas interactivamente se reduce a ejecutar los comandos adecuados de Maple y recibir sus respuestas. En la hoja de trabajo, el cambio de la secuencia de comandos y su re-ejecución es muy sencillo. También permite controlar la forma en que se dan los comandos y sus salidas. Finalmente el contenido de la hoja de trabajo se puede guardar en un archivo con extensión mws o exportar en distintos formatos. Las opciones para llevar a cabo estas acciones se encuentran en el menú **File**.


**Imagen Nº 3** Extensión del archivo generado por MAPLE.

**Elaborado por:** El Investigador.

Este es el icono que se asigna a un fichero generado con Maple a partir de una hoja de trabajo.

Como se observa en la imagen, en la parte superior de la hoja de trabajo en blanco aparece un símbolo con el siguiente aspecto [> . Este símbolo es el *prompt* de comandos e indica que lo que espera el editor es una instrucción del sistema Maple: cualquier cosa que se escriba a continuación aparecerá en rojo, color reservado a los comandos, mientras que el texto utiliza el color negro. Las instrucciones de Maple han de finalizar con; (característica esta común con el lenguaje de programación C) o con:

- La diferencia entre ambas opciones es que la primera genera una salida en la pantalla (en azul) mientras que la segunda evita que ésta aparezca aunque, por supuesto, en ambos casos el comando se ejecuta cuando se pulsa la tecla de retorno de carro.

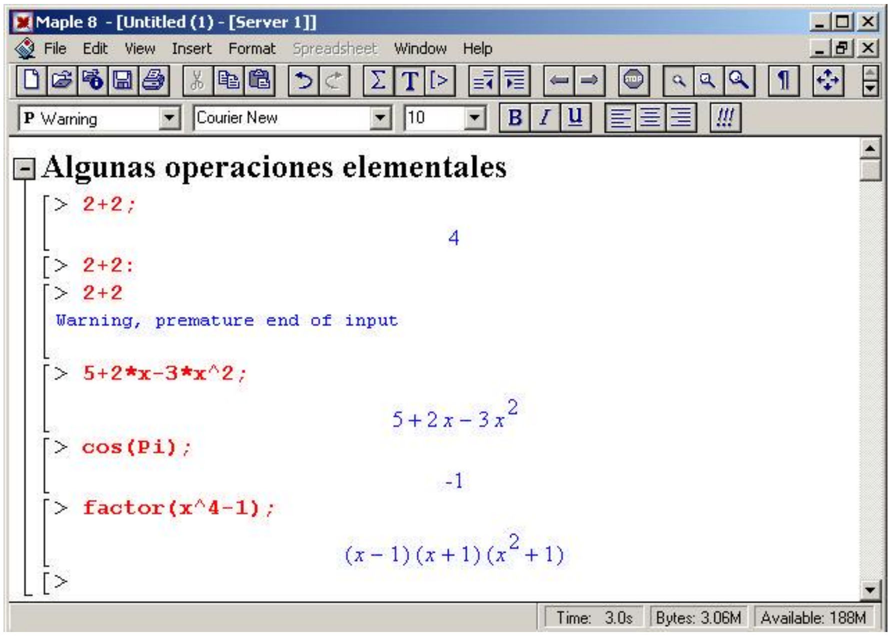



**Imagen Nº 4** Operaciones elementales MAPLE.

**Elaborado por:** El Investigador.

La hoja de trabajo de la imagen superior muestra una sección titulada Algunas operaciones elementales (creada con la opción Section del menú Insert). La sección se puede plegar pinchando en el cuadrado a la izquierda del título, desplegándose después de la misma forma. Los tres primeros comandos pretenden conseguir la suma de dos números enteros: 2+2. Observemos las salidas que generan: en el primer caso como el comando termina en ; aparece la suma 4 en azul, el segundo no tiene salida pues finaliza con : , en el tercer comando la salida es un aviso indicando que falta el símbolo de final de instrucción. En la cuarta línea simplemente se escribe un polinomio. Nótese hasta aquí que suma, resta, producto y exponenciación se designan por +, -,* y ^ ; para completar los operadores aritméticos diremos que la división se designa por / y que, alternativamente, la exponenciación también admite la representación ** . En la quinta línea tenemos la función coseno evaluada en _ cuyo resultado, –1, aparece al ejecutar el comando. Finalmente el comando factor factoriza la expresión que aparece entre paréntesis. Existe la posibilidad, como ya hemos indicado antes, de escribir texto en la hoja de trabajo. El texto aparece en negro y para cambiar de modo comando a modo texto y viceversa se pueden utilizar los botones de la barra de herramientas.

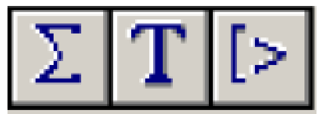


**Imagen Nº 5** Botones de la barra de herramientas.

**Elaborado por:** El Investigador.

El segundo botón, con una T, cambia de modo comando a modo texto mientras que el tercero botón, con [>, hace aparecer un *prompt* en el momento que se pincha. Por último, el primer botón, con una _, permite introducir fórmulas matemáticas dentro de texto con un formato similar al que tienen en las salidas de los comandos. En el menú **Insert** se encuentran estas mismas acciones junto con otras posibilidades de edición que permiten estructurar la hoja de trabajo mediante secciones y subsecciones o crear hipervínculos a otra hoja de trabajo o a una página de ayuda.

Si el usuario está familiarizado con programas cuya interfaz esté desarrollada en un entorno gráfico no tendrá ningún problema en lograr un ágil manejo de la hoja de trabajo de Maple, puesto que la mayoría de las acciones de edición son estándar y aquellas específicas del manipulador son bastante intuitivas.

### 2.4.5.4. La ayuda de Maple.

Maple posee un completo manual de referencia que se puede consultar “on-line”. El sistema de ayuda permite explorar los comandos de Maple, así como las características del sistema, por nombre o materia. Además puede localizar páginas de ayuda que contengan una palabra o frase determinada.

Las páginas de ayuda relacionadas están unidas mediante hipervínculos, lo que permite investigar cualquier tópico de forma sencilla. A continuación damos una breve introducción al uso de la ayuda de Maple.

Si se conoce el nombre de un comando determinado, es posible pedir ayuda sobre el mismo desde la línea de comandos utilizando el símbolo? seguido del nombre. Así la ejecución de la instrucción [> **?factor** despliega la hoja de ayuda que mostramos en la figura

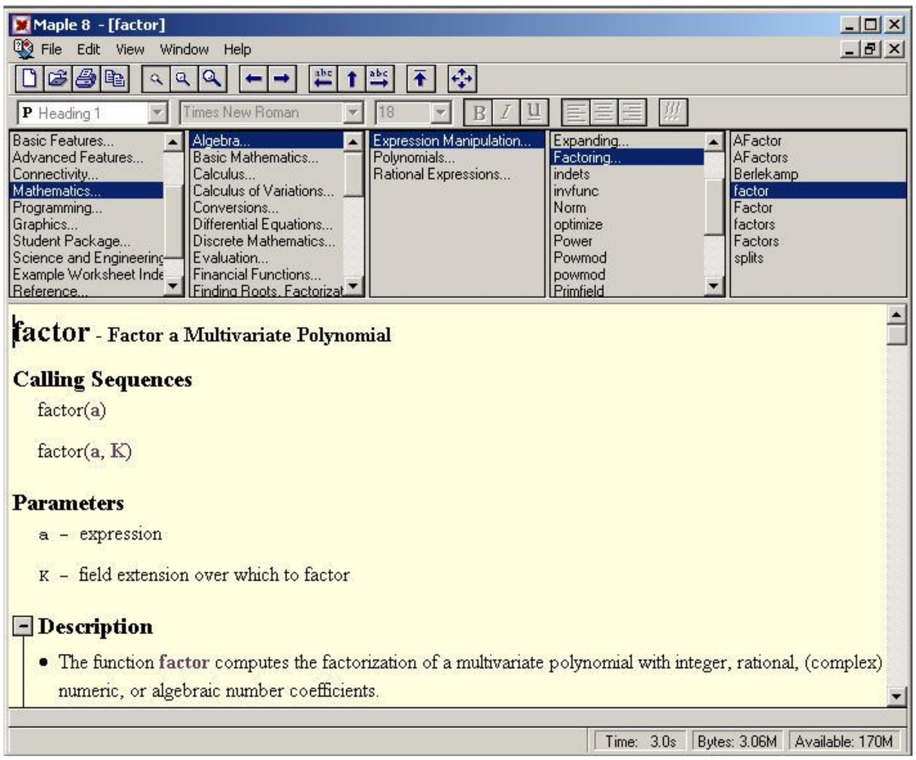



**Imagen Nº 6** Hoja de ayuda MAPLE.

**Elaborado por:** El Investigador.

Como se observa en la imagen es posible navegar por el manual de ayuda de forma sencilla seleccionando el tópico que se desee en la zona que aparece debajo de la barra de estado en la que se selecciona pinchando, primero el capítulo (zona de más a la izquierda), después la sección del capítulo, luego las subsecciones y finalmente el comando deseado.

La consulta del manual de referencia se puede realizar también desde el menú desplegable de **Help** en el que aparecen varias opciones, algunas de las cuales comentamos a continuación.

Si se desea ayuda sobre una palabra escrita en la hoja de trabajo, basta situar el cursor sobre dicha palabra y seleccionar en el menú **Help** la opción **Help on *word*** (donde ***word*** es la palabra sobre la que se encuentra el cursor).

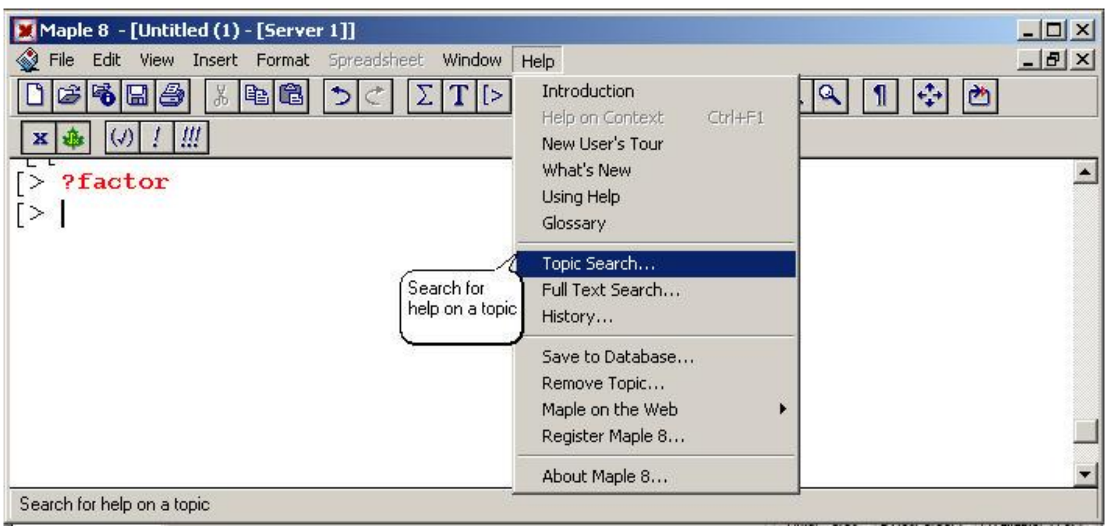



**Imagen Nº 7** Ventana de ayuda MAPLE.

**Elaborado por:** El Investigador.

La opción **New User's Tour** accede a un conjunto de páginas de ayuda a través de las cuales se presentan los comandos fundamentales que todo usuario debe conocer así como una breve introducción a la hoja de trabajo y a la ayuda en línea.

**Using Help** remite a una página en la que aparece información sobre el uso de la ayuda.

**Topic Search** permite encontrar los tópicos que comiencen de la manera especificada (véase la figura siguiente). De esta forma se puede investigar si existe un comando que lleve a cabo ciertas acciones y cuyo nombre esperamos que esté relacionado con su acción.

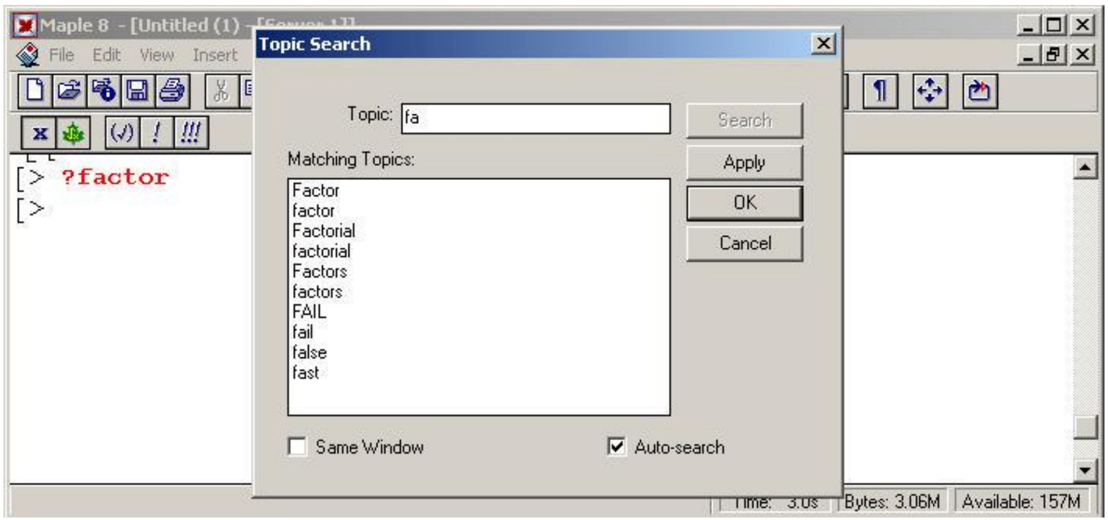



**Imagen Nº 8** Busque da de comandos MAPLE.

**Elaborado por:** El Investigador.

**Full Topic Search** permite encontrar las páginas de ayuda en las que aparecen la palabra o palabras especificadas.

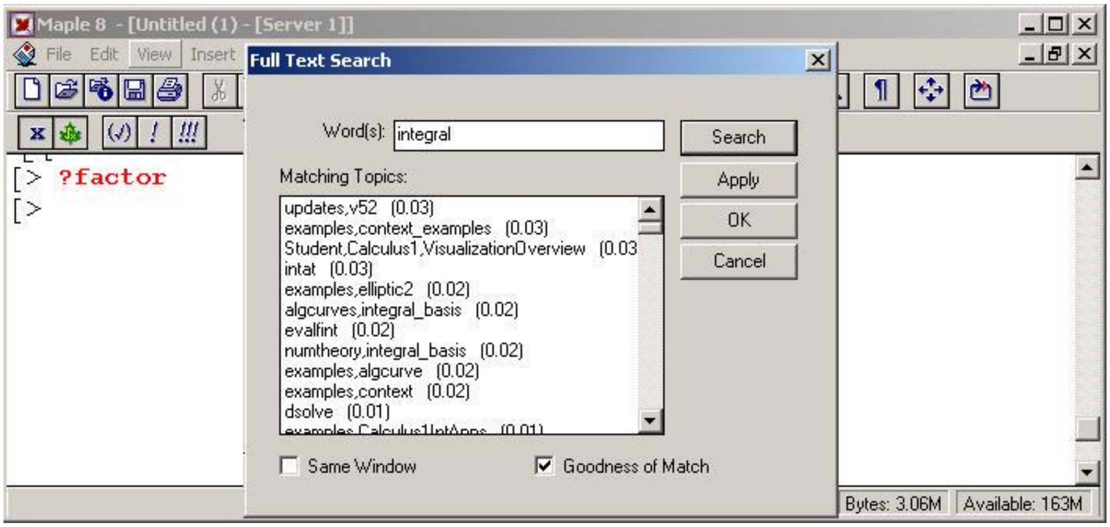



**Imagen Nº 9** Caja de entrada a búsqueda de comandos MAPLE.

**Elaborado por:** El Investigador.

Finalmente comentaremos que la opción **History** permite revisitar cualquiera de las páginas de ayuda que se hayan invocado durante la sesión de Maple.

### 2.4.5.5. Matemática con Maple.

Los cálculos más básicos que se pueden realizar con Maple son numéricos. Maple opera como una calculadora convencional con enteros y números en coma flotante. Además es capaz de realizar cálculos exactos con números racionales: el resultado de la operación 2+1/2 es 5/2 que para Maple es un objeto totalmente diferente del número en coma flotante 2.5.

Sin embargo, Maple no sólo trabaja con números racionales sino también con expresiones, variables, conjuntos, listas, sucesiones, polinomios, matrices y muchos otros objetos matemáticos. Además es un lenguaje de programación completo que contiene procedimientos, tablas y otras estructuras.

Los cálculos se llevan a cabo utilizando los llamados operadores aritméticos ya mencionados con anterioridad, que son **+**, **-**, *****, **/** ,**^** (**)**)**. Su orden de prioridad es justamente inverso al que hemos usado para enumerarlos. De esta forma una exponenciación será siempre la primera operación que se realice seguida de los productos y las divisiones (ambas con la misma prioridad) y finalmente las sumas y restas indistintamente. La prioridad se cambia por medio de paréntesis de igual forma que en los cálculos a mano.

En la siguiente imagen vemos algunos ejemplos. En la cuarta línea de comandos ilustramos las dos posibles representaciones del operador exponencial. En las líneas quinta y sexta se constata cómo los paréntesis alteran la prioridad de los operadores aritméticos, lo que conduce a resultados diferentes. Nótese que el resultado que obtiene Maple es, en ambos casos, el que obtendríamos nosotros si realizásemos estos mismos cálculos con lápiz y papel.

Los números 1, 2, 1/ 2 son, para Maple, números en aritmética exacta mientras que si los escribimos como 1., 2., 1./ 2. Pasan a ser números en coma flotante. Obsérvese la diferencia que existe entre la salida que proporciona el comando 28/3 y la que proporciona el comando 28./3. en la penúltima instrucción: en el primer caso Maple trabaja en aritmética exacta y como 28 no es divisible entre 3 se queda con el número racional 28/3, mientras que en el segundo trabaja con aritmética de punto flotante (con 10 dígitos significativos y redondeo) dando una aproximación al resultado de la división, como haría una calculadora.

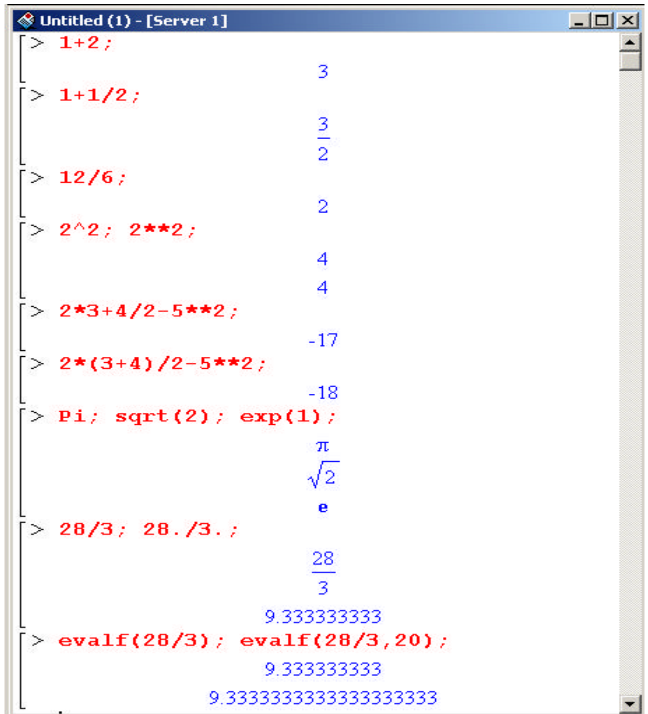



**Imagen Nº 10** Líneas de comandos ejemplo números exponencial MAPLE.

**Elaborado por:** El Investigador.

En la séptima línea de comandos vemos cómo se representan de forma simbólica algunos números irracionales: **Pi** es el número _, **sqrt(2)** es la raíz cuadrada de dos y **exp(1)** es el número **e** base del logaritmo neperiano. Esta representación simbólica permite cálculos exactos con estos números.

La última línea muestra cómo actúa el comando **evalf** : da la expresión en coma flotante de su primer argumento, el segundo argumento indica el número de dígitos significativos que se usa en la representación. Nótese que el segundo argumento es opcional, si no aparece se usan 10 cifras.

#### 2.4.5.5.1. Funciones Matemáticas

Maple conoce todas las funciones matemáticas estándar. Damos una pequeña lista de las más básicas:

· Funciones trigonométricas: **sin**, **cos**, **tan**,...

· Funciones hiperbólicas: **sinh**, **cosh**, **tanh**, ...

· Función exponencial: **exp** y logaritmos: **ln** (neperiano), **log[10]** (base 10).

· Función raíz cuadrada: **sqrt** .

· Redondeo al entero más próximo: **round**, truncación a la parte entera: **trunc**, parte fraccionaria: **frac**.

### 2.4.5.6. Manipulación de expresiones. Variables y su asignación.

En la imagen siguiente se pueden ver algunos cálculos simbólicos con expresiones y varios comandos que permiten su manipulación.

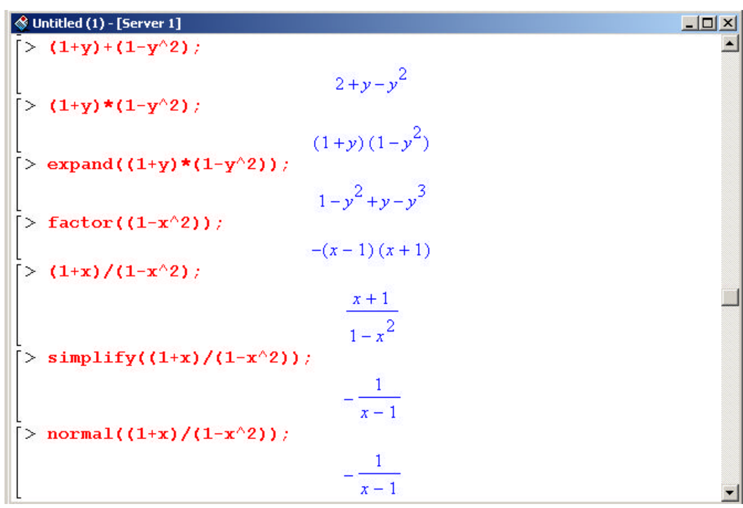



**Imagen Nº 11** Líneas de comandos manipulación de expresiones, variables en MAPLE.

**Elaborado por:** El Investigador.

La instrucción **expand** desarrolla la expresión que va entre paréntesis, **factor** la factoriza, y **simplify** la simplifica. El comando **normal** pone el mismo denominador a las fracciones que aparezcan en la expresión entre paréntesis y elimina factores comunes del numerador y denominador. Como se observa en el ejemplo sirve también para simplificar la expresión racional obteniendo el mismo resultado que **simplify**.

Maple puede trabajar con variables. Los nombres de variables se forman con letras, números y el signo *underscore* y han de ser distintos de las palabras reservadas del sistema. A las variables se les puede asignar valores. Las asignaciones en Maple se hacen con el símbolo **:=** ( mientras que = es el operador relacional de igualdad).
En la imagen siguiente:

1. Asignamos el valor _ a la variable que hemos llamado expr1; comprobamos que esta asignación se ha realizado invocando el nombre de la variable: la salida es la deseada (instrucciones 1 y 2).

2. Sin embargo en la tercera línea hemos usado el operador = para llevar a cabo la asignación de la expresión (1+ *y*)(1- *y* 2 ) a la variable expr2. La asignación, lógicamente, ha fallado lo que constatamos invocando la variable en la siguiente línea. A continuación realizamos, ahora sí, la asignación.

3. Finalmente intentamos utilizar como nombre de variable la palabra log que es una palabra clave del sistema: se usa para nombrar la función logarítmica. Como vemos Maple devuelve una línea de error en la que se nos advierte de tal eventualidad evitando redefinir el significado de la expresión **log**. Este comportamiento es de agradecer puesto que es prácticamente imposible conocer todas las palabras reservadas.

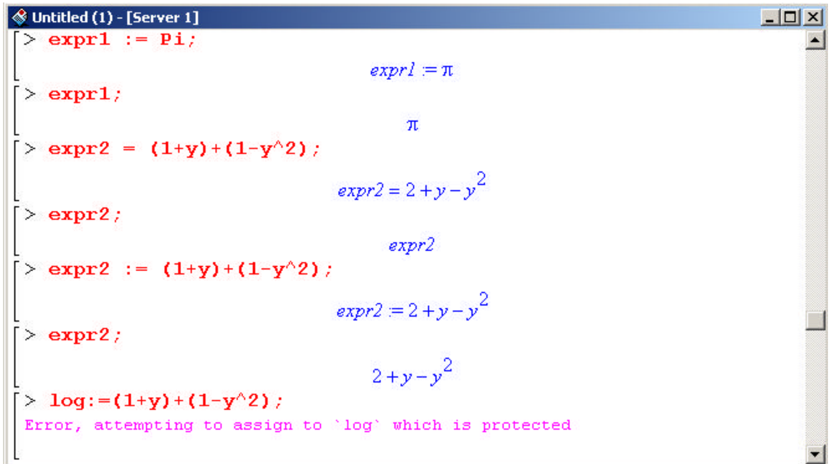



**Imagen Nº 12** Líneas de comandos variables no asignada en MAPLE

**Elaborado por:** El Investigador.

Nótese que para formar expresiones se utilizan variables: en las expresiones de los ejemplos **y** es una variable no asignada, ya que si previamente a su aparición en la expresión se le hubiese asignado un valor Maple sustituiría **y** por ese valor en todos los lugares en los que apareciera. De esta forma si ese valor fuese numérico, al ejecutar la expresión, obtendríamos el resultado de las operaciones que aparecen en ella. Este es el caso en la hoja de trabajo siguiente.

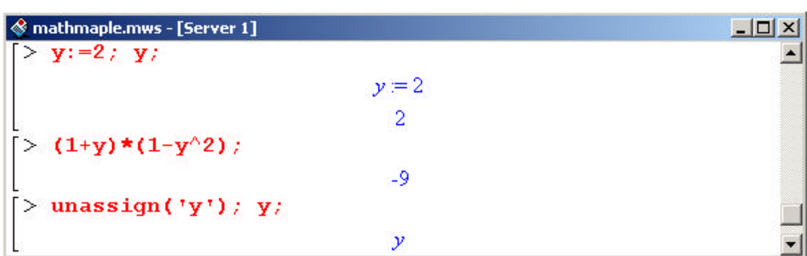



**Imagen Nº 13** Líneas de comandos expresiones se utilizan variables en MAPLE

**Elaborado por:** El Investigador.

Para desasignar variables se utiliza el comando **unassign('var')** donde **var** es la variable que se quiere vaciar. Durante una sesión de trabajo Maple guarda en memoria todas las asignaciones realizadas hasta que ésta se cierra. Por ello en algunos momentos puede resultar conveniente vaciar la memoria: el comando **restart** realiza esta acción. Es aconsejable iniciar la hoja de trabajo con este comando.

### 2.4.5.6.1. Otros objetos manipulables.

Maple, además de números, variables y expresiones, puede manipular estructuras más complejas.

Entre ellas tenemos las *sucesiones de expresiones* que se crean usando la coma: por ejemplo el comando [> **1, 2+x, 3*x^2, 5;** crea una sucesión con cuatro elementos que son las expresiones 1, 2 + *x*, 3*x*2 ,5 . También se pueden crear sucesiones utilizando el operador de repetición **$** (**x$3** genera la sucesión **x,x,x**) o llamando al comando **seq**: por ejemplo **seq(f(i), i=1..3)** generará la sucesión **f(1)**, **f(2)**, **f(3),** donde f(i) es una expresión donde aparece la variable i (que no ha sido asignada previamente).

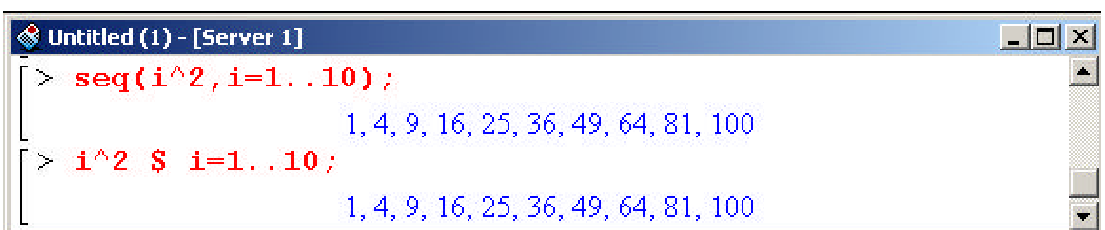



**Imagen Nº 14** Líneas de comandos de sucesiones de expresiones en MAPLE

**Elaborado por:** El Investigador.

En la imagen vemos dos comandos que generan la sucesión de los cuadrados de los 10 primeros números naturales.

Otra estructura compleja es la *lista*. Básicamente una lista es una sucesión de expresiones encerrada entre corchetes. Similar a la lista es la estructura de *conjunto*: sucesión encerrada entre llaves. La diferencia fundamental entre ellas es que en la lista importa el orden: así las listas [1,1,,2,2] y [1,2,1,2] son distintas mientras que los conjuntos {1,1,2,2} y {1,2,1,2} son iguales al conjunto {1,2}. Es posible acceder a los elementos de las sucesiones, las listas o los conjuntos de forma sencilla como vemos en la pantalla siguiente.

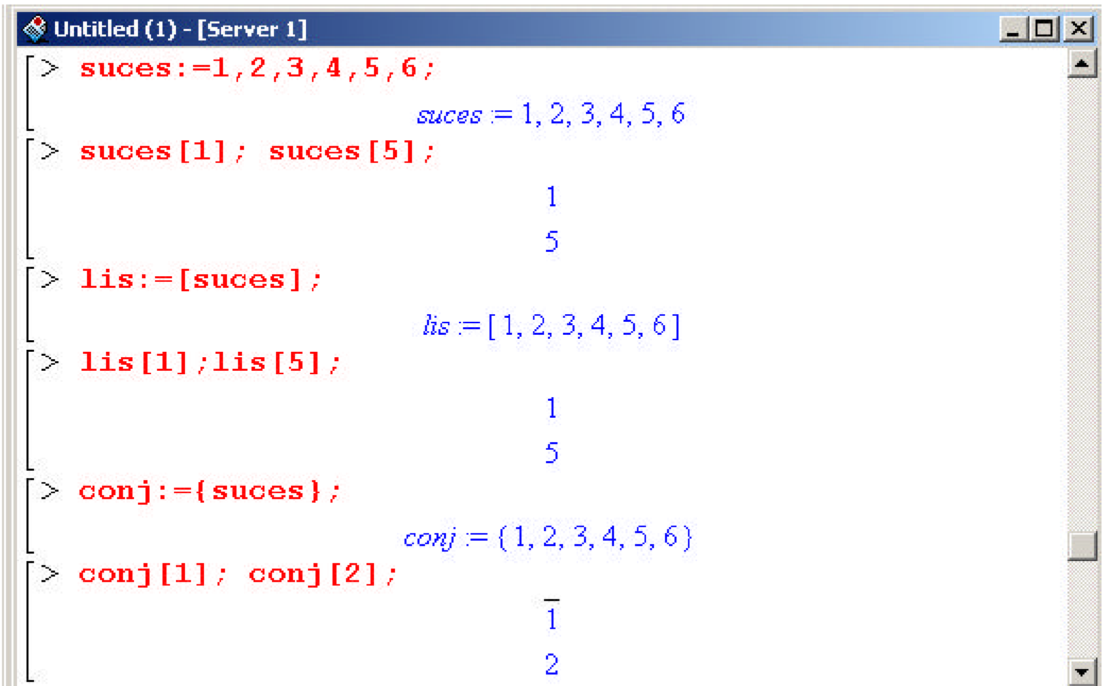



**Imagen Nº 15** Líneas de comandos de sucesiones de expresiones con arreglos en MAPLE

**Elaborado por:** El Investigador.

Como extensión de la estructura de lista encontramos el *array*, que básicamente es una lista a cuyos elementos se les han asignado índices. Precisamente los *arrays* son las estructuras que se usan para definir vectores y matrices.

### 2.4.5.7. Cálculo de soluciones.

El comando **solve** tiene como propósito resolver de forma exacta ecuaciones o sistemas de ecuaciones. Tiene dos argumentos: en el primero se escriben, entre llaves, las ecuaciones a resolver separadas por comas y en el segundo, también entre llaves, las incógnitas.

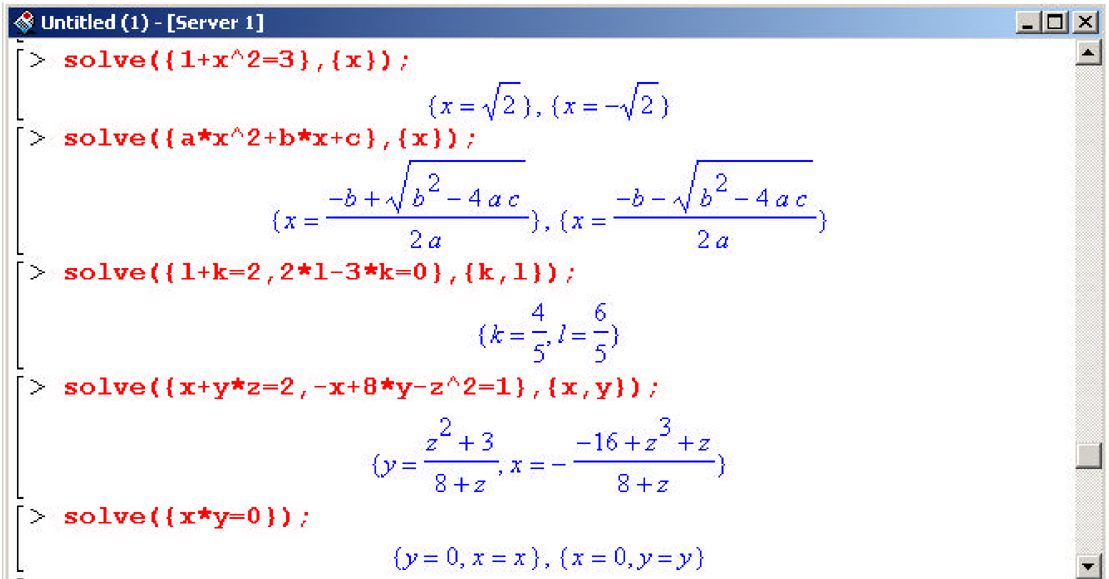



**Imagen Nº 16** Comando SOLVE aplicado a ecuaciones en MAPLE

**Elaborado por:** El Investigador.

Como se observa en las salidas que aparecen en la imagen, Maple da cada solución de la ecuación o del sistema de ecuaciones como un conjunto, es decir, entre llaves. Además, si no se especifican las incógnitas respecto a las que se quiere resolver Maple resuelve para todas; éste es el caso en la última instrucción.

El comando **subs** sustituye una variable ***var*** en una expresión ***expr*** por un valor determinado ***val***. Como primer argumento se pasa la igualdad ***var=val*** ; el segundo argumento será la expresión en la que se desea hacer la sustitución. La instrucción queda **subs(** ***var=val, expr*** **)**. Véase su uso en la pantalla siguiente en la que se resuelve un sistema de ecuaciones y se verifica la solución obtenida.

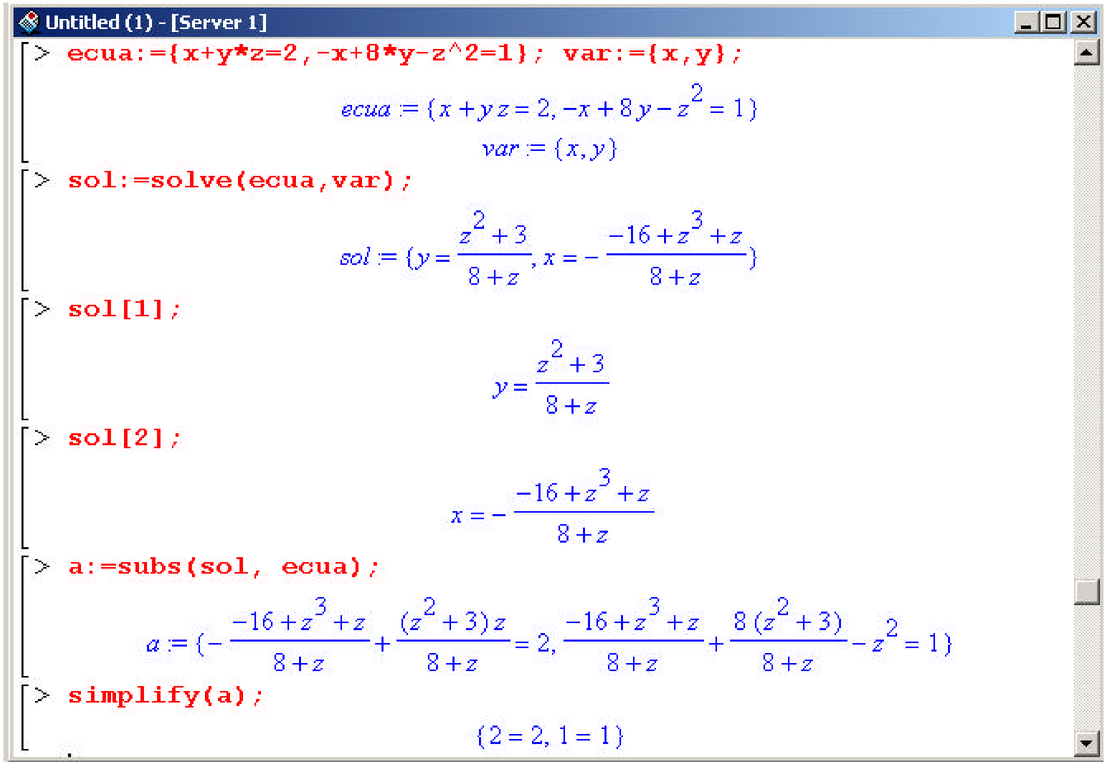



**Imagen Nº 16** Comando SOLVE aplicado a ecuaciones y conjunto de ecuaciones en MAPLE

**Elaborado por:** El Investigador

En la imagen:

· A las variables ecua y var se les asignan sendos conjuntos: el de ecuaciones a resolver y el de incógnitas.

· En la variable sol guardamos las soluciones del sistema.

· Para comprobar de forma efectiva que las soluciones calculadas por Maple realmente lo son, sustituimos los valores obtenidos para x e y en las ecuaciones.

· Como después de realizar la sustitución los cálculos quedan indicados utilizamos el comando **simplify** para que se lleven a cabo las operaciones.

El comando **fsolve** es el equivalente en aritmética de punto flotante a **solve**. Así, este comando obtiene una aproximación numérica a la solución de una ecuación o un sistema de ecuaciones (mediante un método numérico). En general calcula sólo una solución; sin embargo para ecuaciones polinómicas busca todas las raíces reales.

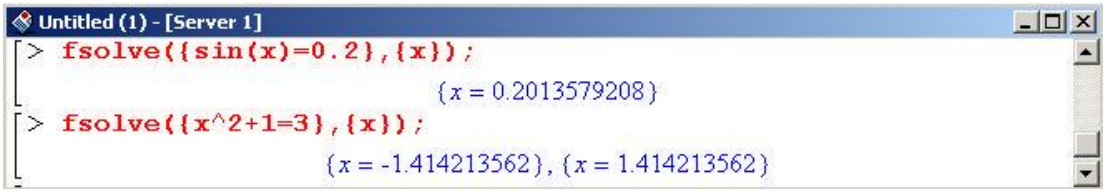



**Imagen Nº 17** Comando **fsolve** es el equivalente en aritmética de punto flotante en MAPLE

**Elaborado por:** El Investigador

### 2.4.5.8. Gráficos con Maple.

Maple incluye potentes capacidades gráficas que permiten realizar representaciones bidimensionales, tridimensionales e incluso animaciones. El programa es muy flexible en lo que a la entrada de datos se refiere de tal forma que es posible representar funciones dadas en forma explícita, curvas y superficies especificadas a través de expresiones paramétricas e incluso se pueden manejar lugares geométricos definidos en forma implícita. Por otra parte, el sistema otorga al usuario control total sobre el resultado de modo que, por ejemplo, es posible cambiar desde los colores de los distintos objetos hasta las fuentes utilizadas en los títulos o las etiquetas de los ejes.

### 2.4.5.9. Gráficos 2d.

El comando básico para la representación de funciones en el plano es **plot**. En la siguiente figura se ilustra el empleo de dicho comando a través de tres ejemplos. El primero de ellos muestra la sintaxis básica de la instrucción: su primer argumento es la función que deseamos representar, en este caso se trata de.

$$f(x) = \frac{sen(x)}{x}$$

El segundo argumento especifica la variable independiente y su rango de variación. La segunda llamada a **plot** ilustra cómo representar curvas dadas en forma paramétrica. El primer argumento es ahora una lista con tres elementos: los dos primeros constituyen la expresión paramétrica de la curva espiral y el tercero especifica el parámetro y su rango de variación.

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{\cos(t)}{t} \\ y(t) = \dfrac{sen(t)}{t} \end{cases}$$

El resto de los argumentos que aparecen en la expresión son optativos y simplemente especifican opciones que modifican el aspecto de la gráfica. Así, la opción **scaling** con el valor **CONSTRAINED** especifica que deben usarse las mismas unidades en los dos ejes. La opción **color** indica el color que debe usarse para la gráfica de la función. Obsérvese que la instrucción completa para la realización de esta gráfica ocupa dos líneas. En general, si se desea escribir varias líneas de entrada antes de que el kernel de Maple las interprete, debemos finalizar cada una de ellas pulsando la combinación de teclas [Shift]+[Return], excepto al final de la última donde pulsaremos simplemente [Return] para indicar al sistema que procese la instrucción o conjunto de instrucciones introducidas.

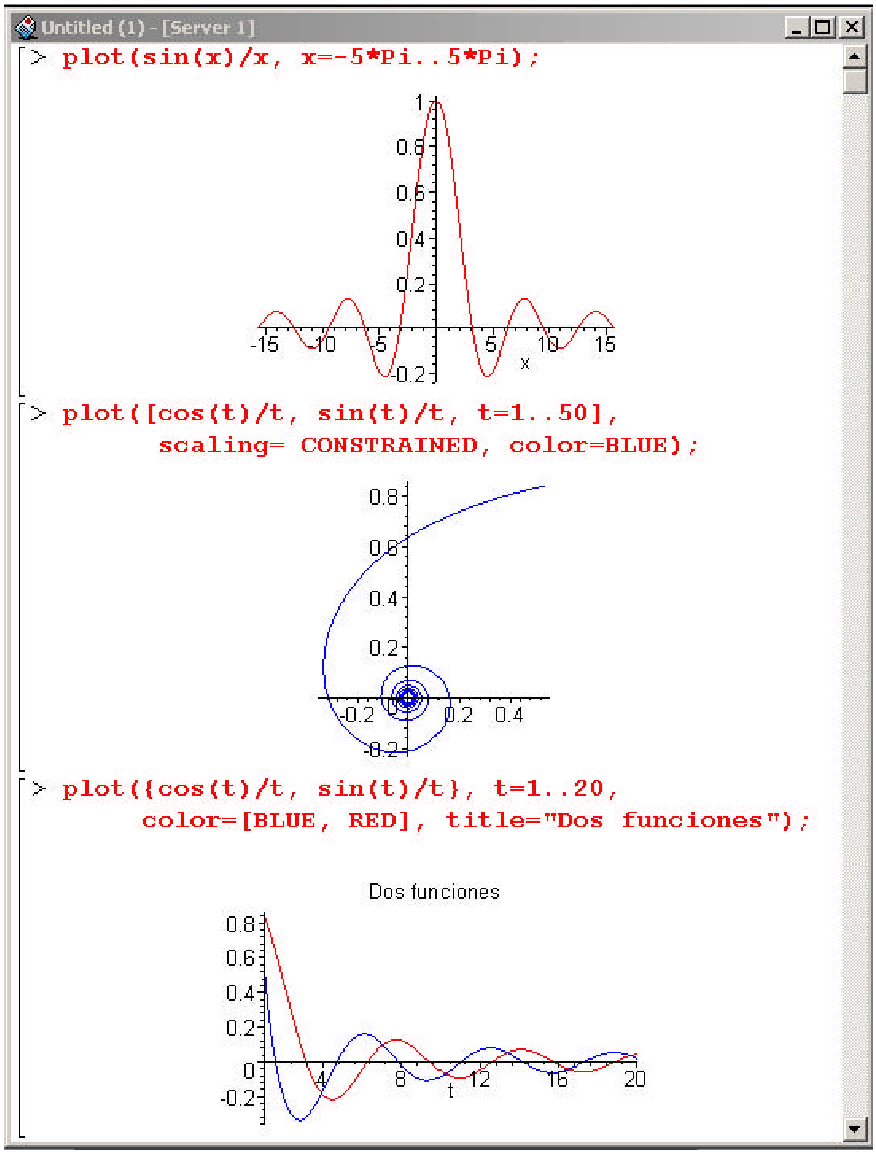



**Imagen Nº 18** Generación de graficas en 2D en MAPLE

**Elaborado por:** El Investigador

En el tercer ejemplo se utiliza **plot** para representar más de una función simultáneamente. En el caso que nos ocupa se representan las funciones en el intervalo [1,20].

$f(t) = \frac{\cos(t)}{t}$ $y$ $g(t) = \frac{sen(t)}{t}$

Intencionadamente hemos seleccionado una notación que recuerda la del caso anterior para remarcar las diferencias. Nótese que ahora el primer argumento es un conjunto (se utilizan llaves en lugar de corchetes) que contiene solamente las funciones que queremos representar. El segundo argumento contiene la variable independiente y su rango de variación. La opción **color** toma como valor una lista que contiene los colores que se utilizarán en la representación de cada una de las funciones especificadas en el primer argumento (f(t)_azul y g(t)_rojo). Por último, la opción **title** añade un título explicativo a la gráfica.

Existen multitud de opciones para el comando **plot** aparte de las que han aparecido en los ejemplos anteriores, con ellas es posible controlar aspectos tan variados del dibujo como el tipo de ejes que deben aparecer, la separación de las marcas sobre los mismos o el tipo de trazo que se usará en la representación de la gráfica.

El paquete **plots** (Ver la sección **Los paquetes de Maple**, situada más adelante, para una descripción más detallada del concepto de *paquete*) incluye varios comandos avanzados para la realización de gráficos más específicos. De entre ellos destacamos dos: **animate** e **implicitplot**.

Del primero nos ocuparemos al final de esta sección, en cuanto al segundo hay que decir que permite representar funciones dadas en forma implícita o, dicho de forma más rigurosa, es posible representar lugares geométricos definidos a través de una ecuación. En la siguiente figura se utiliza este comando para representar la circunferencia dada por *x* 2 + *y* 2 =1. Si bien el rango de variación especificado para *x* e *y* es el intervalo [-p,p], Maple sólo representa la región de plano [-1,1]x[-1,1] en la que está incluida toda la circunferencia. El comando **with(plots)**, situado en la primera línea, sirve para cargar todas las funciones del paquete permitiendo de esta forma la utilización de **implicitplot**.

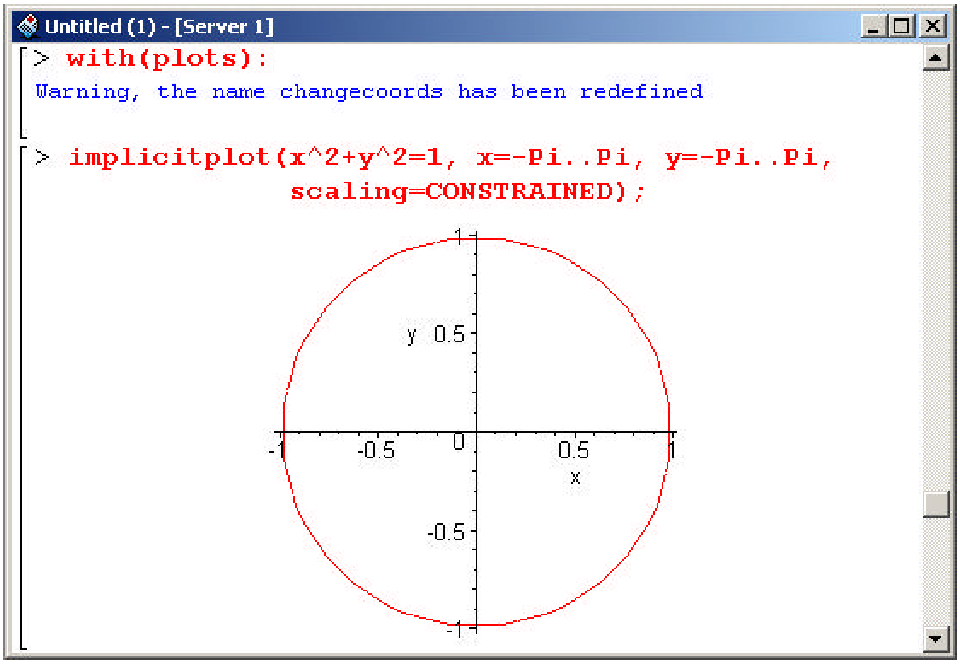



**Imagen Nº 19** Representación de lugares geométricos definidos a través de una ecuación en MAPLE
**Elaborado por:** El Investigador

### 2.4.5.10. Gráficos 3d.

La versión tridimensional del comando **plot** es la instrucción **plot3d** con una sintaxis muy similar a la de aquél. En la siguiente figura se ilustra el empleo de **plot3d** en la representación de funciones dadas en forma explícita y superficies expresadas en forma paramétrica.

En el primer caso se ha representado la función $f(x, y) = sen\sqrt{x^2 + y^2}$

Como puede observarse la función constituye el primer argumento en la llamada a **plot3d**. En el segundo y tercer argumento se especifican las variables independientes y sus rangos de variación. Por último hemos empleado la ya conocida opción **scaling** para mantener las mismas unidades a lo largo de los tres ejes.

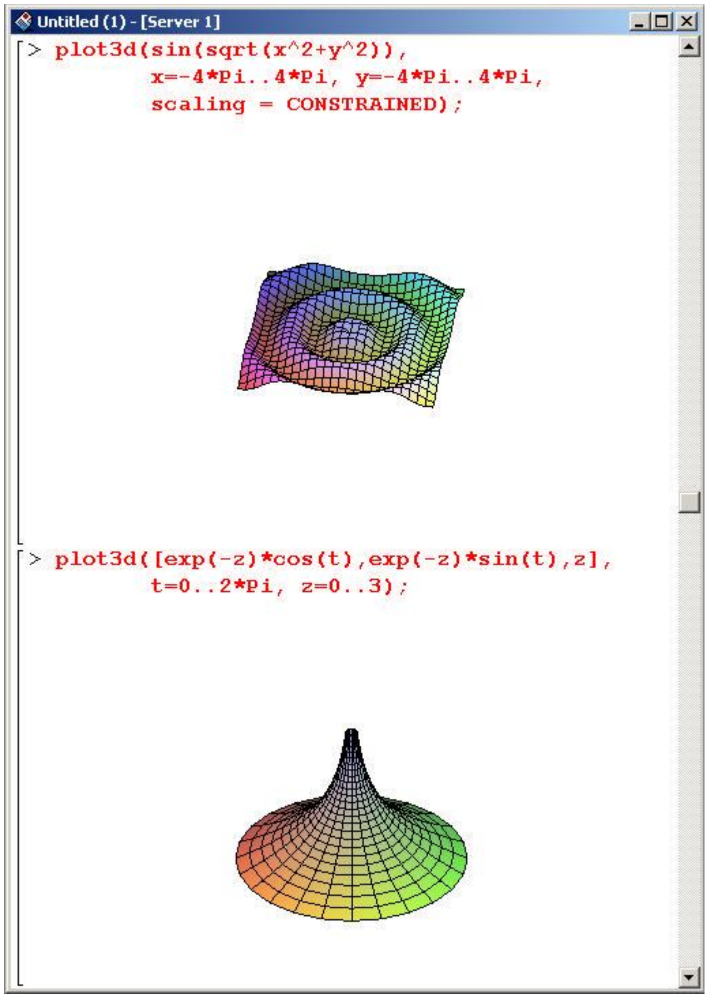



**Imagen Nº 20** Graficas 3D en MAPLE

**Elaborado por:** El Investigador

En el segundo ejemplo el comando **plot3d** se utiliza para representar la superficie dada por

$$\begin{cases} x(t) = e^{-z}\cos(t) \\ y(t) = e^{-z}\text{sen}(t) \\ z(t) = z \end{cases}$$

Nótese que el primer argumento lo constituye una lista que incluye la expresión paramétrica de cada una de las tres coordenadas. Los dos argumentos siguientes indican los parámetros y sus rangos de variación.

Las representaciones obtenidas mediante este procedimiento son auténticos modelos tridimensionales con los que es posible interaccionar. Basta arrastrar con el puntero del ratón sobre la figura para conseguir que ésta gire en la pantalla. De esta forma se puede observar la superficie desde cualquier ángulo lo que permite una completa comprensión espacial de la misma.

La mayoría de las opciones del comando **plot3d** están presentes también en **plot**, sin embargo hay algunas que son específicas de la versión tridimensional permitiendo, entre otras cosas, seleccionar la iluminación y el tipo de sombreado con el que se representan las superficies.

#### 2.4.5.11. Animaciones.

Como comentamos anteriormente el paquete **plots** incluye utilidades para la generación de animaciones. En la siguiente figura se presenta un ejemplo basado en el uso del comando **animate**.

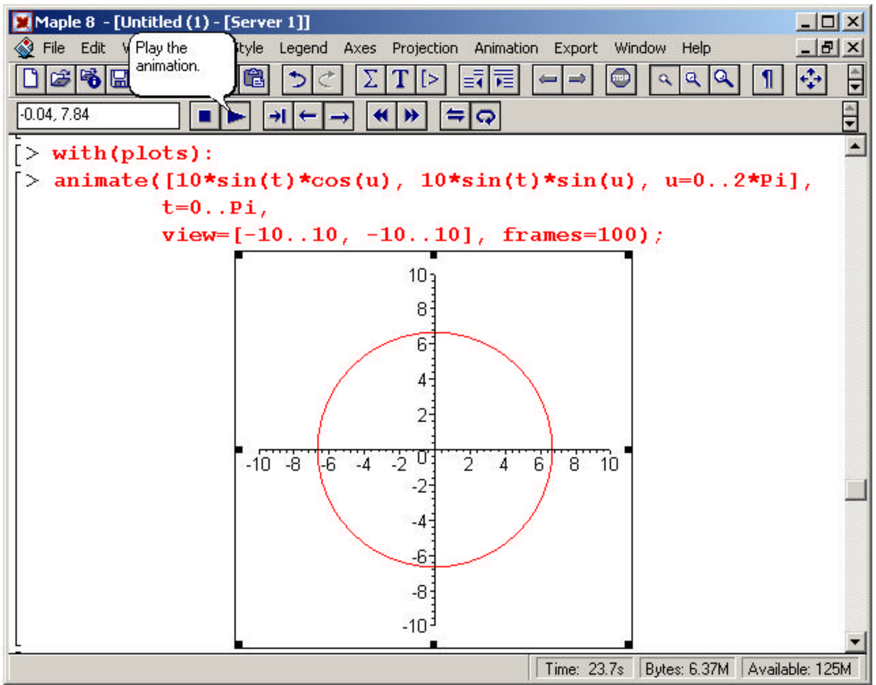



**Imagen Nº 21** Generación de animaciones en MAPLE

**Elaborado por:** El Investigador

El primer argumento de **animate** lo constituye una lista que contiene la información necesaria para construir la gráfica de una circunferencia centrada en el origen de radio 10 | *sen*(*t*) | dada en forma paramétrica (*u* es el parámetro de la circunferencia). Nótese que el parámetro *t*, que es el que juega el papel de tiempo en la animación, aparece definido en el segundo argumento de la llamada a **animate**. Puesto que el rango de variación de t es [0, p], la animación comienza con una circunferencia de radio nulo (un punto) que va creciendo hasta alcanzar un radio igual a 10 (t=p/2) y a continuación decrece hasta convertirse de nuevo en un punto.

La opción **view** fija los valores mínimos y máximos de las coordenadas x e y que son representados en la pantalla. Por último la opción **frames** permite especificar el número de "fotogramas" que constituirán la película. Un valor bajo para esta opción hace que se note el salto de un fotograma a otro y da como resultado animaciones poco fluidas. Por otro lado valores excesivamente altos de **frames** pueden agotar la memoria del ordenador.

Señalemos que para poder visualizar la animación es necesario seleccionar el dibujo creado por **animate** pinchando sobre el mismo. Es en ese momento cuando aparece en la barra contexto los botones con los que se controla la animación.

Finalizamos la sección indicando que es posible realizar animaciones de objetos 3D usando el comando **animate3d**, también incluido en el paquete **plots**.

### 2.4.5.12. Programación en Maple.

Maple no es un programa diseñado sólo para el uso interactivo. Los comandos e instrucciones que se utilizan de manera individual desde la línea de comandos pueden agruparse formando programas que facilitan la realización de tareas repetitivas y nos proveen a su vez de nuevos comandos.

A continuación se comentan, a modo de introducción al tema de la programación en Maple, las principales construcciones usadas en el desarrollo de programas. El lector interesado en una información más amplia puede consultar  como punto de partida.

### 2.4.5.13. Construcciones básicas

#### 1.-Bucle for

Los bucles **for** se emplean para realizar tareas repetitivas un cierto número de veces. En la figura siguiente se pueden observar tres ejemplos concretos.

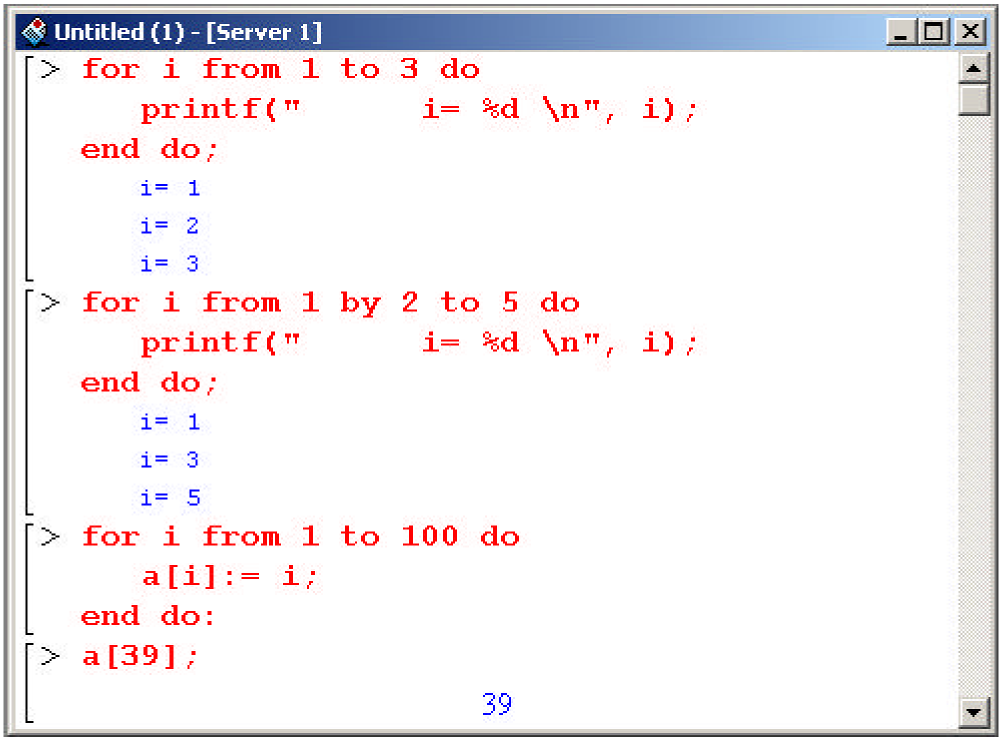



**Imagen Nº 22** Bucles y lasos en MAPLE

**Elaborado por:** El Investigador

El primer caso presenta un bucle **for** que realiza tres iteraciones sobre la variable i. Dicha variable comienza tomando el valor 1 (**from 1**) y en cada ciclo incrementa su valor en una unidad hasta alcanzar el valor 3 (**to 3**). Obsérvese la palabra reservada **do** que aparece al final de la primera línea y que es la que marca el inicio de las instrucciones sobre las que debe actuar el bucle.

El cuerpo del bucle lo constituye una llamada a la función **printf** la cual será ejecutada en cada una de las tres iteraciones.

La función **printf** escribe expresiones en la salida de acuerdo con una cadena de formato. Su sintaxis de llamada es la siguiente **printf(formato, x1, ..., xn)** donde **formato** es una expresión encerrada entre comillas que contiene los caracteres que van a ser impresos junto con especificaciones de formato (que comienzan con el símbolo **%**) y otras secuencias de control de la salida. Las especificaciones de formato indican la forma en la que deben ser impresas las variables **x1, ..., xn**.

En los ejemplos aparece la especificación de formato **%d** que indica que la variable **i** debe ser escrita como un número entero. La secuencia de control **\n** introduce un retorno de carro al final de cada impresión. Para más información acerca de **printf** puede consultarse la ayuda de Maple o cualquier manual que contenga información sobre el comando homónimo del lenguaje C.

Finalmente, la expresión **end do** señala el alcance del bucle **for**, es decir marca cuáles son las instrucciones a las que debe afectar la secuencia de iteraciones. El resultado final del bucle es la impresión de los tres valores que toma la variable i.
El segundo ejemplo es similar pero ahora el valor de la variable de iteración i se incrementa dos unidades (**by 2**) en cada ciclo, lo que hace que sólo se impriman los números impares de 1 a 5.

En el tercer caso el bucle **for** se utiliza para guardar los cien primeros números naturales dentro de la variable **a**. Nótese que al finalizar con dos puntos después de **end do** se suprimen las cien líneas de salida correspondientes a otras tantas asignaciones. La última instrucción comprueba que el elemento indexado con el número 39 dentro de la variable **a** contiene efectivamente el valor 39.

A continuación se presenta una aplicación del bucle **for** en la resolución de un problema matemático. Supongamos que estamos interesados en calcular las soluciones de la ecuación cos(x)=x. Evidentemente las soluciones de esta ecuación coinciden con los ceros de la función f(x)= x-cos(x). Para obtener estos últimos emplearemos un algoritmo conocido como método de Newton-Raphson que genera, a partir de una aproximación inicial $x0$, una sucesión definida en forma recursiva como sigue

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Bajo ciertas condiciones la sucesión obtenida converge hacia un cero de la función f. La siguiente figura muestra una pantalla de Maple con la resolución del problema. En primer lugar se ha efectuado la representación gráfica de la función f(x)= x-cos(x) usando el comando **plot**.

A la vista de la gráfica se hace evidente la existencia de una solución cercana a $x0$=1. Es fácil comprobar que, de hecho, la ecuación en la que estamos interesados sólo admite una solución:

Para ello basta notar que f(x) es monótona creciente y por lo tanto sólo puede cortar al eje de abscisas una vez. Tras la gráfica hemos utilizado un bucle **for** para implementar cinco iteraciones del método Newton-Raphson. Obsérvese que las dos últimas iteraciones arrojan el mismo resultado, lo que indica que el método ha sido convergente y proporciona la solución x=0.7390851332. Por último hemos empleado el comando **fsolve** para resolver directamente el problema y comprobar que obtenemos exactamente la misma solución.

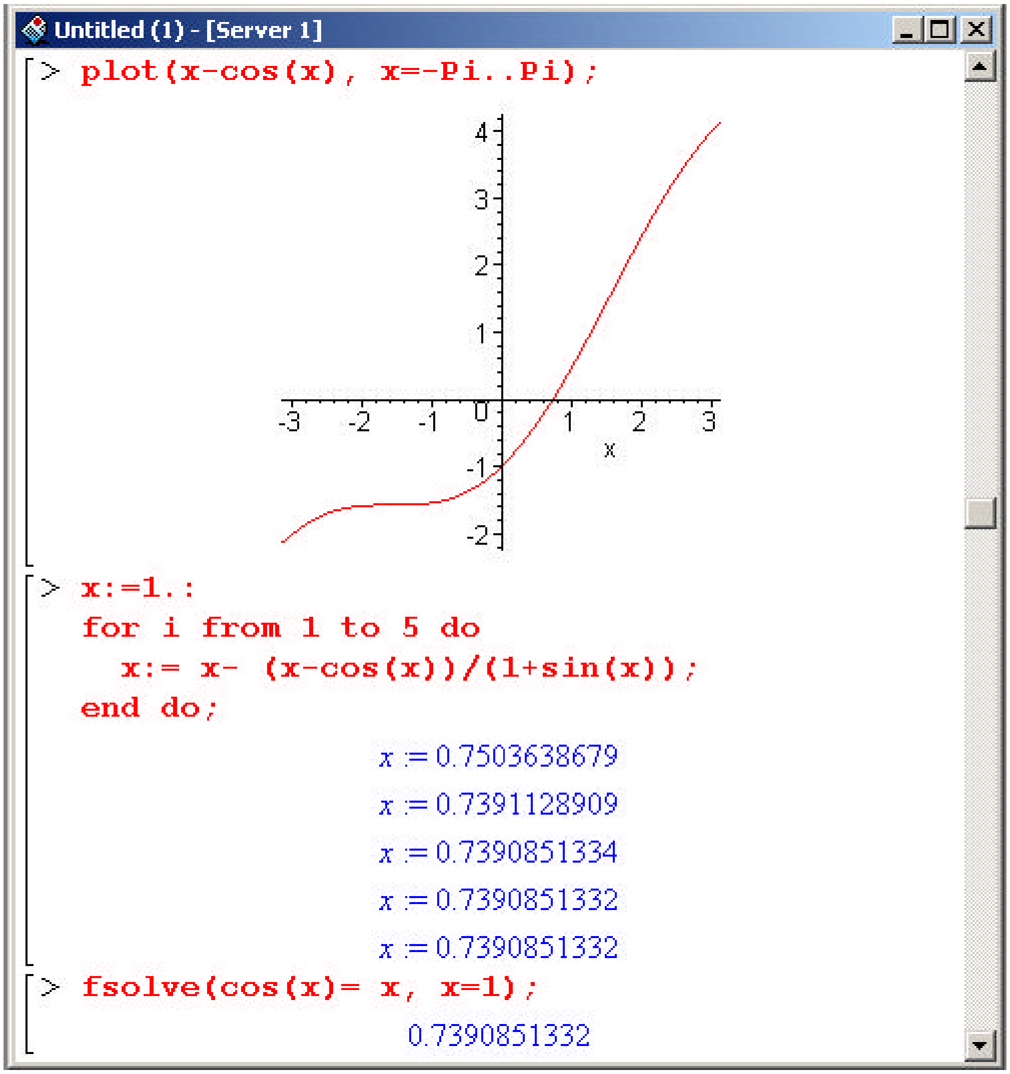



**Imagen Nº 23** Grafica de funciones trigonométricas en MAPLE

**Elaborado por:** El Investigador

### 2.-Bucle while

Cuando deseamos realizar un bucle hasta que una cierta condición deja de satisfacerse se emplea la construcción **while**.

Tanto esta instrucción de control de flujo como la que veremos a continuación (**if**) puede necesitar de expresiones lógicas para formular la condición que gobierna el bucle. Una expresión lógica es aquella cuya evaluación da un resultado lógico, es decir, verdadero o falso. Las expresiones lógicas se forman utilizando operadores relaciones (> mayor, < menor, <= menor o igual, >= mayor o igual, = igual, <> distinto) y/u operadores lógicos (**and** y, **or** o, **not** no). Por ejemplo, la expresión **2>1 or 1>3** es lógica y su evaluación produce el resultado *true*.

En el ejemplo comenzamos inicializando la variable i con el valor 5. A continuación comienza un bucle **while** que imprime el valor de la variable i junto con el mensaje “i es mayor que 2” y seguidamente se disminuye el valor de i en una unidad. Después de la tercera iteración la variable i pasa a tener el valor 2 dejando de satisfacerse la condición que gobierna el bucle, con lo cual concluye su ejecución.

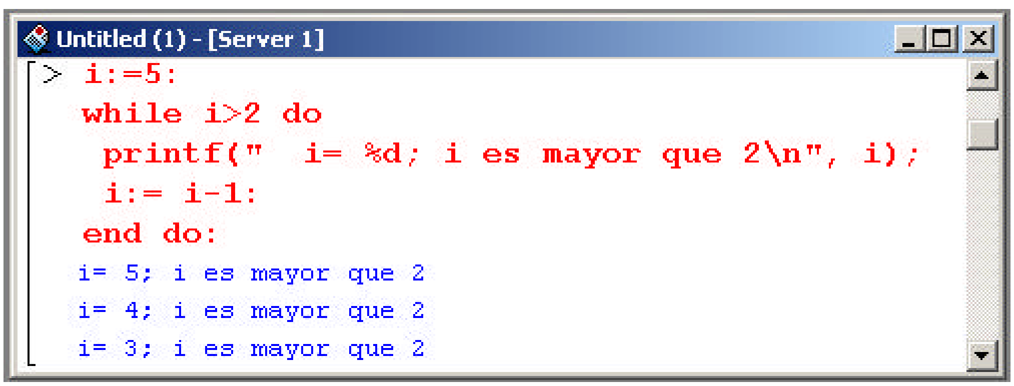



**Imagen Nº 23** Comando de comparación e imaginarios en MAPLE

**Elaborado por:** El Investigador

La instrucción **while** puede emplearse también en combinación con el bucle **for** de forma que la ejecución de éste se cancele en el momento en el que deja de verificarse una condición. De hecho ambas instrucciones forman parte de una expresión general de control de flujo cuya sintaxis es la siguiente

**for <nombre> from <expr> by <expr> to <expr> while <expr>**

**do <sucesión de sentencias> end do;**

**2.-Sentencia if.**

A menudo interesa ejecutar una instrucción o un grupo de instrucciones sólo si se verifica cierta condición. La sentencia **if** da respuesta a esta necesidad. Ilustraremos su empleo por medio de tres ejemplos en los que analizaremos su comportamiento dentro de un bucle **for**.

Comencemos describiendo el ejemplo recogido en la siguiente figura.

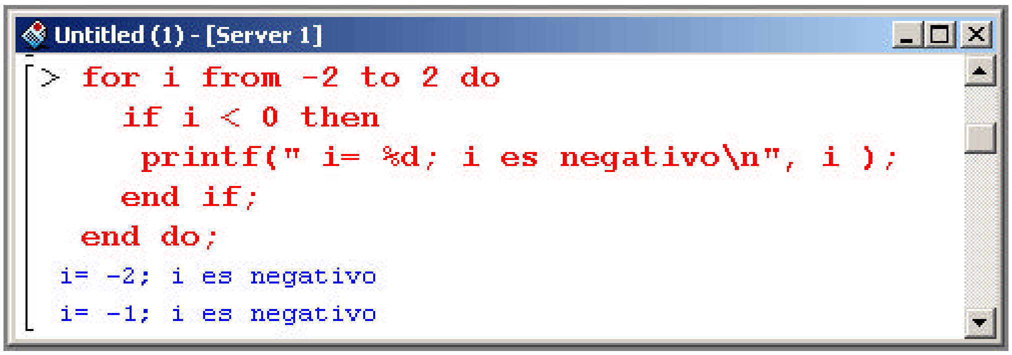
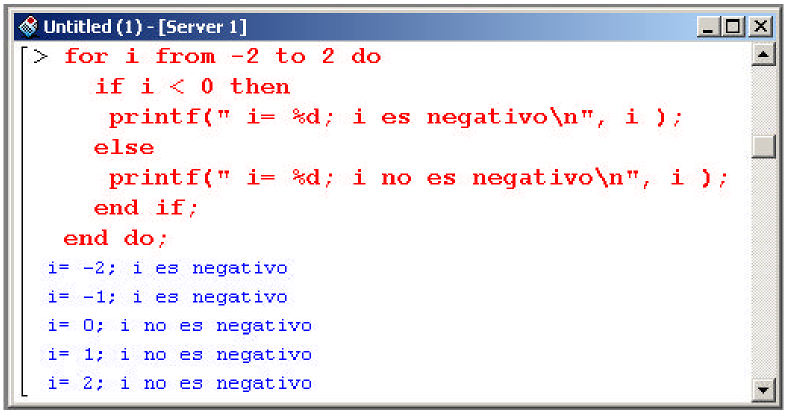



**Imagen N°24** Sentencia if en MAPLE

**Elaborado por:** El Investigador

En primer lugar se define un bucle **for** que se ejecutará cinco veces. La sentencia **if** hace que la instrucción **printf** se ejecute únicamente para los valores negativos de i. Obsérvese la sintaxis de la sentencia **if** que incluye el término **then** detrás de la condición **i<0** y emplea la expresión **end if** para cerrar su alcance.

Hay ocasiones en las que, además de ejecutar ciertas instrucciones cuando se verifica una condición, deseamos que se ejecuten otras cuando no se verifica. Para ello basta con insertar la palabra reservada **else** seguida de las instrucciones correspondientes dentro del cuerpo de la sentencia **if**, tal y como se muestra en la siguiente figura.

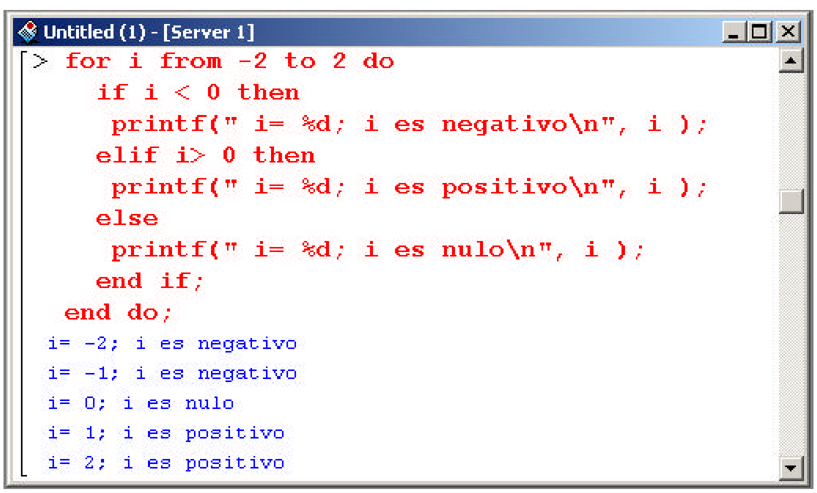


```
Untitled (1) - [Server 1]
> for i from -2 to 2 do
    if i < 0 then
     printf(" i= %d; i es negativo\n", i );
    else
     printf(" i= %d; i no es negativo\n", i );
    end if;
  end do;
 i= -2; i es negativo
 i= -1; i es negativo
 i= 0; i no es negativo
 i= 1; i no es negativo
 i= 2; i no es negativo
```

**Imagen Nº25** Sentencia **else** en MAPLE

**Elaborado por:** El Investigador

Por último, si se quiere elegir entre la ejecución de un bloque de sentencias u otro dependiendo de la verificación de una u otra condición es posible insertar tantas líneas **elif [**condición**] then** como sean necesarias para dar cuenta de todas las posibilidades. En el tercer ejemplo, recogido en la siguiente figura, se puede apreciar esta construcción. **else** <**sucesión de sentencias**> es opcional y puede no aparecer, pero si aparece debe de estar al final, como en el ejemplo.



```
Untitled (1) - [Server 1]
> for i from -2 to 2 do
    if i < 0 then
     printf(" i= %d; i es negativo\n", i );
    elif i> 0 then
     printf(" i= %d; i es positivo\n", i );
    else
     printf(" i= %d; i es nulo\n", i );
    end if;
  end do;
 i= -2; i es negativo
 i= -1; i es negativo
 i= 0; i es nulo
 i= 1; i es positivo
 i= 2; i es positivo
```

**Imagen Nº26** Ejecución de un bloque de sentencias u otro dependiendo de la verificación de una u otra condición en MAPLE.

**Elaborado por:** El Investigador.

### 2.4.5.14. Procedimientos.

Al usar Maple frecuentemente en modo interactivo se descubre que hay secuencias de comandos que se repiten a menudo. El lenguaje de programación Maple permite agrupar todos esos comandos en unidades que se denominan *procedimientos*. La forma más sencilla de crear un procedimiento consiste en encapsular la secuencia de instrucciones que se habría introducido interactivamente entre las sentencias **proc()** y **end proc**.

En la siguiente figura se define un procedimiento sencillo que hemos denominado **suma**. El procedimiento toma dos argumentos y simplemente devuelve el valor de su suma.

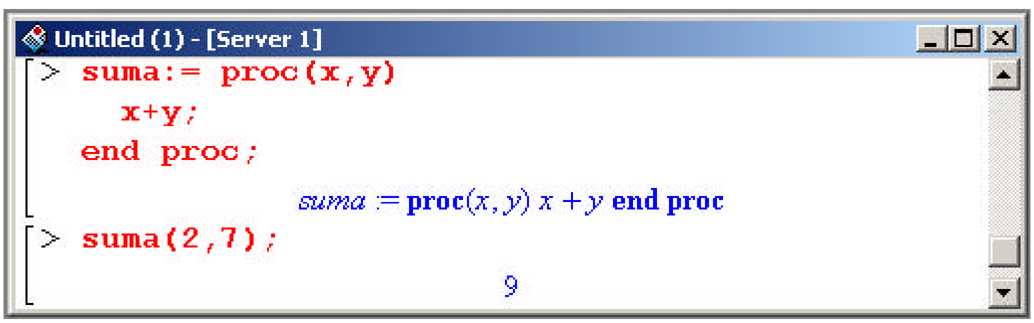



**Imagen Nº27** Suma de dos argumentos en MAPLE.
**Elaborado por:** El Investigador.

El verdadero poder de los procedimientos reside en la posibilidad de combinar cualquier tipo de comando de Maple. Por ejemplo, en la siguiente figura se muestra un procedimiento que admite como argumentos las coordenadas (x,y) de un punto del plano y devuelve un dibujo con el punto en cuestión así como su distancia hasta el origen de coordenadas.

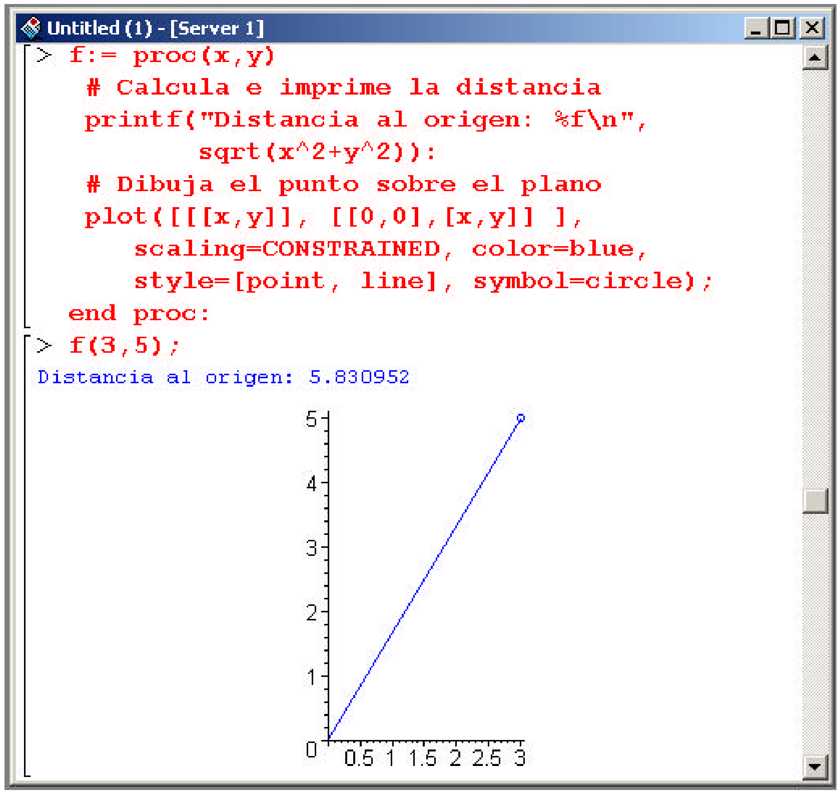



**Imagen Nº28** Grafica de argumentos con las coordenadas en MAPLE.

**Elaborado por:** El Investigador.

El símbolo # que aparece en dos de las líneas del anterior procedimiento sirve para introducir comentarios que facilitan la comprensión de los programas. Maple interpreta como comentario todos los caracteres que siguen al símbolo # dentro de la misma línea. Observesé que al finalizar con **:** la expresión **end proc** evitamos que Maple saque por pantalla la definición del procedimiento completo como sucedía en el primer ejemplo.

Los procedimientos creados por el usuario constituyen nuevas instrucciones que, a su vez, pueden ser llamadas por otros procedimientos. De hecho muchos de los comandos de Maple son simples procedimientos cuyo código es accesible, de modo que pueden ser modificados para adaptarlos a las necesidades específicas de cada situación. La mayoría de estos comandos se encuentran agrupados en los denominados *paquetes* que son el objeto de la siguiente sección.

#### 2.4.5.15. Los paquetes de Maple.

En el momento del arranque el programa Maple carga un número relativamente reducido de comandos en memoria. Existen sin embargo multitud de instrucciones adicionales diseñadas para resolver problemas más específicos o realizar tareas más avanzadas. Estos comandos se encuentran organizados en colecciones que en inglés reciben el nombre de “packages” y que nosotros traducimos como *paquetes*. Puede decirse que un paquete de Maple es un conjunto de comandos diseñados para facilitar la resolución de problemas en un área específica. En algunos casos el número de nuevas funciones es tan grande que se han terminado reorganizando en *subpaquetes*.

Al pasar el nombre de un paquete como argumento al comando **with** se consigue cargar en memoria todas las funciones del paquete en cuestión. Un ejemplo concreto, referente al paquete **plots** aparece en el apartado ANIMACIONES de la sección **Gráficos con Maple**. Hay que decir, sin embargo que también es posible cargar parcialmente un paquete o incluso se puede llamar a una función sin necesidad de cargar el paquete correspondiente. En este último caso la sintaxis de llamada es la siguiente **paquete[función](argumentos).**

A continuación se comentan brevemente alguno de los paquetes más representativos.

**Student.**

Este paquete está diseñado para la enseñanza y el aprendizaje de los cursos de matemáticas a un nivel básico. Proporciona, además, una buena introducción para la comprensión del sistema Maple. Contiene el subpaquete **Calculus1** que cubre el material esencial para un curso sobre funciones de una variable.

**plots.**

Contiene funciones que facilitan la representación de curvas y superficies en dos y tres dimensiones. También contiene instrucciones para la realización de animaciones.

**linalg.**

En este paquete se encuentran recogidas funciones de utilidad en el álgebra lineal. Con ellas se pueden realizar fácilmente productos de matrices, cálculo de inversas o de exponenciales, obtención de polinomios característicos, valores propios, formas de Jordán.

**stats.**

Este paquete proporciona funciones como medias o cuartiles para el análisis de datos y funciones para construir histogramas y realizar representaciones gráficas. Contiene varios subpaquetes como **anova** para el análisis de la varianza, **fit** para efectuar regresiones lineales, **statevalf** para la evaluación numérica de distintas distribuciones de probabilidad o **statplots** que proporciona funciones para crear diferentes tipos de gráficos estadísticos.

**DEtools.**

Está integrado por funciones que facilitan el trabajo con ecuaciones diferenciales. Con las utilidades contenidas en este paquete se puede, entre otras tareas, realizar representaciones gráficas de campos vectoriales, trabajar con secciones de Poincaré, manipular operadores diferenciales, simplificar sistemas y construir soluciones en forma cerrada.

Además de los anteriormente enumerados, existen decenas de paquetes que abarcan los más variados tópicos: **combinat** sobre combinatoria, **finance** para cálculos financieros, **group** para trabajar en teoría de grupos, **networks** útil para manejar grafos y redes, **simplex** diseñado para la optimización lineal, **Maplets** si se pretende crear interfaces gráficos de usuario, **Matlab** para usar funciones del sistema Matlab en una sesión Maple... Con tal variedad de paquetes el usuario puede estar seguro de que, sea cual sea el problema sobre el que trabaje, el sistema Maple siempre le ofrecerá ayuda especializada sobre la materia.

## 2.5. HIPÓTESIS.

El uso de la PDI y el software Maple, como herramienta didáctica mejorará el Proceso Enseñanza-Aprendizaje colaborativo de Cálculo I, de los estudiantes de Segundo nivel del IST SECAP Ambato.

## 2.6. SEÑALAMIENTO DE VARIABLES.

Acorde a la información inicial, se establecen las variables:

### 2.6.1. Variable Independiente.

Pantalla Digital Interactiva con el Software Maple.

El desarrollo de nuevas herramientas informáticas basadas en la simulación y modelado, software matemático y sistemas multimedia, ayudado de elementos táctiles como la PID.

La mejora en la transmisión cognoscitiva que se obtengan está en su uso, la labor docente, estarán en función de la capacidad que se tenga de su manejo e implementación.

### 2.6.2. Variable Dependiente.

Proceso Enseñanza-Aprendizaje colaborativo de Cálculo I.

El docente se convertirá en un facilitador y modelador de situaciones de aprendizaje para desarrollar en el alumnado habilidades de auto aprendizaje y trabajo en grupo gracias al uso adecuado del software matemático.

# CAPÍTULO III

# MARCO METODOLÓGICO

## 3.1. ENFOQUE.

La investigación se lleva a cabo con el enfoque cuantitativo, ya que se a realiza un estudio de carácter descriptivo, tipo encuesta, para tratar de obtener información valiosa acerca de un problema que consideramos realmente importante dentro del ámbito educativo.

Se desarrolla asimismo, un enfoque cualitativo del estudio, que tiene en consideración el paradigma interpretativo y su utilidad en el entendimiento de la realidad y los fenómenos educativos, pues esta investigación trata de comprender las acciones y opiniones de los sujetos estudiados.

La fiabilidad indica el grado en que un instrumento mide con precisión y con el menor error posible, indica asimismo, la condición del instrumento de ser fiable y de ser capaz de presentar resultados veraces y constantes en un empleo repetido y en condiciones similares de medición. El coeficiente alfa de Cronbach es un método estadístico muy extendido y muy utilizado que se aplica en esta investigación.

## 3.2. MODALIDAD BÁSICA DE LA INVESTIGACIÓN.

### 3.2.1. Correlacional.

Este tipo de investigación pretende medir el grado de relación de las variables de estudio, en este caso la influencia de la formación actitudinal en el proceso enseñanza-aprendizaje, para de esta forma fundamentar teórica-científicamente cada una de las variables.

## 3.3. NIVEL O TIPO DE INVESTIGACIÓN.

Dentro de la modalidad de la investigación se emplea la Investigación Bibliográfica y Documental.

### 3.3.1. La Investigación Bibliográfica.

La revisión bibliográfica de páginas digitales en la red es un trabajo diario que permite al docente fortalecer su visión y conocer otras interpretaciones a nivel mundial del uso de las nuevas tecnologías de la información y la comunicación como la pizarra digital interactiva.

### 3.3.2. La Investigación Experimental.

La lógica o estructura de la investigación consiste en tomar medidas de los estudiantes, antes y después de que se ha presentado la herramienta tecnológica llamada "pizarra digital interactiva con el software maple" como condición experimental. Las medidas antes y después se tomaron a través una prueba objetiva de conocimientos.

La manipulación de una o más variables independientes mide el efecto de la variable independiente sobre la variable dependiente y su validez se interna de la situación experimental.

## 3.4. POBLACIÓN Y MUESTRA.

### 3.4.1. Población.

"La población o universo como conjunto de unidades de investigación se refiere a personas, instituciones, documentos, hechos, entre otros, a los cuales hace referencia la investigación y para las que serán válidas las conclusiones que se obtengan". Muñoz (2002,Pág.184).

La Población o Universo con el cual se va a trabajar consta de 9 docentes, y 80 estudiantes de la especialización, del "Automatización y de control industrial de IST-SECAP Ambato", distribuidos de la siguiente manera:

| **Población** | **Frecuencia** | **%** |
|---|---|---|
| Docentes | 9 | 10,12 |
| Estudiantes de segundo nivel | 80 | 89,88 |
| **Total:** | **89** | **100,00** |

**Cuadro Nº1** Tabla de Población y muestra a evaluarse en la investigación.
**Elaborado por:** El Investigador

### 3.4.2. Muestra.

La Muestra es un conjunto representativo de la población.

Para el presente caso se trabajará con la totalidad de la población de los docentes, es decir con 9 personas, y la totalidad de los estudiantes, que son 80, debido a que la población es pequeña, confiable y manejable por lo tanto procedemos a su estudio y análisis.

## 3.5. OPERACIONALIZACIÓN DE VARIABLES.

**La siguiente es la hipótesis motivo de Operacionalización:**

El uso de la pantalla digital interactiva con el software Maple mejorará el proceso de enseñanza-aprendizaje colaborativo de Cálculo I de los estudiantes de segundo, nivel de Electricidad y Electrónica Industrial IST-SECAP Ambato.

**Cuadro N°2**: **Variable Independiente:** Pantalla Digital Interactiva con el software Maple

| CONCEPTUALIZACIÓN | DIMENSIONES | INDICADORES | ÍTEMS BÁSICOS | TÉCNICA INSTRUMENTOS |
|---|---|---|---|---|
| La pizarra interactiva es una pantalla sensible que conecta a un ordenador donde se aloja el software y a un proyector(hardware) para que se convierta en una potente herramienta en el ámbito de la enseñanza, en ella se combinan el uso de la pizarra convencional con todos los recurso de los nuevos sistemas multimedia y de las TIC | Hardware<br><br>Software | Ordenador<br><br>Multimedia<br><br>Proyector<br><br>Software de la pantalla interactiva | **¿Conoce usted qué es Pantalla Digital Interactiva (PDI)?**<br><br>**¿Se emplean Procesos interactivos dentro del IST-SECAP en proceso educativo en el aula?**<br><br>**¿Existe pantallas táctiles en las instalaciones de la institución?**<br><br>**¿Cómo docente técnico posee la formación profesional adecuada para el empleo de la PID en el desarrollo de las clases?**<br><br>**¿Considera que existen las condiciones básicas indispensables para implementar el proceso interactivo educativo?**<br><br>**¿Considera que el Proceso Enseñanza-aprendizaje en el IST-SECAP es el adecuado en la actualidad?**<br><br>**¿Dentro del Proceso Enseñanza-aprendizaje permite la construcción del conocimiento a los propios estudiantes a través de la comunicación de la información que usted realiza?**<br><br>**¿Mediante la adquisición de conocimiento, el estudiante está en la capacidad de resolver situaciones problemáticas de su medio?**<br><br>**¿Considera que con la implementación de un aula interactiva el proceso enseñanza-aprendizaje va a mejorar en el plantel?**<br><br>**¿Cuál sería su grado de participación en la elaboración de un aula interactiva en el IST-SECAP?** | Técnica:<br>Encuesta.<br><br>Instrumento:<br>Cuestionario |

| CONCEPTUALIZACIÓN | DIMENSIONES | INDICADORES | ÍTEMS BÁSICOS | TÉCNICA INSTRUMENTOS |
|---|---|---|---|---|
| Maple es un software matemático de propósito general capaz de realizar cálculos simbólicos. | Software | De aplicación<br>Lenguajes de programación<br>Sistemas Operativos<br>Controladores de dispositivo | ¿Utiliza software para realizar cálculos en el proceso de enseñanza aprendizaje?<br><br>¿Ha utilizado el programa especializado MAPLE?<br><br>¿En su clase se apoya con recursos como el Power Point para explicar la clase y de esta manera hacerla participativa?<br><br>¿Realiza grupos de trabajo para motivar el aprendizaje colaborativo en los estudiantes?<br><br>¿Utiliza las TIC para el proceso de enseñanza aprendizaje de Cálculo I?<br><br>¿Cómo considera usted que se encuentra el proceso enseñanza-aprendizaje dentro del plantel?<br><br>¿Apoya el desarrollo de ejercicios explicativos por parte de los estudiantes como tarea?<br><br>¿Apoya el desarrollo de ejercicios explicativos por parte de los estudiantes como tarea?<br><br>¿Con que frecuencia utiliza la pizarra y la tiza liquida en el dictado de Cálculo I? | Técnica:<br>Encuesta.<br><br>Instrumento:<br>Cuestionario |
| | Cálculo | Matemáticos<br>Algebraicos<br>Derivación<br>Integración | ¿Desarrolla el portafolio Académico y Estudiantil?<br><br>¿Las notas son procesadas de acuerdo a nuevos sistemas de publicación de notas o los tradicionales | |

**Elaborado por:** Investigador.

**Cuadro N°3**: **Variable Dependiente**: Proceso enseñanza-aprendizaje colaborativo

| CONCEPTUALIZACIÓN | DIMENSIONES | INDICADORES | ÍTEMS BÁSICOS | TÉCNICA INSTRUMENTOS |
|---|---|---|---|---|
| **Aprendizaje Colaborativo**<br>Es el método de aprendizaje cuyo modelo más destacado es la de que el usuario es responsable tanto de su propio aprendizaje como del aprendizaje de los demás.<br>Este proceso consiste en la interacción entre las personas que constituyen un grupo, con la finalidad de obtener un aprendizaje común y significativo a través de la colaboración, implicación, discusión, consenso, etc. | **Modelo Educativo**<br><br>**Método de enseñanza aprendizaje.**<br><br>**Conocimiento** | Proceso docente-educativo.<br>Motivación.<br>Competencias<br><br>Método explicativo-ilustrativo.<br>Aprendizaje colaborativo.<br><br>Técnicas e instrumentos | ¿Con la herramienta informática MAPLE ha mejorado su aprendizaje del Cálculo?<br>¿Le participa del contenido de la materia en formato digital (presentaciones) los maestros?<br>¿En la clase de Cálculo I, cuando desarrollan talleres de aprendizaje colaborativo logra comprender y mejor los ejercicios planteados?<br>¿Se mejora las competencias con las clases en el sistema colaborativo (Conocimiento, Habilidades, Valores)?<br>¿Despierta en ti el proceso de investigación que un docente plantee nuevas formas de enseñanza)?<br>¿Elaboras algún cuaderno de apuntes o folio estudiantil de la materia?<br>¿Luego de las evaluaciones comparas las respuestas utilizando software de resolución de ejercicios?<br>¿La tecnología acorta el tiempo en el desarrollo de tareas? | Técnica:<br>Encuesta.<br><br>Instrumento:<br>Cuestionario |

## 3.6. TÉCNICAS E INSTRUMENTOS DE RECOLECCIÓN DE DATOS.

En la recolección de Datos del presente trabajo se utilizará la técnica de la Encuesta.

La encuesta **"consiste en la obtención de datos de interés social mediante la interrogación a los miembros de la sociedad".** (GÁLTUN, Johan. 2002, Pág. 200).

El cuestionario, está dirigido tanto a docentes y estudiantes de Automatización y de control industrial de IST-SECAP Ambato, en los que se analizará las causas de la incidencia del uso de la PDI con el software maple en el proceso de enseñanza aprendizaje de Cálculo I. Para facilitar el análisis se utiliza el cuestionario tipo Likert de 4 opciones.

### 3.6.1. PLAN PARA LA RECOLECCIÓN DE INFORMACIÓN.

**Cuadro Nº 4: Recolección de Información**

| Preguntas Básicas | Explicación |
|---|---|
| 1.- ¿Para qué? | Para alcanzar los objetivos de la investigación |
| 2.- ¿De qué personas u objetos? | Docentes del área de matemática y estudiantes |
| 3.- ¿Sobre qué aspectos? | Construye su conocimiento, analiza de forma lógica problemas planteados y propone soluciones, es comunicativo, presta atención y comprende las clases dadas, comparte actividades, coopera, participa activamente con sus compañeros con respeto y solidaridad, comparte experiencias, socializa sus conocimientos pre-establecidos, |

| | |
|---|---|
| | demuestra disposición por aprender, conceptualiza, representa ideas, explica y relaciona conceptos formando proposiciones, resuelve problemas de la vida, entiende, interpreta, analiza, da significados. |
| 4.- ¿Quién? | El Investigador |
| 5.- ¿Cuándo? | Período de septiembre 2012-febrero 2013. |
| 6.- ¿Dónde? | Instituto Superior Tecnológico Secap |
| 7.- ¿Cuántas veces? | Dos |
| 8.- ¿Qué técnicas de recolección? | Encuesta |
| 9.- ¿Con qué? | Encuesta, cuestionario estructurado. |
| 10.- ¿En qué situación? | En las aulas |

**Elaborado por:** Investigador.

## 3.7. PROCESMIENTO Y ANÁLISIS

### 3.7.1. PLAN DE PROCESAMIENTO Y ANÁLISIS DE DATOS.

- Luego de recogidos los datos serán transformados siguiendo los siguientes procedimientos:
- Se procesará la información de toda contradicción, que no sea incompleta, no pertinente.
- Si se detecta fallas se volverá a repetir la recolección de la información.
- Finalmente se tabulará según las variables, en este caso la variable independiente y la variable dependiente, luego se realizará los cuadros de cada variable y el cuadro con cruce de variables.
- Con los datos obtenidos de las encuestas se procederá a la tabulación de datos con la ayuda de software STATDISK para su posterior análisis e interpretación.

- Obteniendo gráficos pastel  para concluir y recomendar sobre el análisis de la investigación.

### 3.7.2. PLAN DE ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN DE RESULTADOS

- Análisis de los resultados estadísticos, destacando tendencias o relaciones fundamentales de acuerdo con los objetivos e hipótesis

- Interpretación de los resultados con apoyo del marco teórico en el aspecto pertinente, es decir atribuciones del significado científico a los resultados estadísticos manejando las categorías correspondientes del marco teórico

- Comprobación de hipótesis, para la verificación estadística conviene seguir la asesoría de un especialista utilizando la prueba estadística Chi-cuadrado. Hay niveles de investigación que no requieren de hipótesis: explicativo y descriptivo. Sí se verifica hipótesis en los niveles de asociación entre variables y exploratorio.

- Establecimiento de conclusiones y recomendaciones.

# CAPÍTULO IV

# ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN DE RESULTADOS

Una vez aplicado los instrumentos de colección de datos (cuestionarios), evaluamos con el estadístico de prueba adecuado, para proceder a interpretar los resultados, los cuales cuentan con sus respectivos cuadros y gráficos, observando los siguientes resultados.

## 4.1. ENCUESTA DIRIGIDA A DOCENTES.

**1. ¿Conoce usted qué es Pantalla Digital Interactiva (PDI)?**

**Cuadro Nº5:** Recursos didácticos como la PDI para la enseñanza de asignatura de Cálculo I.

| Opciones | Fa | Fr | Porcentaje |
|---|---|---|---|
| **Siempre** | 1 | 0,12 | 12% |
| **Frecuentemente** | 3 | 0,33 | 33% |
| **Pocas veces** | 3 | 0,33 | 33% |
| **Nunca** | 2 | 0,22 | 33% |
| **Total** | 9 | 1,00 | 100% |

**Fuente:** Encuesta a Docentes

**Elaborado por:** Investigador.

**Recursos  didácticos como la PDI para la asignatura de Cálculo I.**

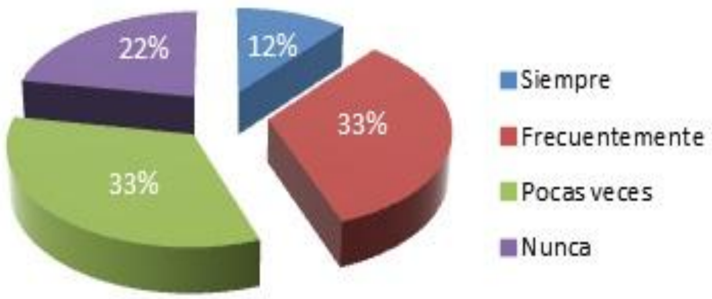



**Gráfico Nº6; Pregunta. N° 1;** Encuesta - Dirigido a Docentes.

**Elaborado por:** El investigador.

**Análisis e interpretación.**

Realizado el levantamiento de información de la muestra de 9 profesores  del área de Cálculo I del IST- SECAP  se encuentra que el 33,33% de los profesores encuestados frecuentemente aplica recursos interactivos para desarrollar la asignatura, un 33,33% pocas veces  aplica y un 22,22% nunca lo hace.

El 33,33% de los maestros pocas veces aplican recursos interactivos para desarrollar la asignatura de Cálculo I;  Una de las cualidades de la Matemática y el  Cálculo Integral es ayudar a desarrollar el pensamiento analítico, es decir hacer que el proceso de enseñanza,  creativa,  reflexiva  para que los estudiantes se motiven y adquieran el conocimiento práctico para el desarrollo del mismo.

**2. ¿Se emplean Tecnologías interactivas dentro del IST-SECAP en el proceso educativo en el aula?**

**Cuadro Nº 6**: Procesos Interactivos empleados en el IST-SECAP – Encuesta Docentes.

| Opciones | Fa | Fr | Porcentaje |
|---|---|---|---|
| **Siempre** | 0 | 0 | 0% |
| **Frecuentemente** | 1 | 0,12 | 12% |
| **Pocas veces** | 2 | 0,22 | 22% |
| **Nunca** | 6 | 0,66 | 66% |
| **Total** | 9 | 1 | 100% |

**Fuente:** Encuesta a Docentes

**Elaborado por:** Investigador.

**Procesos Interactivos empleados en el IST-SECAP**

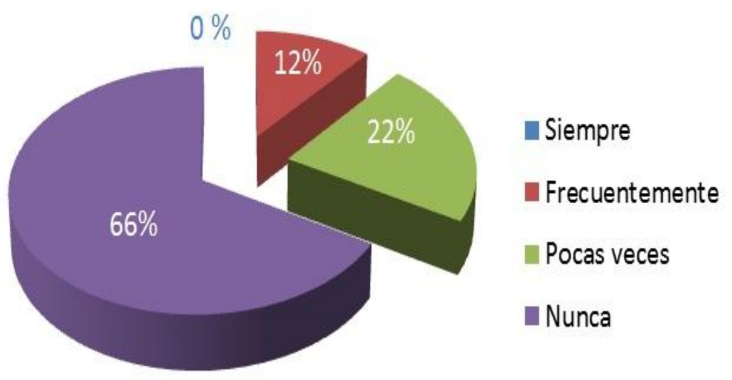



**Gráfico Nº8 ; Pregunta. N° 2;** Encuesta - Dirigido a Docentes.

**Elaborado por:** El investigador.

**Análisis e interpretación.**

El 66% delos docentes no aplican medios como recursos didácticos frecuentes como parte del desarrollar aprendizajes lógicos y matemáticos en el estudio de Cálculo I, mientras que al 22% pocas veces.

Según los resultados obtenidos se deduce que al 66% de maestros no han cambiado su forma de dictar la cátedra, hay que fomentar el desarrollo aprendizajes y manejo de TIC por parte del docente lo cual conducirá a investigar nuevos recursos a aplicar en la construcción del conocimiento del Cálculo I.

**3. ¿Existe pantallas táctiles en las instalaciones de la institución?**

**Cuadro Nº 7:** Conoce si existe equipos PDI, en el IST-SECAP Encuesta Docentes.

| Opciones | Fa | Fr | Porcentaje |
|---|---|---|---|
| **Siempre** | 0 | 0 | 0% |
| **Frecuentemente** | 1 | 0,12 | 12% |
| **Pocas veces** | 3 | 0,33 | 33% |
| **Nunca** | 5 | 0,55 | 55% |
| **Total** | 9 | 1 | 100% |

**Fuente:** Encuesta a Docentes

**Elaborado por:** Investigador.

**Conocimiento del recurso tecnológico PDI en el IST- SECAP**

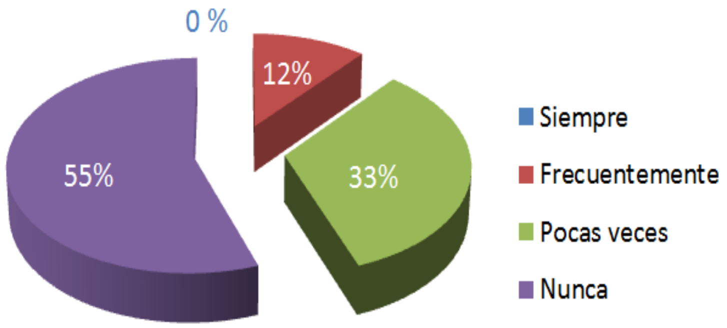



**Gráfico Nº9; Pregunta. N° 3;** Encuesta - Dirigido a Docentes

**Elaborado por:** El investigador.

**Análisis e interpretación.**

El 55% delos docentes no conocía que existen equipos para realizar clases interactivas, mientras 33% pocas veces tiene limita acceso a estas aulas.

Según los resultados obtenidos se deduce que al 55% de maestros no ha utilizado este tipo de recurso tecnológico para su forma de dictar la cátedra, hay que fomentar la información de que en la institución se encuentra instalada dos pantallas táctiles una en la biblioteca y otra en el Laboratorio de Control Industrial.

**4. ¿Cómo docente técnico posee la formación profesional adecuada para el empleo de la PID en el desarrollo de las clases?**

**Cuadro Nº 8**: Está capacitado para el uso y manejo de equipos PDI, en el IST-SECAP -Encuesta Docentes.

| Opciones | Fa | Fr | Porcentaje |
|---|---|---|---|
| **Siempre** | 0 | 0 | 0% |
| **Frecuentemente** | 4 | 0,45 | 45% |
| **Pocas veces** | 3 | 0,33 | 33% |
| **Nunca** | 2 | 0,22 | 22% |
| **Total** | 9 | 1 | 100% |

**Fuente:** Encuesta a Docentes

**Elaborado por:** Investigador.

**Nivel de conocimiento teórico practico del equipo PDI en el IST-SECAP**

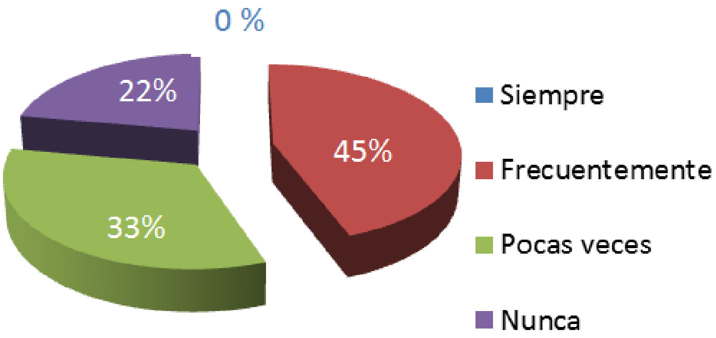



**Gráfico Nº10; Pregunta. N° 4;** Encuesta - Dirigido a Docentes

**Elaborado por:** El investigador.

**Análisis e interpretación.**

El 45% de los docentes poseen conocimiento de cómo operar una pantalla táctil, mientras 22% nunca han utilizado o saben operar dicho equipo.

Al tabular los resultados 45% de docentes requiere el uso del equipo para dictar la cátedra, hay que flexibilizar los usos de tiempo de las aulas dotadas de los equipos PDI.

**5. ¿Utiliza algún software para realizar cálculos en el proceso de enseñanza aprendizaje?**

**Cuadro Nº 9:** Aplicación de software especializado para cálculos matemáticos, en el IST-SECAP -Encuesta Docentes.

| Opciones | Fa | Fr | Porcentaje |
|---|---|---|---|
| **Siempre** | 0 | 0 | 0% |
| **Frecuentemente** | 0 | 0 | 0% |
| **Pocas veces** | 4 | 0,45 | 45% |
| **Nunca** | 5 | 0,55 | 55% |
| **Total** | 9 | 1 | 100% |

**Fuente:** Encuesta a Docentes.

**Elaborado por:** Investigador.

**Utilización de software especializado en la resolución de problemas matemáticos en el IST-SECAP**

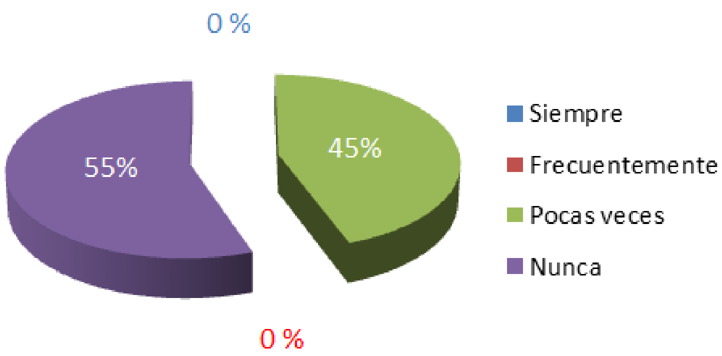



**Gráfico N°11; Pregunta. N° 5;** Encuesta - Dirigido a Docentes

**Elaborado por:** El investigador.

**Análisis e interpretación.**

El 55% nunca han aplicado software de simulación en resolución de problemas matemáticos en el campo de cálculo integral, el 45% pocas veces ha manejado paquetes de resolución de problemas matemáticos.

El 55% de los docentes no valida sus aplicaciones Matemática con aplicaciones informáticas especializadas, para esta área de ciencias básicas podemos hablar que la mayoría de los docentes, no se apoyan en las herramientas modernas desarrolladas para este fin.

**6. ¿Ha utilizado el programa especializado MAPLE?**

**Cuadro Nº 10**: Conoce y maneja el programa de resolución matemático MAPLE, Encuesta Docentes.

| Opciones | Fa | Fr | Porcentaje |
|---|---|---|---|
| **Siempre** | 0 | 0 | 0% |
| **Frecuentemente** | 0 | 0 | 0% |
| **Pocas veces** | 1 | 0,12 | 12% |
| **Nunca** | 8 | 0,88 | 88% |
| **Total** | 9 | 1 | 100% |

**Fuente:** Encuesta a Docentes

**Elaborado por:** Investigador.

**Uso y manejo de la aplicación informática MAPLE en el IST-SECAP**

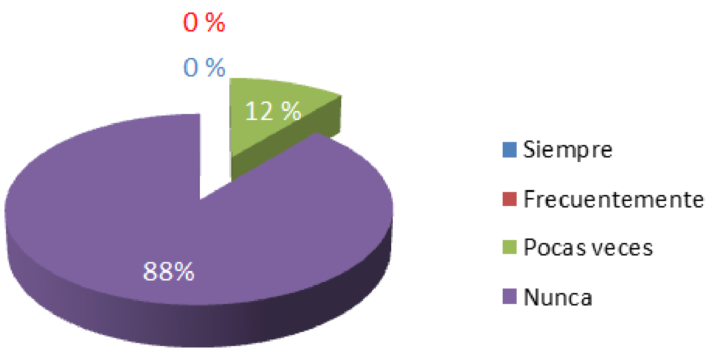



**Gráfico Nº 12; Pregunta. N° 6;** Encuesta - Dirigido a Docentes

**Elaborado por:** El investigador.

### Análisis e interpretación.

El 88% de los no conocen la aplicación MAPLE para el desarrollo de solución de ejercicios matemáticos y un 12% conocen muy poco.

Esto nos indica 88% de docentes requiere de actualización de conocimiento en el uso de TIC aplica a la resolución de ejercicios de Cálculo y de otras áreas.

### 7. ¿Utiliza las TIC para el proceso de enseñanza aprendizaje de Cálculo I?

**Cuadro Nº 11:** Maneja alternativas informáticas en la resolución matemática de problemas de Cálculo I, Encuesta Docentes

| Opciones | Fa | Fr | Porcentaje |
|---|---|---|---|
| **Siempre** | 0 | 0 | 0% |
| **Frecuentemente** | 0 | 0 | 0% |
| **Pocas veces** | 2 | 0,22 | 22% |
| **Nunca** | 7 | 0,78 | 78% |
| **Total** | 9 | 1 | 100% |

**Fuente:** Encuesta a Docentes

**Elaborado por:** Investigador.

**Manejo de alternativas informáticas en la resolución matemática de problemas de Cálculo I**

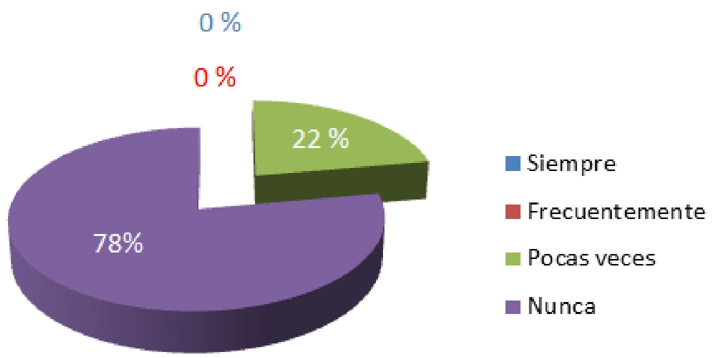



**Gráfico Nº13; Pregunta. N° 7;** Encuesta - Dirigido a Docentes

**Elaborado por:** El investigador.

**Análisis e interpretación.**

El 78% de los docentes no aplican las TIC para el desarrollo del PEA y un 22% conocen muy poco.

Esto nos indica 78% de docentes requiere de actualización de conocimiento en el uso de TIC aplicada a la resolución de ejercicios de Cálculo I.

**8. ¿Considera que con la implementación de un aula interactiva el proceso enseñanza-aprendizaje va a mejorar en el plantel?**

**Cuadro Nº 12:** Aumento del proceso de enseñanza aprendizaje con la implementación de un aula interactiva, Encuesta Docentes

| Opciones | Fa | Fr | Porcentaje |
|---|---|---|---|
| **Siempre** | 3 | 0,33 | 33% |
| **Frecuentemente** | 3 | 0,33 | 33% |
| **Pocas veces** | 2 | 0,22 | 22% |
| **Nunca** | 1 | 0,12 | 12% |
| **Total** | 9 | 1 | 100% |

**Fuente:** Encuesta a Docentes

**Elaborado por:** Investigador.

**Mejora del proceso de enseñanza con la implementación de una aula interactiva de Cálculo I.**

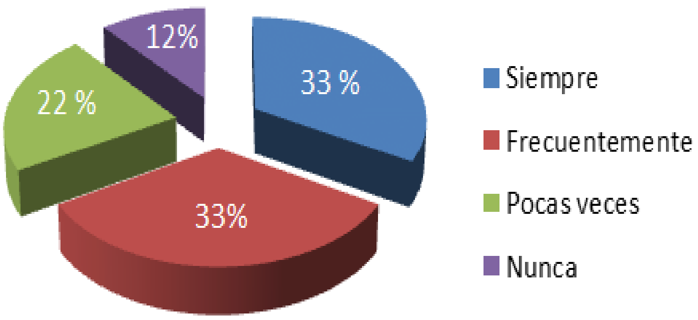



**Gráfico Nº 14; Pregunta. N° 8;** Encuesta - Dirigido a Docentes

**Elaborado por:** El investigador.

**Análisis e interpretación.**

Al ser el 33% siempre y 33% de frecuentemente son dos posiciones que considera que esta si mejoraría el proceso de enseñanza aprendizaje con la implementación del aula interactiva.

Mientras que 12 % de los docentes que no aplica para la mejora de este tipo de materia.

**9. ¿Cuál sería su grado de participación en la elaboración de los contenidos programáticos y analíticos para ser usados en el aula interactiva en el IST-SECAP?**

**Cuadro Nº 13:** Aceptación de los docentes a la generación de contenidos para el desarrollo de actividades en el uso del aula interactiva.

| Opciones | Fa | Fr | Porcentaje |
|---|---|---|---|
| **Siempre** | 0 | 0 | 0% |
| **Frecuentemente** | 2 | 0,22 | 22% |
| **Pocas veces** | 3 | 0,33 | 33% |
| **Nunca** | 4 | 0,45 | 45% |
| **Total** | 9 | 1 | 100% |

**Fuente:** Encuesta a Docentes

**Elaborado por:** Investigador.

**Mejora del proceso de enseñanza con la implementación de una aula interactiva de Cálculo I.**

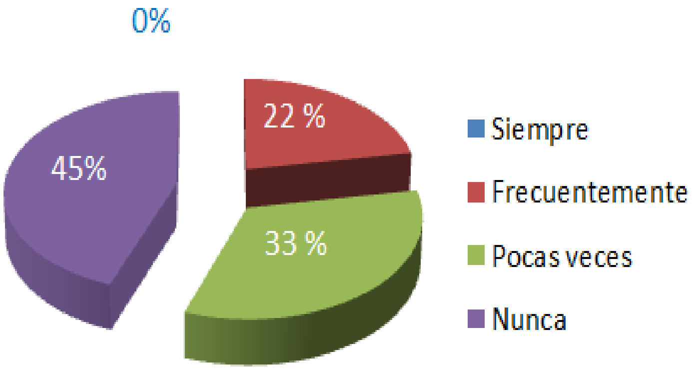



**Gráfico N°15; Pregunta. N° 9;** Encuesta - Dirigido a Docentes

**Elaborado por:** El investigador.

**Análisis e interpretación.**

Al ser el 45% de los docentes no están dispuestos a mejorar los contenidos adaptando y colaborando con nuevas formas para impartir sus clases

Mientras que 22 % de los cree que en la innovación radica el mejoramiento de habilidades cognitivas de sus alumnos.

**10. ¿En su clase se apoya con otros paquetes informáticos que no hemos mencionado aquí?**

**Cuadro Nº 14:** Utilización de programas computacionales que no se han tratado en esta investigación.

| Opciones | Fa | Fr | Porcentaje |
|---|---|---|---|
| **Siempre** | 0 | 0 | 0% |
| **Frecuentemente** | 1 | 0,12 | 12% |
| **Pocas veces** | 2 | 0,22 | 22% |
| **Nunca** | 6 | 0,66 | 66% |
| **Total** | 9 | 1 | 100% |

**Fuente:** Encuesta a Docentes

**Elaborado por:** Investigador.

**Utilización de programas computacionales que no se han tratado en esta investigación.**

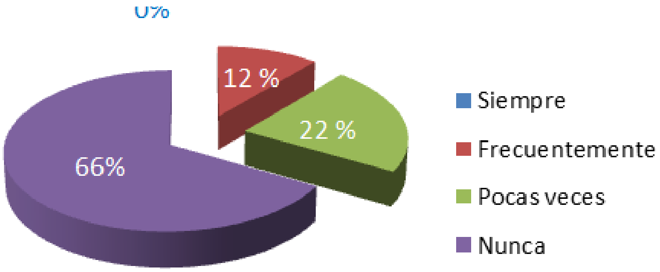



**Gráfico Nº 16; Pregunta. N° 10;** Encuesta - Dirigido a Docentes

**Elaborado por:** El investigador.

**Análisis e interpretación.**

El 66% de los docentes no conocen y no aplican nuevos paquetes informáticos, para mejorar el desarrollo de su clase.

Mientras que 22 % de los cree que si se debe mejorar con nuevos paquetes de simulación.

## 4.2. ENCUESTA DIRIGIDA A LOS ESTUDIANTES

**1. ¿Mejora y cambia el proceso enseñanza-aprendizaje en el IST SECAP el método colaborativo de enseñanza?**

**Cuadro Nº15:** Recursos didácticos como la PDI para la enseñanza de asignatura de Cálculo I.

| Opciones | Fa | Fr | Porcentaje |
|---|---|---|---|
| **Siempre** | 0 | 0 | 0% |
| **Frecuentemente** | 1 | 0,12 | 12% |
| **Pocas veces** | 3 | 0,33 | 33% |
| **Nunca** | 5 | 0,55 | 55% |
| **Total** | 9 | 1,00 | 100% |

**Fuente:** Encuesta a Docentes

**Elaborado por:** Investigador.

**Cambio en el proceso de enseñanza aprendizaje con el método**

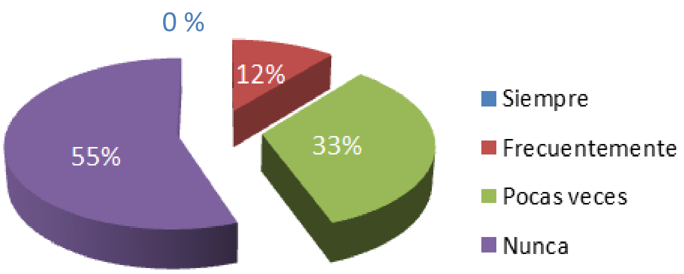



**Gráfico Nº17; Pregunta. N° 1;** Encuesta - Dirigido a Docentes

**Elaborado por:** El investigador.

**Análisis e interpretación.**

Los docentes del área de matemáticas considera que el 55% nunca, mejorara el proceso colaborativo al impartir el módulo de Cálculo I, ya que el 33% considera pocas veces sea útil esta metodología didáctica y el 12 % considera que el uso frecuente de esta didáctica mejora el aprendizaje.

Por lo tanto, la aplicación de esta metodología está relacionada 55 % que no mejorara el proceso de enseñanza aprendizaje.

**2. ¿Dentro del Proceso Enseñanza-aprendizaje permite la construcción del conocimiento a los propios estudiantes a través de la comunicación de la información que usted realiza?**

**Cuadro Nº 16**: Procesos Interactivos empleados en el IST-SECAP – Encuesta Docentes.

| Opciones | Fa | Fr | Porcentaje |
|---|---|---|---|
| **Siempre** | 0 | 0 | 0% |
| **Frecuentemente** | 0 | 0 | 0% |
| **Pocas veces** | 3 | 0,33 | 33% |
| **Nunca** | 6 | 0,67 | 67% |
| **Total** | 9 | 1 | 100% |

**Fuente:** Encuesta a Docentes

**Elaborado por:** Investigador.

**Procesos Interactivos empleados en el IST-SECAP**

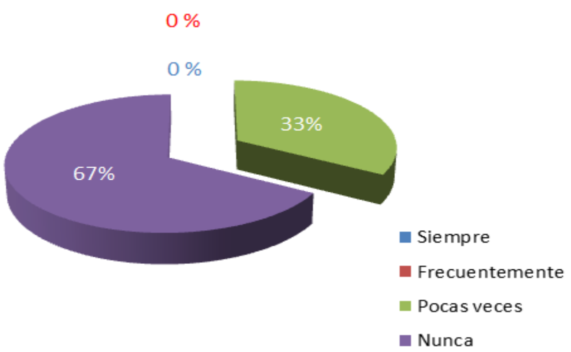



**Gráfico Nº18; Pregunta. N° 2;** Encuesta - Dirigido a Docentes

**Elaborado por:** El investigador.

**Análisis e interpretación.**

El 67% de los docentes no aplican recursos tecnológicos como parte de la didáctica del aula, mientras que al 33% pocas veces lo utiliza.

Según los resultados obtenidos se deduce que al 67% de maestros no han cambiado su forma de dictar el módulo, hay que fomentar el desarrollo tecnológico y participativo de los estudiantes y docentes.

**3. ¿Mediante la adquisición de conocimiento, el estudiante está en la capacidad de resolver situaciones problemáticas de su medio?**

**Cuadro Nº 17**: Conoce si existe equipos PDI, en el IST-SECAP Encuesta Docentes.

| Opciones | Fa | Fr | Porcentaje |
|---|---|---|---|
| **Siempre** | 0 | 0 | 0% |
| **Frecuentemente** | 1 | 0,11 | 11% |
| **Pocas veces** | 2 | 0,23 | 23% |
| **Nunca** | 6 | 0,66 | 66% |
| **Total** | 9 | 1 | 100% |

**Fuente:** Encuesta a Docentes
**Elaborado por:** Investigador.

**Conocimiento del recurso tecnológico PDI en el IST-**

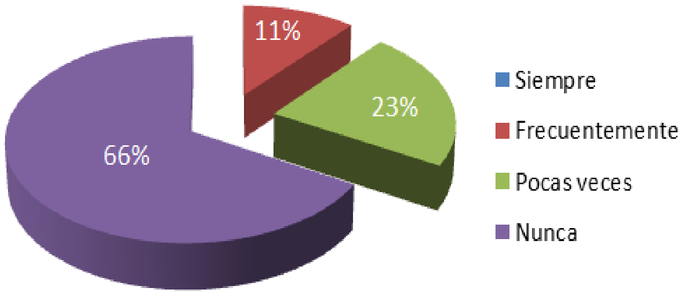



**Gráfico Nº19 ; Pregunta. N° 3;** Encuesta - Dirigido a Docentes.

**Elaborado por:** El investigador.

**Análisis e interpretación.**

El 66% de docentes analiza que los estudiantes no aplican sus conocimientos en el desarrollo de problemas prácticas y el 23% pocas veces lo aplica, y el 11% su aplicación es frecuente en la solución de los mismos.

Según el análisis obtenido se deduce que al 66% de maestros no ha utilizado este recurso cognitivo propositivo orientado a la aplicación en problemas prácticos de la especialidad.

**4. ¿Realiza grupos de trabajo para motivar el aprendizaje colaborativo en los estudiantes?**

**Cuadro Nº18**: Está capacitado para el uso y manejo de equipos PDI, en el IST-SECAP -Encuesta Docentes.

| Opciones | Fa | Fr | Porcentaje |
|---|---|---|---|
| **Siempre** | 2 | 0,22 | 22% |
| **Frecuentemente** | 3 | 0,33 | 33% |
| **Pocas veces** | 4 | 0,45 | 45% |
| **Nunca** | 0 | 0 | 0% |
| **Total** | 9 | 1 | 100% |

**Fuente:** Encuesta a Docentes

**Elaborado por:** Investigador.

**Nivel de conocimiento teórico practico del equipo PDI en el IST-SECAP**

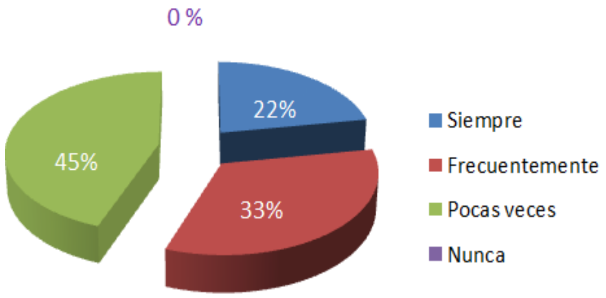



**Gráfico Nº20; Pregunta. N° 4;** Encuesta - Dirigido a Docentes.

**Elaborado por:** El investigador.

**Análisis e interpretación.**

El 45% de los docentes no utiliza como parte de la didáctica de clase el uso de grupos de trabajo, mientras 22% siempre han utilizado como parte del método colaborativo del proceso de enseñanza aprendizaje, y el 33% frecuentemente lo hace.

Por lo cual, luego de procesamiento de la información el 33% de los docentes aplica frecuentemente nuevas formas de didáctica en la enseñanza de Cálculo I.

**5. ¿Apoya el desarrollo de ejercicios explicativos por parte de los estudiantes como tarea?**

**Cuadro Nº 19**: Aplicación de software especializado para cálculos matemáticos, en el IST-SECAP -Encuesta Docentes.

| Opciones | Fa | Fr | Porcentaje |
|---|---|---|---|
| **Siempre** | 0 | 0 | 0% |
| **Frecuentemente** | 0 | 0 | 0% |
| **Pocas veces** | 5 | 0,55 | 55% |
| **Nunca** | 4 | 0,45 | 45% |
| **Total** | 9 | 1 | 100% |

**Fuente:** Encuesta a Docentes

**Elaborado por:** Investigador.

**Utilización de software especializado en la resolución de problemas matemáticos en el IST-SECAP**

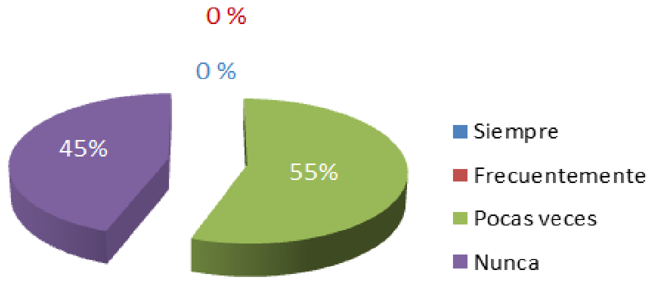



**Gráfico N°21 ; Pregunta. N° 5;** Encuesta - Dirigido a Docentes

**Elaborado por:** El investigador.

**Análisis e interpretación.**

El 45% de los docentes nunca apoya la exposición de ejercicios como parte de tareas en clases, mientras que el 55% de los docentes pocas veces apoyan esta técnica pedagógica.

El 55% de los docentes no apoyan la presentación de ejercicios prácticos como parte de las tareas desarrolladas en clase.

**6. ¿Considera que existen las condiciones básicas indispensables para implementar el proceso interactivo educativo?**

**Cuadro Nº 20**: Conoce y maneja el programa de resolución matemático MAPLE, Encuesta Docentes.

| Opciones | Fa | Fr | Porcentaje |
|---|---|---|---|
| **Siempre** | 0 | 0 | 0% |
| **Frecuentemente** | 0 | 0 | 0% |
| **Pocas veces** | 1 | 0,12 | 12% |
| **Nunca** | 8 | 0,88 | 88% |
| **Total** | 9 | 1 | 100% |

**Fuente:** Encuesta a Docentes

**Elaborado por:** Investigador.

**Uso y manejo de la aplicación informática MAPLE en el IST-SECAP**

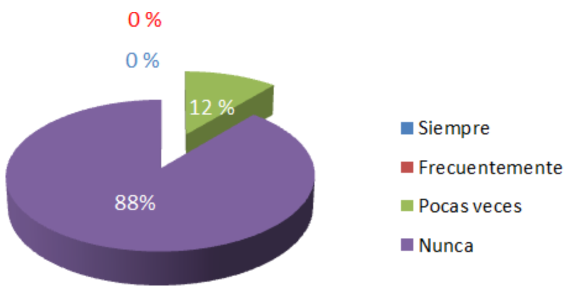



**Gráfico Nº 22; Pregunta. N° 6;** Encuesta - Dirigido a Docentes

**Elaborado por:** El investigador.

### Análisis e interpretación.

El 88% de los académicos considera que no existe las condiciones básicas para la implementación del proceso de aulas interactivas como parte regular del curso de Cálculo I, esto nos indica que el trabajo de investigación busca la aplicación de técnicas y normas del proceso e enseñanza aprendizaje más actuales acorde a los nuevos desarrollo tecnológicos.

### 7. ¿Con la herramienta informática MAPLE ha mejorado el aprendizaje del Cálculo?

**Cuadro Nº 21**: Maneja alternativas informáticas en la resolución matemática de problemas de Cálculo I, Encuesta Docentes

| Opciones | Fa | Fr | Porcentaje |
|---|---|---|---|
| **Siempre** | 2 | 0,22 | 22% |
| **Frecuentemente** | 2 | 0,22 | 22% |
| **Pocas veces** | 2 | 0,22 | 22% |
| **Nunca** | 3 | 0,34 | 34% |
| **Total** | 9 | 1 | 100% |

**Fuente:** Encuesta a Docentes

**Elaborado por:** Investigador.

**Manejo de alternativas informáticas en la resolución matemática de problemas de Cálculo I**

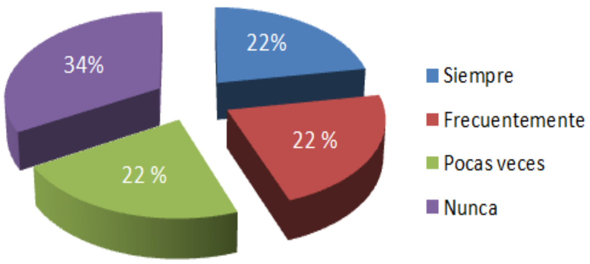



**Gráfico Nº23 ; Pregunta. N° 7;** Encuesta - Dirigido a Docentes

**Elaborado por:** El investigador.

**Análisis e interpretación.**

El 88% de los no conocen la aplicación MAPLE para el desarrollo de solución de ejercicios matemáticos y un 12% conocen muy poco.

Esto nos indica 88% de docentes requiere de actualización de conocimiento en el uso de TIC aplica a la resolución de ejercicios de Cálculo y de otras áreas.

8. **¿El estudiante mejora su aprovechamiento con el proceso de enseñanza colaborativa?**

**Cuadro Nº 22:** Aumento del proceso de enseñanza aprendizaje con la implementación de un aula interactiva, Encuesta Docentes

| Opciones | Fa | Fr | Porcentaje |
|---|---|---|---|
| **Siempre** | 1 | 0,11 | 11% |
| **Frecuentemente** | 2 | 0,22 | 22% |
| **Pocas veces** | 2 | 0,22 | 22% |
| **Nunca** | 3 | 0,35 | 35% |
| **Total** | 9 | 1 | 100% |

**Fuente:** Encuesta a Docentes

**Elaborado por:** Investigador.

**Mejora del proceso de enseñanza con la implementación de una aula interactiva de Cálculo I.**

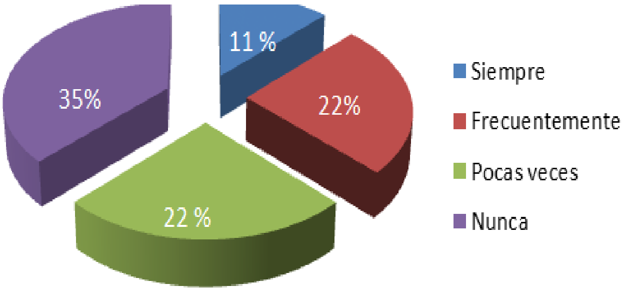



**Gráfico Nº24; Pregunta. N° 8;** Encuesta - Dirigido a Docentes

**Elaborado por:** El investigador.

**Análisis e interpretación.**

El 35% de los docentes consideran que nunca este proceso mejorara, mientras que 65% dice que si mejora a otras de las variables siempre, frecuentemente, pocas veces. Por tanto el proceso si surte efecto en la enseñanza colaborativa del módulo de cálculo I.

**9. ¿El estudiante es competente luego del curso de formación de Cálculo I con la asistencia de recursos (PDI)?**

**Cuadro Nº23**: Aceptación de los docentes a la generación de contenidos para el desarrollo de actividades en el uso del aula interactiva.

| Opciones | Fa | Fr | Porcentaje |
|---|---|---|---|
| **Siempre** | 1 | 0,12 | 12% |
| **Frecuentemente** | 4 | 0,44 | 44% |
| **Pocas veces** | 4 | 0,44 | 44% |
| **Nunca** | 0 | 0 | 0% |
| **Total** | 9 | 1 | 100% |

**Fuente:** Encuesta a Docentes.

**Elaborado por:** Investigador.

**Mejora del proceso de enseñanza con la implementación de una aula interactiva de Cálculo I.**

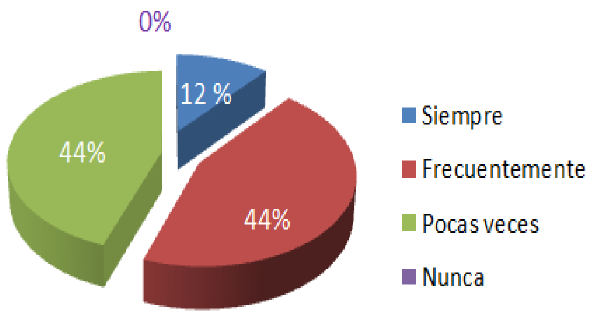



**Gráfico Nº 25; Pregunta. N° 9;** Encuesta - Dirigido a Docentes

**Elaborado por:** El investigador.

### Análisis e interpretación.

Al ser el 88% de los docentes considera que el apoyo del PDI como herramienta aplicable en la explicación detallada de clases se a efectiva. (Análisis de las variables: pocas y nunca)

Mientras que 12 % de los docentes, comparten que la innovación tecnológica es el mejoramiento de destrezas y habilidades cognitivas para con sus alumnos.

### 10. ¿Desarrolla el portafolio Académico?

**Cuadro Nº 24:** Utilización de programas computacionales que no se han tratado en esta investigación.

| Opciones | Fa | Fr | Porcentaje |
|---|---|---|---|
| **Siempre** | 0 | 0 | 0% |
| **Frecuentemente** | 0 | 0 | 0% |
| **Pocas veces** | 0 | 0 | 0% |
| **Nunca** | 9 | 1 | 100 |
| **Total** | 9 | 1 | 100% |

**Fuente:** Encuesta a Docentes

**Elaborado por:** Investigador.

**Utilización de programas computacionales que no se han tratado en esta investigación.**

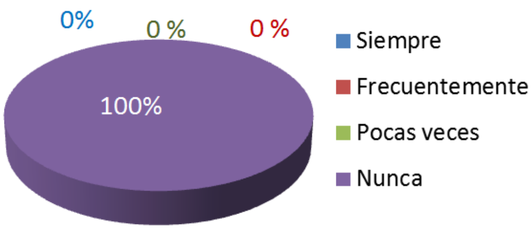



**Gráfico Nº26; Pregunta. N° 10;** Encuesta - Dirigido a Docentes

**Elaborado por:** El investigador.

**Análisis e interpretación.**

El 100% de los docentes no aplica el portafolio académico sin embargo debo manifestar que el portafolio es un método de enseñanza aprendizaje y de evaluación que consiste en la aportación de resultados, estudios, y análisis de diferente índole por parte del estudiante.

**4.3. Encuesta dirigida a estudiantes.**

**1. ¿Con el actual proceso enseñanza-aprendizaje considera que usted está en la capacidad de resolver los diferentes problemas que se enfrenta en el medio?**

**Cuadro Nº25:** Proceso enseñanza-aprendizaje muestra la capacidad de resolver los diferentes problemas que se enfrenta en el medio

| Opciones | Fa | Fr | Porcentaje |
|---|---|---|---|
| **Siempre** | 0 | 0 | 0% |
| **Frecuentemente** | 13 | 0,16 | 16% |
| **Pocas veces** | 27 | 0,34 | 34% |
| **Nunca** | 40 | 0,500 | 50% |
| **Total** | 80 | 1,00 | 100% |

**Fuente:** Encuesta a Estudiantes

**Elaborado por:** Investigador.

**Proceso enseñanza-aprendizaje porcentaje de capacidad para resolver los diferentes problemas que se enfrenta en el medio**

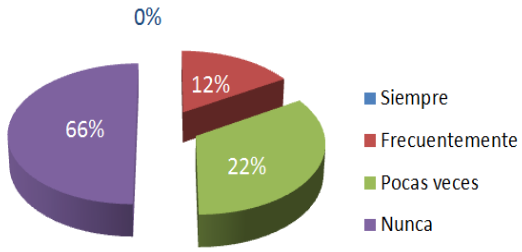



**Gráfico Nº27; Pregunta. N° 1;** Encuesta - Dirigido a Estudiantes.

**Elaborado por:** El investigador.

**Análisis e interpretación.**

Realizado el levantamiento de información de la muestra de 80 estudiantes de la Carrera de Electricidad y Electrónica Industrial de segundo año del IST- SECAP se encuentra que el 66% de los estudiantes encuestados nunca estarán de acuerdo con el proceso de enseñanza aprendizaje actual el mismo que sirve para resolver problemas de su entorno, y el 12% de los encuestados exponen que el actual proceso de enseñanza si ayuda a resolver problemas de la Carrera.

Conforme al estudio del análisis de los datos obtenidos en la muestra observamos que es importante y necesario que la gestión académica del docente, debe innovar su metodología de acuerdo a la tecnología.

**2. ¿Le participa del contenido de la materia en formato digital (presentaciones) los maestros?**

**Cuadro Nº 26**: Participación del contenido de la materia en formato digital

**IST-SECAP – Encuesta Estudiantes**

| Opciones | Fa | Fr | Porcentaje |
|---|---|---|---|
| **Siempre** | 5 | 0,06 | 6% |
| **Frecuentemente** | 26 | 0,33 | 33% |
| **Pocas veces** | 34 | 0,42 | 42% |
| **Nunca** | 15 | 0,19 | 19% |
| **Total** | 80 | 1 | 100% |

**Fuente:** Encuesta a Estudiantes

**Elaborado por:** Investigador.

**Participación del contenido de la materia en formato digital**

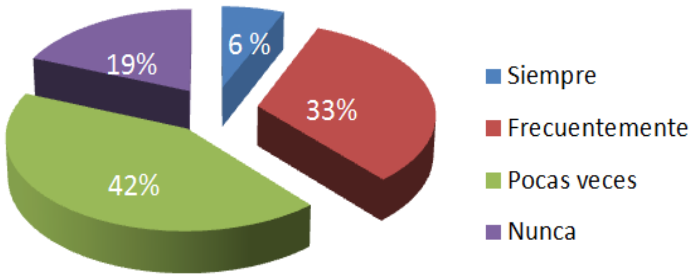



**Gráfico Nº28 ; Pregunta. N° 2;** Encuesta - Dirigido a Estudiantes.

**Elaborado por:** El investigador.

**Análisis e interpretación.**

El 42% de los estudiantes no participan de la comunicación del contenido en formato digital de parte de los docentes, el 6% de los mismos manifiesta que si obtienen la información de módulo de Cálculo I en formato digital.

Es necesario manifestar que debe haber un cambio en las políticas institucionales, relacionadas con la docencia y el proceso e enseñanza aprendizaje.

**3. ¿En la clase de Cálculo I, cuando desarrollan talleres de aprendizaje colaborativo logra comprender y mejora su comprensión de los ejercicios planteados?**

**Cuadro Nº 27:** Aprendizaje colaborativo logra comprender y mejora su comprensión

| Opciones | Fa | Fr | Porcentaje |
|---|---|---|---|
| **Siempre** | 31 | 0,39 | 39% |
| **Frecuentemente** | 21 | 0,26 | 26% |
| **Pocas veces** | 16 | 0,20 | 20% |
| **Nunca** | 12 | 0,15 | 15% |
| **Total** | 80 | 1 | 100% |

**Fuente:** Encuesta a Estudiantes

**Elaborado por:** Investigador.

**Aprendizaje colaborativo logra comprender y mejora su comprensión**

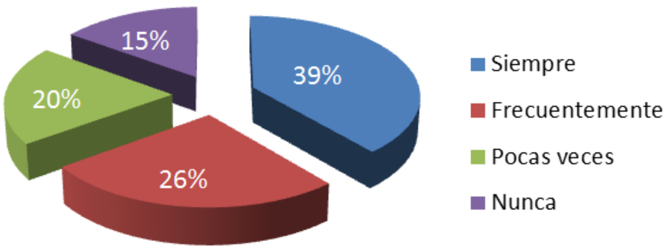



**Gráfico Nº29 ; Pregunta. N° 3;** Encuesta - Dirigido a Estudiantes.

**Elaborado por:** El investigador.

**Análisis e interpretación.**

El 39% de los estudiantes opina que el desarrollo de talleres de aprendizaje mediante el proceso colaborativo logra comprender y mejorar los ejercicios planteados por el docente, mientras que el 15 % nunca creerá que este metodología pedagógica le ayuda a comprender y resolver los ejercicios.

Por lo tanto los estudiantes creen que más del 50%, de este método colaborativo influye de manera positiva en el aprendizaje.

**4. ¿Se mejora las competencias con las clases en el sistema colaborativo (Conocimiento, Habilidades, Valores)?**

**Cuadro Nº 28**: El sistema colaborativo mejora las competencias **(Conocimiento, Habilidades, Valores)**

| Opciones | Fa | Fr | Porcentaje |
|---|---|---|---|
| **Siempre** | 17 | 0,21 | 21\|% |
| **Frecuentemente** | 41 | 0,51 | 51% |
| **Pocas veces** | 14 | 0,18 | 18% |
| **Nunca** | 8 | 0,10 | 10% |
| **Total** | 80 | 1 | 100% |

**Fuente:** Encuesta a Estudiantes

**Elaborado por:** Investigador.

**El sistema colaborativo mejora las competencias (Conocimiento, Habilidades, Valores)**

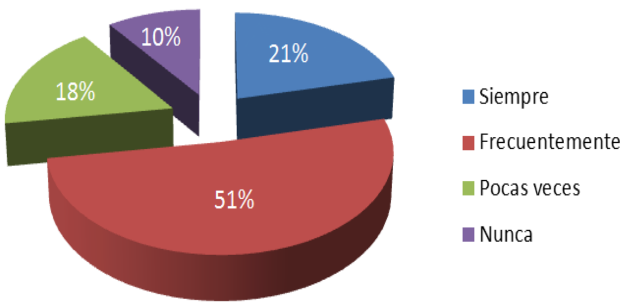



**Gráfico Nº30; Pregunta. N° 4;** Encuesta - Dirigido a Estudiantes.

**Elaborado por:** El investigador.

**Análisis e interpretación.**

El 51% de los estudiantes opina que siempre han mejorado sus competencias en el módulo Cálculo I, y el 10% opina que nunca mejoraría sus conocimientos destrezas y habilidades en la asignatura. Por tanto, consideramos que la implementación del proceso colaborativa su aplicación es positiva para el desarrollo cognoscitivo del estudiante.

**5. ¿Despierta en ti el proceso de investigación que un docente plantee nuevas formas de enseñanza)?**

**Cuadro Nº 29**: Grado de investigación en las estudiantes al plantear nuevas formas de enseñanza.

| Opciones | Fa | Fr | Porcentaje |
|---|---|---|---|
| **Siempre** | 49 | 0,61 | 61% |
| **Frecuentemente** | 17 | 0,21 | 21% |
| **Pocas veces** | 12 | 0,15 | 15% |
| **Nunca** | 2 | 0,03 | 3% |
| **Total** | 80 | 1 | 100% |

**Fuente:** Encuesta a Estudiantes
**Elaborado por:** Investigador.

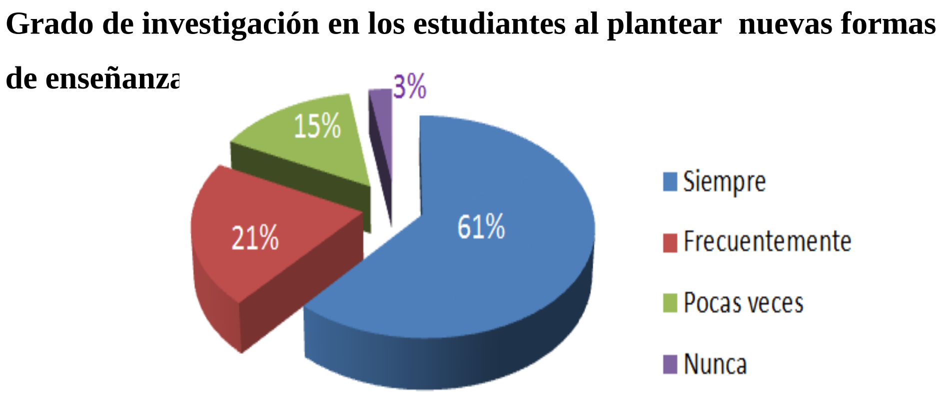



**Gráfico Nº31; Pregunta. N° 5;** Encuesta - Dirigido a Estudiantes.
**Elaborado por:** El investigador.

**Análisis e interpretación.**

El 61% de los estudiantes siempre se sienten motivados a investigar cada vez que un docente plantea nuevas formas de enseñanza, y el 3% dice que no es un factor para motivar el proceso investigativo.

La gran mayoría que supera el 82% considera que el proceso de enseñanza aprendizaje innovador crea expectativas e interés en el desarrollo de la investigación.

**6. ¿Elaboras algún cuaderno de apuntes o folio estudiantil de la materia?**

**Cuadro Nº 30:** Elaboración de cuaderno de apuntes o folio estudiantil de la materia

| Opciones | Fa | Fr | Porcentaje |
|---|---|---|---|
| **Siempre** | 51 | 0,64 | 64% |
| **Frecuentemente** | 19 | 0,24 | 24% |
| **Pocas veces** | 6 | 0,07 | 7% |
| **Nunca** | 4 | 0,05 | 5% |
| **Total** | 80 | 1 | 100% |

**Fuente:** Encuesta a Estudiantes

**Elaborado por:** Investigador.

**Elaboración de cuaderno de apuntes o folio estudiantil de la materia**

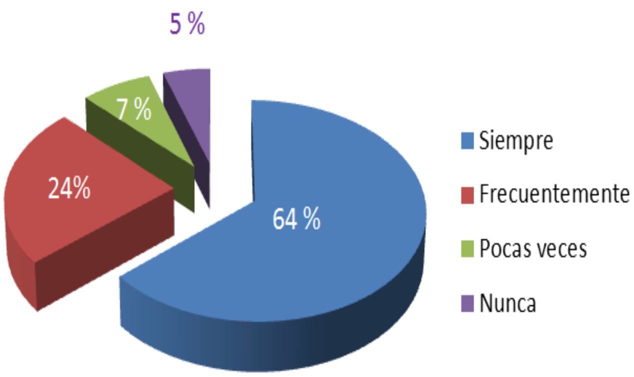



**Gráfico Nº 32; Pregunta. N° 6;** Encuesta - Dirigido a Estudiantes.

**Elaborado por:** El investigador.

**Análisis e interpretación.**

El 64% de los alumnos si elaboran un cuaderno de apuntes y un 5% no lo hace.

Por lo tanto es necesaria la comunicación de esta técnica para que todos los estudiantes lleguen a practicarlo y más aún generar el portafolio estudiantil.

**7. ¿Cree usted que en el IST-SECAP se debe implementar aulas con sistemas PDI?**

**Cuadro Nº 31**: Implementación de aulas con sistemas PDI en el IST-SECAP.

| Opciones | Fa | Fr | Porcentaje |
|---|---|---|---|
| **Siempre** | 61 | 0,76 | 76% |
| **Frecuentemente** | 15 | 0,19 | 19% |
| **Pocas veces** | 4 | 0,05 | 5% |
| **Nunca** | 0 | 0 | 0% |
| **Total** | 80 | 1 | 100% |

**Fuente:** Encuesta a Estudiantes

**Elaborado por:** Investigador

**Implementación de aulas con sistemas PDI en el IST-SECAP**

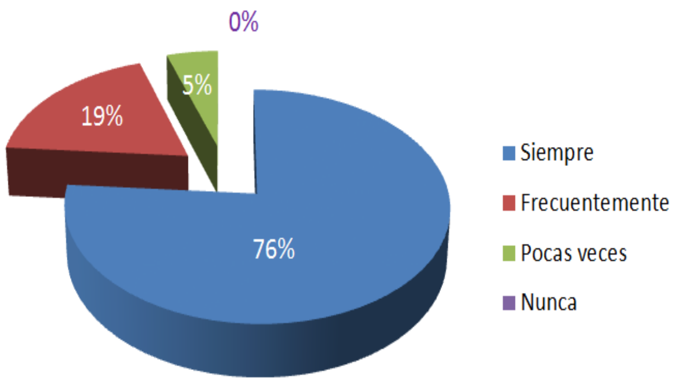



**Gráfico Nº33 ; Pregunta. N° 7;** Encuesta - Dirigido a Estudiantes.

**Elaborado por:** El investigador.

**Análisis e interpretación.**

El 76% de los estudiantes considera que se debe instalar PDI en las aulas del IST-SECAP para mejorar el PEA, y un 5% de la muestra considera que no es necesario sin embargo debemos manifestar ante este mínimo resultado que la institución debe socializar la técnica para adquirir un mejor conocimiento.

8. **¿Con que frecuencia utiliza la pizarra y la tiza liquida en el dictado de Cálculo I?**

**Cuadro Nº 32:** Utilización de la pizarra y la tiza liquida en el dictado de Cálculo I.

| Opciones | Fa | Fr | Porcentaje |
|---|---|---|---|
| **Siempre** | 80 | 1 | 100% |
| **Frecuentemente** | 0 | 0 | 0% |
| **Pocas veces** | 0 | 0 | 0% |
| **Nunca** | 0 | 0 | 0% |
| **Total** | 80 | 1 | 100% |

**Fuente:** Encuesta a Estudiantes

**Elaborado por:** Investigador.

**Utilización de la pizarra y la tiza liquida en el dictado de Cálculo I.**

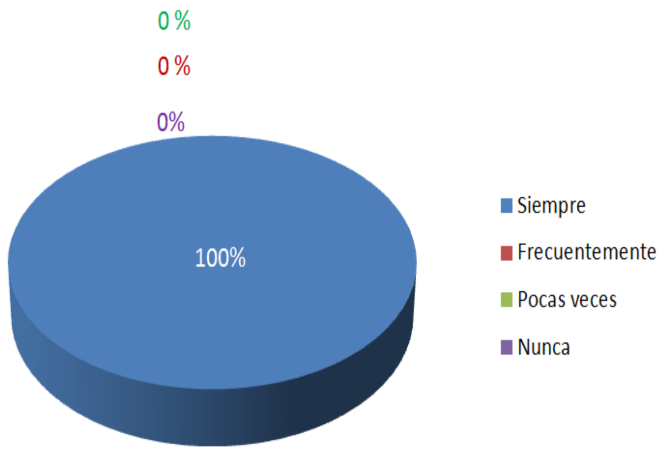



**Gráfico Nº 34 ; Pregunta. N° 8;** Encuesta - Dirigido a estudiantes

**Elaborado por:** El investigador.

**Análisis e interpretación.**

Al ser el 100% de los estudiantes, que manifiesta la utilización del método tradicional, para mejorar la efectividad o eficiencia de los recursos didácticos consideramos la aplicación de un nuevo método para dictar clases como son apuntes digitales.

**9. ¿Con la herramienta informática MAPLE ha mejorado su aprendizaje del Cálculo?**

**Cuadro Nº 33:** Utilización del programa MAPLE ha mejorado su aprendizaje del Cálculo

| Opciones | Fa | Fr | Porcentaje |
|---|---|---|---|
| **Siempre** | 19 | 0,24 | 24% |
| **Frecuentemente** | 20 | 0,25 | 25% |
| **Pocas veces** | 17 | 0,21 | 21% |
| **Nunca** | 24 | 0,30 | 30% |
| **Total** | 80 | 1 | 100% |

**Fuente:** Encuesta a Estudiantes

**Elaborado por:** Investigador.

**Utilización del programa MAPLE ha mejorado su aprendizaje del Cálculo**

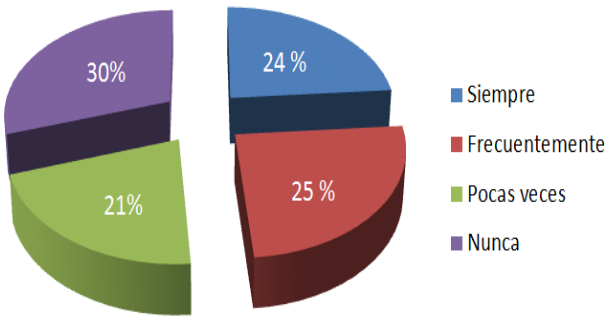



**Gráfico Nº 35 ; Pregunta. N° 9;** Encuesta - Dirigido a Estudiantes.

**Elaborado por:** El investigador.

**Análisis e interpretación.**

El 30% de los encuestados sostienen que nunca estrían de acuerdo en la utilización del software, ya que su grado de complejidad para resolver los ejercicios propuestos por el docente.

Mientras que 49 % de los estudiantes involucrados en la comunidad educativa les resulta más fácil comprobar los valores desarrollados en sus tareas, con la aplicación de la herramienta informática.

**4.4. Encuesta dirigida a los Estudiantes relacionada a los objetivos específicos**

**1. ¿Conoce usted qué es la Pizarra Interactiva o también denominada (PDI)?**

**Cuadro Nº34:** Conoce usted qué es la Pizarra Interactiva o también denominada (PDI)

| Opciones | Fa | Fr | Porcentaje |
|---|---|---|---|
| **Siempre** | 0 | 0 | 0% |
| **Frecuentemente** | 10 | 0,13 | 13% |
| **Pocas veces** | 45 | 0,56 | 56% |
| **Nunca** | 25 | 0,31 | 31% |
| **Total** | 80 | 1,00 | 100% |

**Fuente:** Encuesta a Estudiantes.

**Conoce usted qué es la Pizarra Interactiva o también denominada (PDI)**

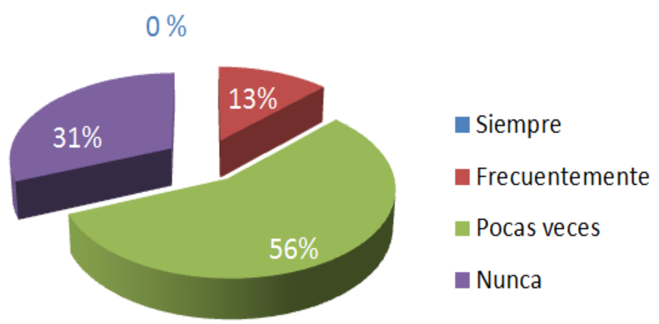



**Gráfico Nº36; Pregunta. N° 1;** Encuesta - Dirigido a Estudiantes.

**Elaborado por:** El investigador.

**Análisis e interpretación.**

Los estudiantes de la Carrera de Automatización y Control Industrial el 56% pocas veces han escuchado que es una PDI, y el 13% de los alumnos frecuentemente han escuchado pero no lo saben con precisión.

Por lo tanto, la implementación de este recurso tecnoeducativo es importante para mejorar la didáctica de las competencias educativas.

**2.¿Los docentes en sus clases utilizan recursos interactivos para la explicación de su materia?**

**Cuadro Nº 35:** Utilización de recursos interactivos para la explicación de su materia.

| Opciones | Fa | Fr | Porcentaje |
|---|---|---|---|
| **Siempre** | 0 | 0 | 0% |
| **Frecuentemente** | 12 | 0,15 | 15% |
| **Pocas veces** | 36 | 0,45 | 45% |
| **Nunca** | 32 | 0,40 | 40% |
| **Total** | 9 | 1 | 100% |

**Fuente:** Encuesta a Estudiantes.

**Elaborado por:** Investigador.

**Utilización de recursos interactivos para la explicación de su materia**

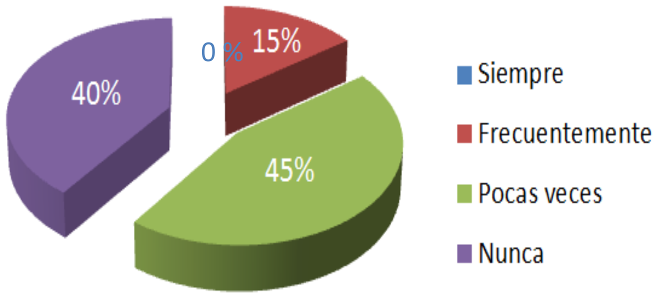



**Gráfico Nº37 ; Pregunta. N° 2;** Encuesta - Dirigido a Estudiantes.

**Elaborado por:** El investigador.

**Análisis e interpretación.**

El 45% de los estudiantes comentan que el docente utiliza recursos interactivos para el desarrollo de sus clases, y el 15% de los encuestados que los recursos interactivos lo utilizan con frecuencia. Ello implica que se debe facilitar de los docentes y de los estudiantes con la elaboración de talleres didácticos, para su implementación.

**3. ¿Existe implementos como pantallas táctiles o interactivas dentro de la institución?**

**Cuadro Nº 36:** Conoce si existe equipos PDI, en el IST-SECAP Encuesta-Estudiantes.

| Opciones | Fa | Fr | Porcentaje |
|---|---|---|---|
| **Siempre** | 0 | 0 | 0% |
| **Frecuentemente** | 6 | 0,07 | 7% |
| **Pocas veces** | 18 | 0,23 | 23% |
| **Nunca** | 56 | 0,70 | 70% |
| **Total** | 80 | 1 | 100% |

**Fuente:** Encuesta a Estudiantes.

**Elaborado por:** Investigador.

**Utilización de recursos interactivos para la explicación de su materia**

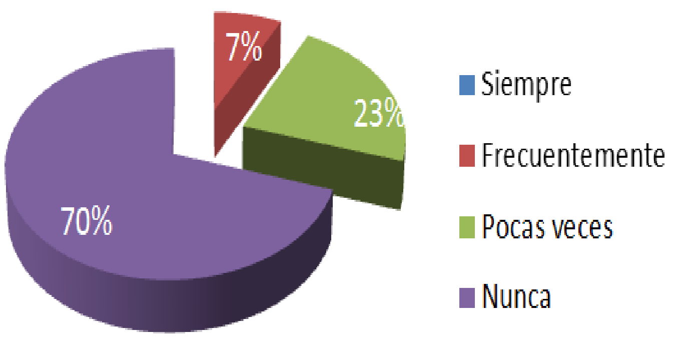



**Gráfico Nº38 ; Pregunta. N° 3;** Encuesta - Dirigido a Estudiantes.

**Elaborado por:** El investigador.

**Análisis e interpretación.**

El 70% de los encuestados manifiesta que nunca han tenido conocimiento de esta herramienta tecnoeducativa, y el 7% tienen conocimiento frecuente pero no conoce su aplicación.

Ello implica que se debe facilitar la participación de los docentes y los estudiantes en la conducción de talleres pedagógicos para su aplicación.

**4. ¿Los docentes de cálculo emplean los TIC como instrumentos para facilitar la comprensión de los nuevos conocimientos?**

**Cuadro Nº 37:** Uso de TIC como instrumentos para facilitar la comprensión de los nuevos conocimientos

| Opciones | Fa | Fr | Porcentaje |
|---|---|---|---|
| **Siempre** | 0 | 0 | 0% |
| **Frecuentemente** | 6 | 0,08 | 8% |
| **Pocas veces** | 21 | 0,26 | 26% |
| **Nunca** | 53 | 0,66 | 66% |
| **Total** | 9 | 1 | 100% |

**Fuente:** Encuesta a Estudiantes.

**Elaborado por:** Investigador.

**Uso de TIC como instrumentos para facilitar la comprensión de los nuevos conocimientos**

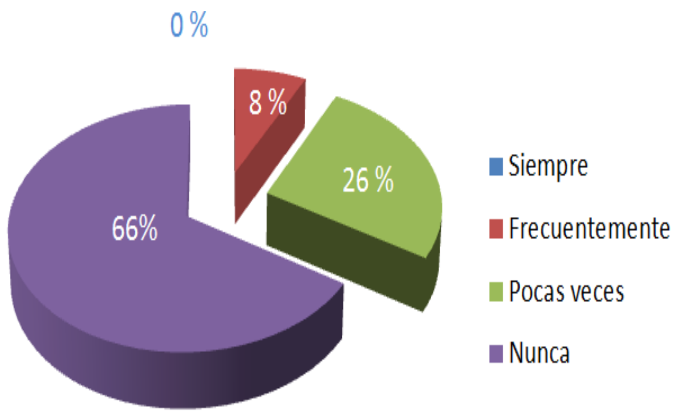



**Gráfico Nº39; Pregunta. N° 4;** Encuesta - Dirigido a Estudiantes.

**Elaborado por:** El investigador.

**Análisis e interpretación.**

El 66% de los estudiantes consideran que nunca se utiliza las TIC como instrumento facilitador del conocimiento, y el 8% frecuentemente tiene utiliza como parte del desarrollo normal de la clases.

Por lo cual, urge cursos de actualización de conocimientos en TIC a los estudiantes y maestros para mejorar su aplicación y difusión que permitan precisar unidades de competencia para el mejoramiento docente y dicente.

**5. ¿La tecnología acorta el tiempo en el desarrollo de tareas?**

**Cuadro Nº 38:** La tecnología acorta el tiempo en el desarrollo de tareas - Encuesta Estudiantes.

| Opciones | Fa | Fr | Porcentaje |
|---|---|---|---|
| **Siempre** | 49 | 0,61 | 61% |
| **Frecuentemente** | 22 | 0,28 | 28% |
| **Pocas veces** | 9 | 0,11 | 11% |
| **Nunca** | 0 | 0 | 0% |
| **Total** | 80 | 1 | 100% |

**Fuente:** Encuesta a Estudiantes.

**Elaborado por:** Investigador.

**La tecnología acorta el tiempo en el desarrollo de tareas -Encuesta Estudiantes.**

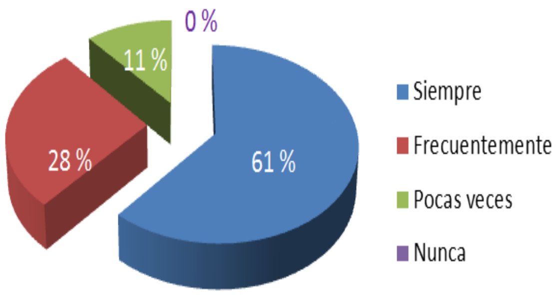



**Gráfico Nº40 ; Pregunta. N° 5;** Encuesta - Dirigido a Estudiantes.

**Elaborado por:** El investigador.

**Análisis e interpretación.**

El 61% de los  de los estudiantes siempre utilizan herramientas informáticas como apoyo a la resolución de ejercicios de Cálculo I, mientras que el 11% pocas veces lo utilizan.

Es necesario montar mecanismos organizados de información de nuevos  software especializado en la resolución de problemas matemáticos.

**6. ¿Luego de las evaluaciones comparas las respuestas utilizando software de resolución de ejercicios?**

**Cuadro Nº 39:** Comparas las respuestas utilizando software de resolución de ejercicios, Encuesta Estudiantes.

| Opciones | Fa | Fr | Porcentaje |
|---|---|---|---|
| **Siempre** | 0 | 0 | 0% |
| **Frecuentemente** | 58 | 0,72 | 72% |
| **Pocas veces** | 19 | 0,24 | 24% |
| **Nunca** | 3 | 0,04 | 4% |
| **Total** | 80 | 1 | 100% |

**Fuente:** Encuesta a Estudiantes.

**Elaborado por:** Investigador.

**Comparas las respuestas utilizando software de resolución de ejercicios**

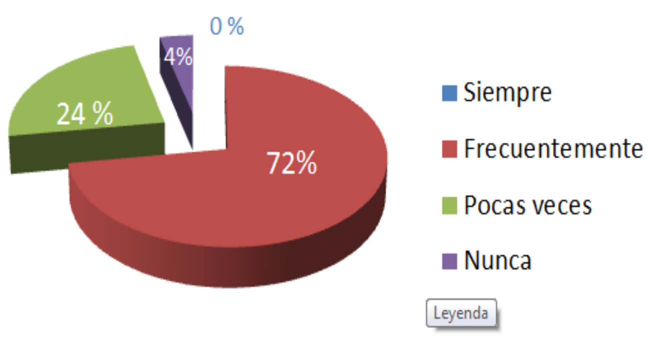



**Gráfico Nº 41; Pregunta. N° 6;** Encuesta - Dirigido a Estudiantes.

**Elaborado por:** El investigador.

**Análisis e interpretación.**

El 72% de los estudiantes frecuentemente utilizan como medio de validad sus procedimientos matemáticos programas de apoyo en la resolución de ejercicios; y el 4%dice que nunca utiliza el apoyo informático para validar sus respuestas.

Por lo que si se está utilizando tecnología actual por parte de los estudiantes en el desarrollo de la matemática, referido a la comprensión y análisis de los mismos

**7. ¿Siente mayor grado de interés por aprender con nuevos recursos tecnológicos en clases?**

**Cuadro Nº 40:** Interés por aprender con nuevos recursos tecnológicos en clases; Encuesta Estudiantes.

| Opciones | Fa | Fr | Porcentaje |
|---|---|---|---|
| **Siempre** | 71 | 0,89 | 89% |
| **Frecuentemente** | 8 | 0,1 | 10% |
| **Pocas veces** | 1 | 0,01 | 1% |
| **Nunca** | 0 | 0 | 0% |
| **Total** | 80 | 1 | 100% |

**Fuente:** Encuesta a Estudiantes.

**Elaborado por:** Investigador.

**Interés por aprender con nuevos recursos tecnológicos en clases**

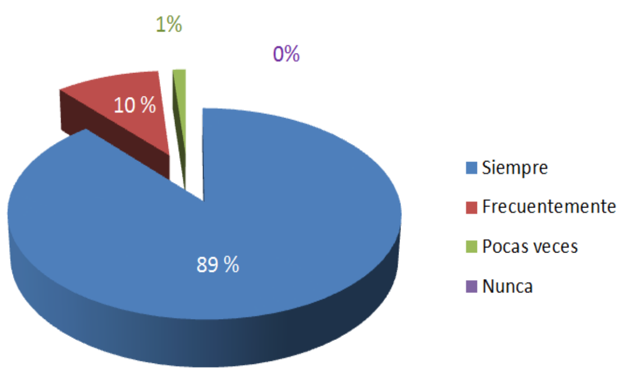



**Gráfico Nº42 ; Pregunta. N° 7;** Encuesta - Dirigido a Estudiantes.

**Elaborado por:** El investigador.

**Análisis e interpretación.**

El 89% de los de los estudiantes manifiestan que siempre se motivan para aprender a dar solución a los problemas planteados por el docente; mientras que el 1% dicen que nunca se motivaron.

Las respuestas anteriores nos permiten manifestar que los estudiantes realizan esfuerzos conjuntos para mejorar sus tareas y obtener productos exitosos (tareas y consultas).

**8. ¿Participaría más activamente si el docente aplicara en su clase elementos multimedia (simuladores, videos, programas especializados, etc.)?**

**Cuadro Nº 41:** Participaría activa por elementos multimedia, simuladores, videos, programas especializados; Encuesta Estudiantes.

| Opciones | Fa | Fr | Porcentaje |
|---|---|---|---|
| **Siempre** | 77 | 0,97 | 97% |
| **Frecuentemente** | 1 | 0,01 | 1% |
| **Pocas veces** | 1 | 0,01 | 1% |
| **Nunca** | 1 | 0,01 | 1% |
| **Total** | 80 | 1 | 100% |

**Fuente:** Encuesta a Estudiantes.

**Elaborado por:** Investigador.

**Participaría activa por elementos multimedia, simuladores, videos, programas especializados**

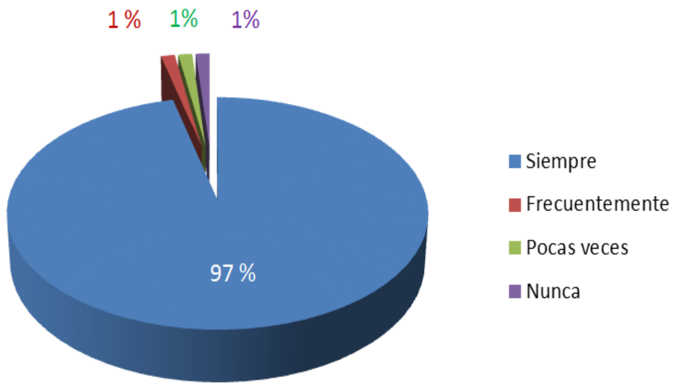



**Gráfico Nº 43 ; Pregunta. N° 8;** Encuesta - Dirigido a Estudiantes.

**Elaborado por:** El investigador.

**Análisis e interpretación.**

El 97 % de los estudiantes siempre participan activamente de las clases con el nuevo método multimedia educativo; mientras que 2% pocas veces se siente motivado y nunca se siente motivado a participar activamente.

Por lo que podemos ver que si es una herramienta decisiva en las nuevas formas de didáctica en aprendizaje colaborativo de la materia de Cálculo I.

## 4.3. VERIFICACIÓN DE HIPÓTESIS.

El uso de la PDI y el software Maple, como herramienta didáctica mejorará el Proceso Enseñanza-Aprendizaje colaborativo de Cálculo I, de los estudiantes de Segundo nivel del IST SECAP Ambato.

### 4.3.1. Variable independiente.

Pantalla Digital Interactiva con el Software Maple.

El desarrollo de nuevas herramientas informáticas basadas en la simulación y modelado, software matemático y sistemas multimedia, ayudado de elementos táctiles como la PID.

La mejora en la transmisión cognoscitiva que se obtengan está en su uso, la labor docente, estarán en función de la capacidad que se tenga de su manejo e implementación.

### 4.3.2. Variable dependiente.

Proceso Enseñanza-Aprendizaje colaborativo de Cálculo I.

El docente se convertirá en un facilitador y modelador de situaciones de aprendizaje para desarrollar en el alumnado habilidades de auto aprendizaje y trabajo en grupo gracias al uso adecuado del software matemático.

## 4.4. PLANTEAMIENTO DE LAS HIPÓTESIS.

### 4.4.1. Hipótesis Nula.

**Ho:** El uso de PDI y el software MAPLE en la enseñanza de la Cálculo I no incidirá positivamente en el aprendizaje colaborativo de los estudiantes de Segundo nivel de Automatización y Control Industrial de IST-SECAP Ambato.

### 4.4.2. Hipótesis Alternativa.

**H1:** El uso de PDI y el software MAPLE en la enseñanza de la Cálculo I si incidirá positivamente en el aprendizaje colaborativo de los estudiantes de Segundo nivel de Automatización y Control Industrial de IST-SECAP Ambato.

### 4.4.3. Modelo Matemático.

$$\boldsymbol{H_0}: \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu_0}$$

$$\boldsymbol{H_1}: \boldsymbol{\mu} \neq \boldsymbol{\mu_0}$$

### 4.4.4. Modelo estadístico.

$$X^2 = \sum \frac{(f_0 - f_e)^2}{f_e}$$

### 4.4.5. Nivel de significancia.

Para la verificación hipotética se selecciona un nivel de significancia del 5% es decir $\alpha = 0.05$

## 4.5. DESCRIPCIÓN DE LA POBLACIÓN.

Se toma como muestra el total de la población que corresponde a 80 estudiantes de Segundo nivel de Automatización y Control Industrial, 9 maestros del área de matemáticas del IST-SECAP Ambato.

### 4.5.1. Especificación del estadístico.

Se trata de un cuadro de contingencia de 4 filas con 3 columnas con la aplicación de la siguiente fórmula estadística:

$$X^2 = \sum \frac{(f_0 - f_e)^2}{f_e}$$

**Dónde:**

$\mathbf{\Sigma}$ = Sumatoria

$\boldsymbol{f_0}$ = Frecuencia observada

$\boldsymbol{f_e}$ = Frecuencia esperada

$\boldsymbol{X^2}$ = Chi-Cuadrado

### 4.5.2. Especificación de las regiones de aceptación y rechazo.

Se determina los grados de libertad considerando una tabla de contingencia de 4 filas (de la encuesta) y 3 columnas (las alternativas), por lo tanto se tienen:

gl= (F-1) (C-1)    F = filas y C = columnas

gl= (7-1) (5-1)

gl= 24

Para comprobar existe la forma en base a los datos observados que nos dice:

gl=n-1

Dónde:

n=24

gl= 24-1

gl= 23

Por lo tanto con 23 grados de libertad y un nivel de significancia de 0.05, en la tabla A4 de anexos, corresponde a $X^2$ = 35,172

Se acepta la $\boldsymbol{H_o}$, si $X^2 calculado < X^2 tabulado$ caso contrario se rechaza.

## 4.6. ANÁLISIS DE LOS DATOS ESTADÍSTICOS

### 4.6.1. Análisis de las variables.

**Cuadro Nº 42:** Frecuencias Observadas Docentes.

| PREGUNTAS | | CATEGORIAS | | | | SUB T |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | **1** | **2** | **3** | **4** | |
| 1 | ¿Conoce usted qué es Pantalla Digital Interactiva (PDI)? | **1** | **3** | **3** | **2** | **9** |
| 2 | ¿Se emplean Procesos interactivos dentro del IST-SECAP en proceso educativo en el aula? | **0** | **1** | **2** | **6** | **9** |
| 3 | ¿Existe pantallas táctiles en las instalaciones de la institución? | **0** | **1** | **3** | **5** | **9** |
| 4 | ¿Cómo docente técnico posee la formación profesional adecuada para el empleo de la PID en el desarrollo de las clases? | **0** | **4** | **3** | **2** | **9** |
| 6 | ¿Utiliza el software especializado MAPLE? | **0** | **0** | **1** | **8** | **9** |
| 7 | ¿Utiliza las TIC en el proceso de enseñanza aprendizaje de Cálculo I? | **0** | **0** | **2** | **7** | **9** |
| SUBTOTAL | | **1** | **9** | **14** | **30** | **54** |

**Elaborado por:** El investigador.

**Categorías:**

**1: SIEMPRE**

**2: FRECUENTEMENTE**

**3: POCAS VECES**

**4: NUNCA**

**Cuadro Nº 43:** Frecuencias Esperadas Docentes

| PREGUNTAS | | CATEGORIAS | | | | SUB T |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | **1** | **2** | **3** | **4** | |
| 1 | ¿Conoce usted qué es Pantalla Digital Interactiva (PDI)? | **0,17** | **1,5** | **2,33** | **5** | **9** |
| 2 | ¿Se emplean Procesos interactivos dentro del IST-SECAP en proceso educativo en el aula? | **0,17** | **1,5** | **2,33** | **5** | **9** |
| 3 | ¿Existe pantallas táctiles en las instalaciones de la institución? | **0,17** | **1,5** | **2,33** | **5** | **9** |
| 4 | ¿Cómo docente técnico posee la formación profesional adecuada para el empleo de la PID en el desarrollo de las clases? | **0,17** | **1,5** | **2,33** | **5** | **9** |
| 6 | ¿Utiliza el software especializado MAPLE? | **0,17** | **1,5** | **2,33** | **5** | **9** |
| 7 | ¿Utiliza las TIC en el proceso de enseñanza aprendizaje de Cálculo I? | **0,17** | **1,5** | **2,33** | **5** | **9** |
| SUBTOTAL | | **1,02** | **9** | **13,98** | **30** | **54** |

**Elaborado por:** El investigador.

**Categorías:**

**1: SIEMPRE**

**2: FRECUENTEMENTE**

**3: POCAS VECES**

**4: NUNCA**

**Cuadro Nº 44:** Cálculo Chi-Cuadrado Docentes

| $f_o$ | $f_e$ | $f_o - f_e$ | $(f_o - f_e)^2$ | Ji cuadrado |
|---|---|---|---|---|
| **1** | 0,17 | 0,83 | 0,6889 | 4,052 |
| **3** | 1,5 | 1,5 | 2,25 | 1,500 |
| **3** | 2,33 | 0,67 | 0,4489 | 0,193 |
| **2** | 5 | -3 | 9 | 1,800 |
| **0** | 0,17 | -0,17 | 0,0289 | 0,170 |
| **1** | 1,5 | -0,5 | 0 ,25 | 0,167 |
| **2** | 2,33 | -0,33 | 0,1089 | 0,047 |
| **6** | 5 | 1 | 1 | 0,200 |
| 0 | 0,17 | -0,17 | 0,0289 | 0,170 |
| **1** | 1,5 | -0,5 | 0,25 | 0,167 |
| **3** | 2,33 | 0,67 | 0,4489 | 0,193 |
| **5** | 5 | 0 | 0 | 0,000 |
| **0** | 0,17 | -0,17 | 0,0289 | 0,170 |
| **4** | 1,5 | 2,5 | 6,25 | 4,167 |
| **3** | 2,33 | 0,67 | 0,4489 | 0,193 |
| **2** | 5 | -3 | 9 | 1,800 |
| **0** | 0,17 | -0,17 | 0,0289 | 0,170 |
| **0** | 1,5 | -1,5 | 2,25 | 1,500 |
| **1** | 2,33 | -1,33 | 1,7689 | 0,759 |
| **8** | 5 | 3 | 9 | 1,800 |
| **0** | 0,17 | -0,17 | 0,0289 | 0,170 |
| **0** | 1,5 | -1,5 | 2,25 | 1,500 |
| **2** | 2,33 | -0,33 | 0,1089 | 0,047 |
| **7** | 5 | 2 | 4 | 0,800 |
| | | | | 21,733 |

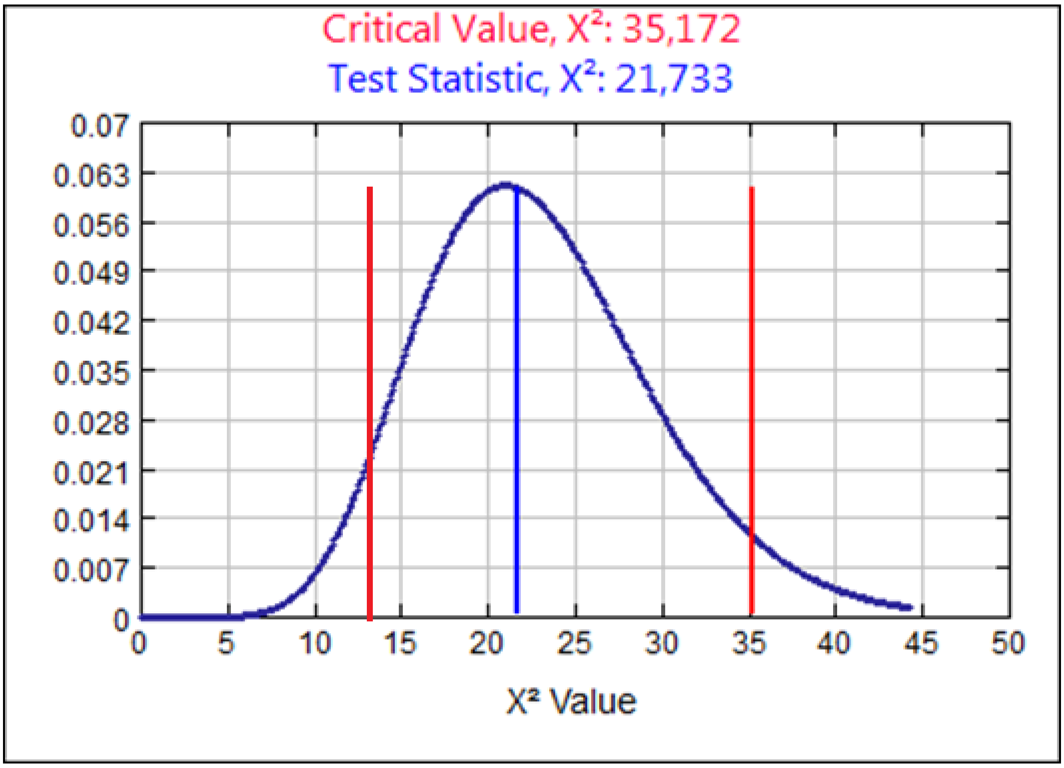
**Elaborado por:** El investigador.

Por lo tanto con 23 grados de libertad y un nivel de significancia de α=0.05, en la tabla corresponde al valor crítico a la derecha $X^2$ = 35,172; como nuestra hipótesis nula plantea la igualdad esto quiere decir que posee dos limites críticos el cual es por la izquierda 1- α=0,95 y con el mismo número de grado de libertad nos da en la tabla A4 de anexos $X^2$ = 13,091

Por la regla de la decisión, si $X^2$ *=21,733<* $X^2$ *=35,172;* por lo que se acepta la hipótesis $H_0$ y se rechaza y se acepta la $H_1$

**Ho:** El uso de PDI y el software MAPLE en la enseñanza de la Cálculo I no incidirá positivamente en el aprendizaje colaborativo de los estudiantes de Segundo nivel de Automatización y Control Industrial de IST-SECAP Ambato.

**Grafico 44: Valores ji cuadrado simula en el programa Statdisk**




**Elaborado por:** El investigador.

## 4.7. ANÁLISIS DE LOS DATOS ESTADÍSTICOS

### 4.7.1. Análisis de las variables

**Cuadro Nº 45:** Frecuencias Observadas Estudiantes

| PREGUNTAS | | CATEGORIAS | | | | SUB T |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | **1** | **2** | **3** | **4** | |
| 1 | ¿Con el actual proceso enseñanza-aprendizaje considera que usted está en la capacidad de resolver los diferentes problemas que se enfrenta en el medio? | **0** | **13** | **27** | **40** | **80** |
| 3 | ¿En la clase de Cálculo I, cuando desarrollan talleres de aprendizaje colaborativo logra comprender y mejor los ejercicios planteados? | **31** | **21** | **16** | **12** | **80** |
| 4 | ¿Se mejora las competencias con las clases en el sistema colaborativo (Conocimiento, Habilidades, Valores)? | **17** | **41** | **14** | **8** | **80** |
| 5 | ¿Despierta en ti el proceso de investigación que un docente plantee nuevas formas de enseñanza)? | **49** | **17** | **12** | **2** | **80** |
| 7 | ¿Cree usted que en el IST-SECAP se debe implementar aulas con sistemas PDI? | **61** | **15** | **4** | **0** | **80** |
| 10 | ¿Con la herramienta informática MAPLE ha mejorado su aprendizaje del Cálculo? | **0** | **10** | **45** | **25** | **80** |
| SUBTOTAL | | **158** | **117** | **118** | **87** | **480** |

**Elaborado por:** El investigador.

**Categorías:**

**1: SIEMPRE**

**2: FRECUENTEMENTE**

**3: POCAS VECES**

**4: NUNCA**

**Cuadro Nº 46:** Frecuencias Esperadas Estudiantes.

| PREGUNTAS | | CATEGORIAS | | | | SUB T |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | **1** | **2** | **3** | **4** | |
| 1 | ¿Con el actual proceso enseñanza-aprendizaje considera que usted está en la capacidad de resolver los diferentes problemas que se enfrenta en el medio? | **26,37** | **19,53** | **19,6** | **14,5** | **80** |
| 3 | ¿En la clase de Cálculo I, cuando desarrollan talleres de aprendizaje colaborativo logra comprender y mejor los ejercicios planteados? | **26,37** | **19,53** | **19,6** | **14,5** | **80** |
| 4 | ¿Se mejora las competencias con las clases en el sistema colaborativo (Conocimiento, Habilidades, Valores)? | **26,37** | **19,53** | **19,6** | **14,5** | **80** |
| 5 | ¿Despierta en ti el proceso de investigación que un docente plantee nuevas formas de enseñanza)? | **26,37** | **19,53** | **19,6** | **14,5** | **80** |
| 7 | ¿Cree usted que en el IST-SECAP se debe implementar aulas con sistemas PDI? | **26,37** | **19,53** | **19,6** | **14,5** | **80** |
| 10 | ¿Con la herramienta informática MAPLE ha mejorado su aprendizaje del Cálculo? | **26,37** | **19,53** | **19,6** | **14,5** | **80** |
| SUBTOTAL | | 158,22 | 117,18 | 117,6 | 87 | **480** |

**Elaborado por:** El investigador.

**Categorías:**

**1: SIEMPRE**

**2: FRECUENTEMENTE**

**3: POCAS VECES**

**4: NUNCA**

**Cuadro Nº 47:** Cálculo Chi-Cuadrado estudiantes

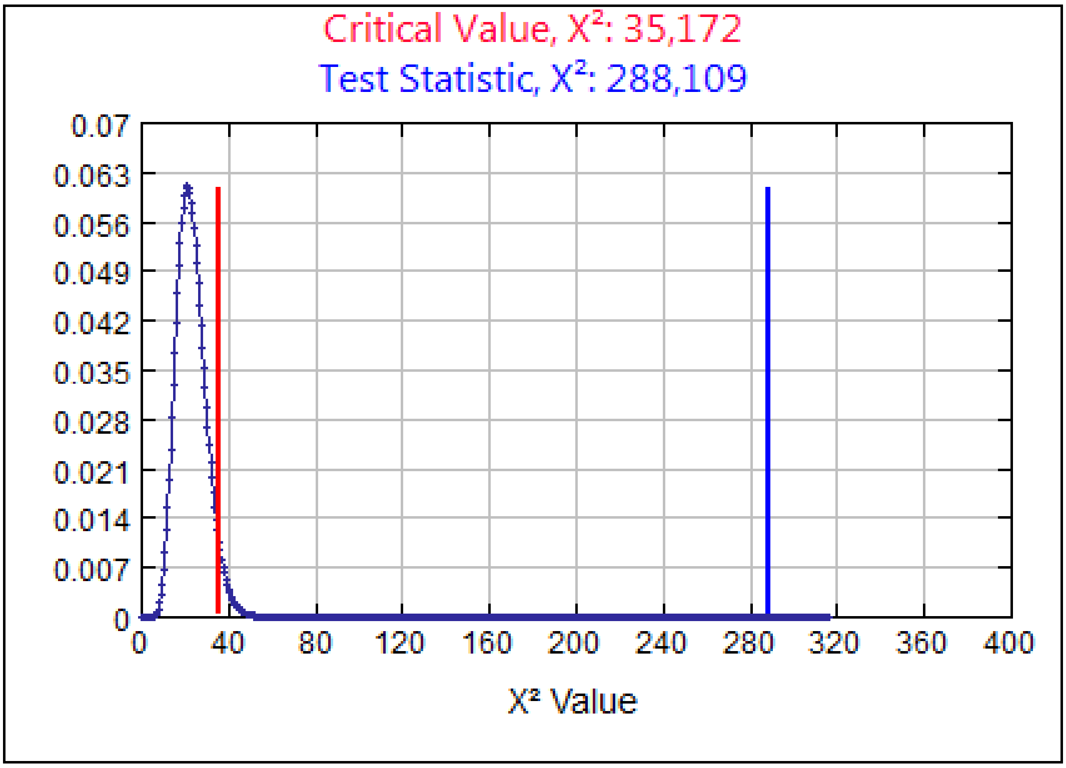
| fo | fe | fo-fe | (fo-fe) | ji |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 26,37 | -26,37 | 695,3769 | 26,37 |
| 13 | 19,53 | -6,53 | 42,6409 | 2,18335381 |
| 27 | 19,6 | 7,4 | 54,76 | 2,79387755 |
| 40 | 14,5 | 25,5 | 650,25 | 44,8448276 |
| 31 | 26,37 | 4,63 | 21,4369 | 0,81292757 |
| 21 | 19,53 | 1,47 | 2,1609 | 0,11064516 |
| 16 | 19,6 | -3,6 | 12,96 | 0,66122449 |
| 12 | 14,5 | -2,5 | 6,25 | 0,43103448 |
| **17** | 26,37 | -9,37 | 87,7969 | 3,32942359 |
| 41 | 19,53 | 21,47 | 460,9609 | 23,6027087 |
| 14 | 19,6 | -5,6 | 31,36 | 1,6 |
| 8 | 14,5 | -6,5 | 42,25 | 2,9137931 |
| 49 | 26,37 | 22,63 | 512,1169 | 19,4204361 |
| 17 | 19,53 | -2,53 | 6,4009 | 0,32774706 |
| 12 | 19,6 | -7,6 | 57,76 | 2,94693878 |
| 2 | 14,5 | -12,5 | 156,25 | 10,7758621 |
| 61 | 26,37 | 34,63 | 1199,2369 | 45,4773189 |
| 15 | 19,53 | -4,53 | 20,5209 | 1,05073733 |
| 4 | 19,6 | -15,6 | 243,36 | 12,4163265 |
| 0 | 14,5 | -14,5 | 210,25 | 14,5 |
| 0 | 26,37 | -26,37 | 695,3769 | 26,37 |
| 10 | 19,53 | -9,53 | 90,8209 | 4,6503277 |
| 45 | 19,6 | 25,4 | 645,16 | 32,9163265 |
| 25 | 14,5 | 10,5 | 110,25 | 7,60344828 |
|  |  |  |  | 288,109285 |

Por lo tanto con 23 grados de libertad y un nivel de significancia de α=0.05, en la tabla corresponde a los valore critico a la derecha $X^2$ = 35,172como nuestra hipótesis nula plante la igualdad esto quiere decir que posee dos limites críticos el cual es por la izquierda 1- α=0,95 y con el mismo número de grado de libertad nos da en la tabla A4 de anexos $X^2$ = 13,091

Por la regla de la decisión, si $X^2$ *=288,109*< $X^2$ *=35,172;* por lo que se rechaza la hipótesis $H_0$ y se acepta la $H_1$

$H_1$: El uso de PDI y el software MAPLE en la enseñanza de la Cálculo I si incidirá positivamente en el aprendizaje colaborativo de los estudiantes de Segundo nivel de Automatización y Control Industrial de IST-SECAP Ambato.

**Grafico 45: Valores ji cuadrado toma de decisión.**




**Elaborado por:** El investigador.

# CAPÍTULO V

# CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

## 5.1. CONCLUSIONES

Luego de realizar la recopilación, tabulación, estudio y análisis de los datos se ha llegado a las siguientes conclusiones:

Los docentes del Área de Matemática, no utilizan los recursos didácticos conforme a la tecnología actualizada ya que es el encargado de diseñar conforme a su experiencia pedagógica la utilización de la PDI para la soluciones de situación problemáticas cercanas al mundo real de los estudiantes en función de sus características y necesidades de aprendizaje.

Los académicos del área de Matemática, en la institución no han transformado su rol y no han generado cambio en el PEA para favorecer consultas e investigaciones por parte de los estudiantes, por lo que debe convertirse en el conductor solidario en este proceso de enseñanza, que les permitan ir probando soluciones posibles como la aplicación del PDI, para encontrar la más pertinente solución planteada por los estudiantes.

El aprendizaje colaborativo en el área de Matemática en el módulo de Cálculo I, se debe aplicar las técnicas participativas como recursos y procedimientos que dentro de una metodología crítico propositivo de desarrollo del talento humano que permite replantear el aprendizaje de los estudiantes.

El uso de software especializado, permite desarrollar habilidades y destrezas que priorice el análisis de los conocimientos adquiridos o asimilados ya que la técnica es un medio no un fin.

## 5.2. RECOMENDACIONES.

Por lo antes expuesto en las conclusiones se puede recomendar:

Los docentes del Área de Matemática del IST-SECAP deben entrar en un proceso de capacitación y actualización de conocimiento de nuevas técnicas pedagógicas y tecnológicas para el dictado de la materia en el Módulo de Cálculo I, para incentivar el aprendizaje colaborativo lo que mejorara la construcción del conocimiento para que facilite su labor docente con el aporte individual de los estudiantes, favoreciendo de esta manera la comprensión y refuerzo de los contenidos tratados.

Es necesario que el alumno cuente con procedimientos automáticos de resolución inmediata; toda situación problemática requiere, de algún modo, un proceso de reflexión o de toma de decisiones sobre la secuencia de pasos a seguir, la solución de problemas es parte integral de toda actividad Matemática que estimule, desarrolle la creatividad e imaginación, el razonamiento lógico, el pensamiento crítico, la investigación; aplicando adecuadamente recursos didácticos que les permitan resolver eficientemente problemas y modelizaciones con herramientas informáticas como el software MAPLE.

Implementar por parte de la Coordinación Académica la unificación de contenidos y el uso común de herramientas informáticas así como el cumplimiento de la Ley de Educación Superior que nos indica que tanto el docente debe manejar: Módulo Formativo por materia, desarrollados por los docentes de las Áreas correspondientes, Syllabus y Planes de clase actualizados y sus portafolios correspondientes.

Sugerir a los docentes IST-SECAP, la conformación equipos de trabajo para que los estudiantes discutan las respuestas que darán a las preguntas críticas formuladas por el docente, por tanto, es fundamental que cada equipo de trabajo tenga la posibilidad de discutir sus ideas, antes de emplear el debate con la participación de los estudiantes en clase.

Elaborar un manual para el uso de la Pantalla Digital Interactiva con el software Maple, para la enseñanza aprendizaje del Cálculo I para mejorar el proceso cognitivo de los estudiantes.

# CAPÍTULO VI

# LA PROPUESTA

## 6.1. TÍTULO

“Manual para el uso de la Pantalla Digital Interactiva con el software Maple, en la enseñanza-aprendizaje del Cálculo I para mejorar el proceso enseñanza-aprendizaje colaborativo del Segundo nivel del ISTSECAP Ambato.

## 6.2. DATOS INFORMATIVOS

Institución Ejecutora: Instituto Superior Tecnológico SECAP Ambato

Beneficiarios: Docentes del área y estudiantes

Ubicación: Avenida Cevallos y 5 de Junio Edif. Paz

Cantón Ambato

Provincia de Tungurahua

Tiempo estimado para la ejecución: Durante el dictado de los Módulos correspondientes de la materia de Cálculo I

Inicio: septiembre 2012-marzo2013.

Equipo técnico responsable: Área de Matemática

Investigador: Ing. Oscar Ruiz Robalino.

## 6.3. ANTECEDENTES DE LA PROPUESTA.

Las PDI herramientas innovadoras en la educación superior ya que debido a su versatilidad ayuda al profesorado a la hora de motivar a los alumnos en el aula.

Las posibilidades que ofrece una pizarra digital interactiva son muchas debido a que funciona como un ordenador táctil gigante, añadiendo novedad al proceso de enseñanza-aprendizaje y por lo tanto aumentando el interés de los alumnos en la asignatura en la que se introduce este instrumento.

Durante las prácticas en el IST-SECAP se integraba la PDI en la clase de matemáticas y se interactuaba con ella, una de sus ventajas es su dinamismo y de su funcionalidad en la operación casi intuitiva.

Esta metodología tendrá como ventaja luego de la resolución de ejercicios se guardado en un archivo por si algún alumno que ha faltado lo quiere recuperar, o para difundir estos ejercicios entre los alumnos y así les tengan ya corregidos.
Es un problema que las instituciones estén invirtiendo en una serie de instrumentos y que éstos luego no se utilicen bien, o al menos no se exploten al máximo. Un profesor bien formado y con entusiasmo por su materia debe saber integrar estos nuevos elementos tecnológicos en el aula, pues forman parte actualmente de nuestra vida diaria. Es más, no sólo integrarlos en el aula, integrados en la materia de Cálculo I ya que se utilizaba la PDI todos los días, sino que hay que potenciarlos, extraer de ellos el máximo partido posible.

Nos proponemos ofrecer una visión general de la educación matemática. Tratamos de crear un espacio de reflexión y estudio sobre las matemáticas, en cuanto objeto de enseñanza y aprendizaje, y sobre los instrumentos conceptuales y metodológicos de índole general que la Didáctica de las Matemáticas está generando como campo de investigación.

Deseamos que los maestros adquieran una visión de la enseñanza de las matemáticas que contemple:

Las clases como comunidades matemáticas, y no como una simple colección de individuos.

La verificación lógica y matemática de los resultados, frente a la visión del profesor como única fuente de respuestas correctas.
El razonamiento matemático, más que los procedimientos de simple memorización.

La formulación de conjeturas, la invención y la resolución de problemas, descartando el énfasis en la búsqueda mecánica de respuestas.
La conexión de las ideas matemáticas y sus aplicaciones, frente a la visión de las matemáticas como un cuerpo aislado de conceptos y procedimientos.

El programa Maple es un programa que utiliza no sólo la rama matemática de la del Cálculo diferencial e integral sino que es una potente herramienta, se pueden trabajar el análisis o el álgebra, entre otros campos de las matemáticas, de forma muy visual para el estudiante.

En primer lugar, este programa facilita el entendimiento de ciertos conceptos matemáticos que sin un dibujo son muy difíciles de comprender. Ahora bien, si ese dibujo además es dinámico y se puede modificar fácilmente, pues la idea aún mejora más. Con la proyección de ejercicios realizados con Maple en la pizarra digital interactiva estamos utilizando esta herramienta ya no sólo como una pizarra o un proyector, sino como un ordenador gigante con el que se puede interactuar.

En segundo lugar, los alumnos aprenden a manejar un programa que puede serles muy útil en el futuro.
Las ventajas que presenta este programa utilizado en la PDI es que los alumnos ven todos a la vez cómo se trabaja con un programa matemático, en vez de trabajar cada uno con su ordenador en un principio, lo que hace que muchas veces los estudiantes se despisten. Además, como la PDI funciona como el ordenador mismo, el profesor puede escribir los comandos necesarios y utilizar el programa en general sólo con tocar en la pantalla, de forma que puede ir explicando

fácilmente los conceptos que crea convenientes, según la edad de los estudiantes, los conocimientos previos con los que cuenten y el tema a tratar. Asimismo, el programa Maple proporciona una forma muy dinámica de aprender, tratándose prácticamente de un proceso interactivo, por lo que la motivación en los estudiantes crecerá notablemente, esperando la clase de matemáticas con expectativa.

## 6.4. JUSTIFICACIÓN.

La importancia de esta propuesta se encuentra fundamentalmente en la necesidad de facilitar las herramientas técnicas para el proceso de enseñanza aprendizaje las que deben procurar el trabajo colaborativo, participación para desarrollar el en trabajo en equipo, abiertos a discusiones constructivas, saber escuchar y que tengan criterio propio para elaborar conjeturas.

La presente propuesta es importante porque el manual de uso de la PDI y sus aplicaciones con el software Maple, se constituye en un recurso didáctico, brindando al estudiante, la oportunidad de incursionar en el campo del desarrollo de la matemática, generando aprendizajes colaborativo y poder aplicarlos en problemas, a través de una variedad de actividades que se presentan para el desarrollo del mismo.

La propuesta de elaborar un manual sobre el contenido temático del módulo Cálculo I en el cual implementaremos los conocimientos relacionados al Cálculo diferencial y Cálculo integral, se podrá analizar situaciones reales en la que se requiere de una participación activa y permanente del estudiante en la construcción del conocimiento.

Este manual académico, tiene la intención de ser una guía didáctica de apoyo tanto en función del docente como del auto aprendizaje colaborativo del estudiante.

Los beneficiarios directos serán los y las estudiantes del IST SECAP, también los y las docentes que dictan la cátedra de Cálculo I.

La propuesta tiene un impacto positivo, porque el texto que constituye un recurso didáctico en el proceso educativo que contribuirá a desarrollar procesos cognitivos, meta cognitivos y procedimentales, en los y las estudiantes, permitiendo vincular la parte teórica con la práctica, más aún con la metodología con la cual se propone, busca alcanzar verdaderos aprendizajes colaborativos del Módulo de Cálculo I, además se está integrando la parte vinculada con el uso de las TIC al ser una herramienta de aprendizaje.

Este trabajo está enfocado para facilitar los procesos de solución de problemas de aplicación, ejercicios, de Cálculo Diferencial y Cálculo Integral, con la finalidad de poder hacerlo sin mayor grado de dificultad, ya que vienen resueltos y analizados varios de ellos con diferentes características.

## 6.5. OBJETIVOS.

### 6.5.1. Objetivo General.

Desarrollar un manual para el uso de la Pantalla Digital Interactiva con el software Maple, en la enseñanza-aprendizaje del Módulo de Cálculo I para los estudiantes de Segundo nivel del IST-SECAP Ambato.

### 6.5.2. Objetivos Específicos.

Explicar los contenidos analíticos de Cálculo I en base a conocimientos de Cálculo Diferencial y Cálculo Integral y los métodos , procedimientos analíticos y cálculos numéricos.

Aplicar el software Maple con el recurso interactivo PDI en el desarrollo de actividades para la comprensión de conceptos del Cálculo Diferencial y Cálculo Integral.

## 6.6. ANÁLISIS DE FACTIBILIDAD.

Analizar la factibilidad de una propuesta implica describir los factores técnicos, pedagógicos, operativos, ambientales, financieros, legales, de talento humano y políticos que determinan la posibilidad real de llevarla a cabo.

### 6.6.1. Factibilidad Técnica.

El contar con nuevas herramientas informáticas y técnicas las cuales están acorde al progreso en la formación científica y tecnológica tanto de maestros como de estudiantes, dotado con una aula, la cual está equipada para el dictado de clases con el sistema PDI. La capacitación de este sistema periódicamente lo realizaran en el Laboratorio de Control Industrial, además el proponente ha investigado y posee los conocimientos metodológicos, necesarios para desarrollar, aplicar y evaluar el Manual de Cálculo I con aplicaciones en Maple, que es el tema de la propuesta.

### 6.6.2. Factibilidad Pedagógica.

En la enseñanza el maestro se preocupa de qué y cómo enseñar a los estudiantes para que logren aprendizajes colaborativos, la presente propuesta es factible porque propicia una pedagogía constructivista donde el maestro se interesa en que los estudiantes construyan sus propios aprendizajes mediante la aplicación de recursos didácticos innovadores, factores que favorecen la motivación, concentración y atención desarrollando destrezas y habilidades que adquiere durante su aplicación, las cuales ayuden a vencer los obstáculos que impiden su desarrollo procedimental, actitudinal y cognitivo dentro y fuera de las aulas.

### 6.6.3. Factibilidad Operativa.

El deseo de docentes y estudiantes por aplicar recursos didácticos innovadores, el incremento del grado de interés por un material de este tipo que a más de facilitar la enseñanza ayudará a elevar el nivel de conocimientos en los estudiantes y la necesidad de tener nuevas alternativas para la enseñanza del Cálculo Diferencial e Integral, constituyen factores que contribuyen a la factibilidad operativa de la propuesta.

### 6.6.4. Factibilidad del Talento Humano.

El desarrollo, ejecución y evaluación de esta propuesta cuenta con el aporte, la experiencia, los conocimientos y el interés de los docentes, del IST SECAP.

De igual manera existe el interés y apoyo por parte de las autoridades, quienes esperan contar con un recurso didáctico que sea novedoso y actualizado que motive la adquisición de aprendizajes colaborativo.

## 6.7. FUNDAMENTACIÓN.

### 6.7.1. Fundamentación Filosófica.

Los estudiantes se apoyan mutuamente para cumplir con un doble objetivo: lograr ser expertos en el conocimiento del contenido, además de desarrollar habilidades de trabajo en equipo. Los estudiantes comparten metas, recursos, logros y entendimiento del rol de cada uno. Un estudiante no puede tener éxito a menos que todos en el equipo tengan éxito.

Los estudiantes aprenden a resolver juntos los problemas, desarrollando las habilidades de liderazgo, comunicación, confianza, toma de decisiones y solución de conflictos.

Los estudiantes son responsables de manera individual de la parte de tarea que les corresponde. Al mismo tiempo, todos en el equipo deben comprender todas las tareas que les corresponden a los compañeros.

Los miembros del equipo intercambian información importante y materiales, se ayudan mutuamente de forma eficiente y efectiva, ofrecen retroalimentación para mejorar su desempeño en el futuro y analizan las conclusiones y reflexiones de cada uno para lograr pensamientos y resultados de mayor calidad.
Los equipos deben evaluar cuáles acciones han sido útiles y cuáles no. Los miembros de los equipos establecen las metas, evalúan periódicamente sus actividades e identifican los cambios que deben realizarse para mejorar su trabajo en el futuro.

Es una propuesta que conlleva hacia la formación integral del ser humano, mejorando en las siguientes dimensiones: eficiente, crítico, ético, creativo, afectivo y espiritual que son los saberes del ser humano. Es el maestro quien planifica, realiza, verifica y actúa en función del mejoramiento de las funciones educativas para obtener productos educativos acordes con las exigencias de la sociedad.

**6.7.2. Fundamentación Educativa.**

La producción de recursos didácticos por parte de los docentes requiere un proceso de inducción de las necesidades pedagógicas y requerimientos técnicos: qué es lo se quiere enseñar, qué medios se van a utilizar y qué tecnologías se utilizarán, siempre en el marco de un proyecto de investigación pedagógico.

Es necesario fomentar nuevos paradigmas de enseñanza aprendizaje, centrados en el aprendizaje colaborativo durante toda la vida y en la consideración del estudiante como protagonista de su propio proceso de aprendizaje.

Lo que le permitirá al estudiante ir acorde a los requerimientos de la sociedad actual caracterizada por un aprendizaje dinámico y cambiante, evolutivo para lo que requiere profesionales no sólo con conocimientos específicos y básicos, sino con destrezas para aplicar y resolver los problemas de un modo creativo, implicando un aprendizaje colaborativo, dichos conocimientos influirá en su campo profesional.

Al mejorar los recursos didácticos y su aplicación correcta y oportuna será complemento de la formación de entes con capacidad de resolver problemas, capaces de aplicar los conocimientos a la práctica, capacidad para adaptarse a nuevas situaciones, habilidad para trabajar de forma grupal (en equipo), conocer y comprender.

**6.7.3. Fundamentación Teórica.**

Actualmente los temas básicos de Cálculo I, se incluyen en el programa de la malla micro curricular de las carreras y del tecnologado del IST SECAP, como lo establece la ley de educación superior en lo referente a los Institutos Tecnológicos.

Frecuentemente al hablar de Límites y Continuidad se piensa directamente en sus expresiones analíticas y en las propiedades que se deducen a partir de ellas mediante procesos puramente algebraicos. Esta propuesta didáctica para la construcción y aplicación de Límites laterales y Límites unilaterales, no niega la potencialidad de estos procesos ni la necesidad de tratarlos a fondo, sugiere motivar su estudio a través de sus propiedades legítimas como su interpretación gráfica.

Esta propuesta será desarrollada tomando como referencia la aplicación de un software matemático que facilitara la solución de los problemas propuestos en clase que muestran un modo de estructurar el aprendizaje de la matemática, se compone de cinco niveles: Visualización, Análisis, clasificación, Deducción, e interpretación. Esta propuesta desarrolla actividades de enseñanza aprendizaje de Cálculo Diferencial y de Cálculo Integral hasta el tercer nivel del modelo, actividades que están enmarcadas en los siguientes indicadores:

- Nivel 1: Visualización.

Uno de los conceptos más importantes del Cálculo, en todos los niveles, inicialmente trataremos de calcular algunas derivadas y luego intentaremos estudiar el concepto de Derivada de una función desde el punto de vista gráfico.

- Nivel 2: Análisis.

Determina los elementos importantes de la gráfica de funciones, determina las características de la función, también podemos calcular derivadas de funciones de más de una variable, es decir, derivadas parciales:

- Nivel 3: Clasificación.

Identifica las propiedades suficientes para definir los límites de la función de forma sintética a través de una ecuación. Utiliza las reglas de límites y continuidad para determinar los de las funciones con el software Maple.

Los contenidos de Cálculo diferencial que serán abordados comprenden los temas de: conceptos básicos, la recta tangente a la gráfica de la función utilizando las diferentes fórmulas de derivación

Entre los factores que afectan el aprendizaje del Cálculo Diferencial y el Cálculo Integral se puede citar los siguientes:

- Comprensión del tema
- Escaza aplicación de software en la resolución de ejercicios
- Tiempo dedicado a la resolución de problemas
- Dificultades en la solución de ejercicios de manera analítica
- Aplicación de las fórmulas adecuadas así como de su análisis crítico
- Dificultades para la construcción e interpretación de gráficas

Escaza utilización de medios informáticos a través del computador para apoyar y complementar contenidos micro curriculares, y desarrollar actividades colaborativas de enseñanza aprendizaje

A los problemas que se presentan en el área de matemáticas por ende en el Cálculo I, no es posible darle una solución de una manera contundente y eficaz, pero si es posible implementar algunas estrategias de apoyo a luz de permitir que el estudiante se apropie del conocimiento a través de su participación activa, entre las cuales podemos mencionar las siguientes:

- Por medio de una introducción conceptual e inducción previa, de los procesos algebraicos usados en el tema, avanzar de la aplicación práctica de conceptos, técnicas y métodos para el Cálculo Diferencial e Integral, alternando con el dominio de algoritmos, hasta la reflexión, formulación y comprensión teórica de los contenidos
- Motivar al estudiante mediante la resolución de problemas de situaciones cercanas a su realidad o de campos del saber accesibles a su nivel de madurez personal y de desarrollo cognitivo, que propicien el desarrollo del pensamiento crítico y reflexivo en el ámbito matemático así como una actuación comprometida del alumno.
- Asesorías continúas por equipos de trabajo.
- Motivación a participar en el aula.

### 6.7.4. Fundamentos Matemáticos

Para la adquisición de conocimiento y aprendizaje del Módulo de Cálculo I:

**LÍMITES Y CONTINUIDAD:**

- Definición de límite
- Cálculo de límites gráfica y numéricamente (tabulación)

- Teoremas sobre límites y cálculo de límites por sustitución
- Límites unilaterales y límites bilaterales
- Límites indeterminados (cancelación de factores iguales y racionalización)
- Límites infinitos
- Límites al infinito
- Límites trigonométricos
- Continuidad de funciones
- Determinación de los puntos de discontinuidad en funciones
- Discontinuidades removibles y no removibles
- Teorema de funciones continúas

Las operaciones matemáticas fundamentales del Cálculo son la diferenciación y la integración y estas operaciones se basan en la determinación de la derivada y la integral, que a su vez se basan en el concepto de límite.

Dado que la derivada de una función se define como un límite, es importante comprender lo que es un límite y aprender a evaluar límites. También vemos aquí la relación que hay entre los conceptos de límite y continuidad siendo ésta la propiedad de una función de no presentar roturas en su gráfica.

**DERIVADAS.**

- Concepto Geométrico y físico de la derivada
- Definición de la derivada
- Derivación por incrementos
- Reglas básicas de derivación (Potencias, múltiplos, sumas y diferencias)
- Reglas de derivación de productos y cocientes
- Derivadas de orden superior
- Regla de la cadena
- Derivada de funciones trigonométricas y sus inversas
- Derivación implícita

- Derivación de funciones logarítmicas y exponenciales
- Derivación logarítmica
- Derivada de funciones hiperbólicas y sus inversas

El estudio de la derivada de una función es que la pendiente o inclinación de la recta tangente a la curva en un punto representa la rapidez de cambio instantáneo. Así pues, cuanto mayor es la inclinación de la recta tangente en un punto, mayor es la rapidez de cambio del valor de la función en las proximidades del punto.
Además de saber calcular la derivada de una función en un punto, es conveniente ser capaz de determinar rápidamente la función derivada de cualquier función. La derivada nos informará de con qué celeridad va cambiando el valor de la función en el punto considerado.

Esta unidad del módulo de Cálculo I, está dedicada precisamente a aprender tanto a calcular el valor de la derivada de una función en un punto como a saber obtener la función derivada de la original. Por este motivo dedicaremos especial atención a como derivar funciones compuestas, funciones implícitas así como a efectuar diversas derivaciones sobre una misma función.

Finalmente veremos la relación que tiene la derivada con los problemas de optimización de funciones. Estos problemas decimos que son de máximo o de mínimo, aplicando el software Maple para la generación de gráficas y su interpretación.

**DIFERENCIAL.**

- La definición de diferencial
- Fórmulas diferenciales

El cambio infinitesimal en una variable o cambio infinitesimal en una función, resultante de un pequeño cambio en la(s) variable(s), por lo que la mejor forma de diferenciar dichos cambios es su simulación y representación gráfica.

**INTEGRAL INDEFINIDA**

- Funciones primitivas e integral indefinida
- Propiedades de la integración indefinida
- Fórmulas fundamentales de integración
- Integración por cambio o sustitución de variable
- Integración de un trinomio cuadrado (fórmulas que contienen a2 y u2)
- Integración por partes
- Integrales trigonométricas (potencias de seno, coseno, tangente, cotangente, secantes y cosecantes)
- Integrales mediante sustituciones trigonométricas
- Integración por fracciones parciales

Integrar es el proceso recíproco de la derivar, es decir, dada una función f(x), busca aquellas funciones F(x) que al ser derivadas conducen a f(x).
Se dice, entonces, que F(x) es una primitiva o antiderivada de f(x); dicho de otro modo las primitivas de f(x) son las funciones derivables F(x) tales que:
F'(x) = f(x).

Si una función f(x) tiene primitiva, tiene infinitas primitivas, diferenciándose todas ellas en una constante.
Integral indefinida es el conjunto de las infinitas primitivas que puede tener una función.

**INTEGRAL DEFINIDA.**

- Definición de integral definida

- Teorema fundamental de cálculo
- Integrales impropias
- Área bajo una curva

Presentar de manera visual el concepto de integral definida y sus propiedades.
No se pretende aquí hacer unas demostraciones rigurosas. El objetivo principal de la unidad es complementar las explicaciones que se den en el aula para permitir una más fácil asimilación de las mismas, interpretación geométrica de la Integral Definida.

Siendo el área bajo la curva entre dos puntos dados. Para su comprensión es conveniente la consulta de, área de los Polígonos, el enfoque para el cálculo, por cuanto se utiliza la fórmula general de cálculo propuesta en el mencionado trabajo. No obstante, en forma rápida, introduciremos la fórmula para el caso de figuras de tres y cuatro lados.

El desarrollo de los ejercicios y su cálculo así como su aplicación se realizan utilizando el paquete informático Maple, es un software shareware escrito en Java y por ello tenemos ciertas limitaciones ya que estamos evaluando la versión estudiantil, para proceder a su adquisición como parte de programa de formación y capacitación dentro de la institución: a la resolución de problemas matemáticos, capaz de realizar cálculos simbólicos, algebraicos y de álgebra computacional. Fue desarrollado originalmente en 1981 por el Grupo de Cálculo Simbólico en la Universidad de Waterloo en Waterloo, Ontario, Canadá.

Los siguientes requisitos del sistema son para todas las versiones de Maple 14 en adelante. Tenga en cuenta que la edición para estudiantes está disponible para Windows, lo que utilizamos para el presente estudio es la versión gratuita de evaluación.

**Windows (32 bits)**

| Versión | CPU * | RAM recomendados | Hard Disk |
|---|---|---|---|
| Windows XP | Intel Pentium III 650 MHz o equivalente | 2 GB | 2 GB |
| Windows Vista | Intel Pentium III a 1 GHz o equivalente | 2 GB | 2 GB |
| Windows 7 | Intel Pentium III a 1 GHz o equivalente | 2 GB | 2 GB |
| Windows 8 | Intel Pentium III 1 GHz | 2 GB | 2 GB |

**Windows (64 bits)**

| Versión | CPU * | RAM recomendados | Hard Disk |
|---|---|---|---|
| Windows XP | AMD x86_64, 1 GHz, Intel Xeon, Intel 64 | 2 GB | 2 GB |
| Windows Vista | AMD x86_64, 1 GHz, Intel Xeon, Intel 64 | 2 GB | 2 GB |
| Windows 7 | AMD x86_64, 1 GHz, Intel Xeon, Intel 64 | 2 GB | 2 GB |
| Windows 8 | AMD x86_64 1 GHz Intel Xeon, Intel 64 | 2 GB | 2 GB |

- Unidad de DVD-ROM (para la instalación del DVD).
- Resolución de color de 16 bits y 1024 x 768 (o superior) se recomienda.

## 6.8 METODOLOGIA Y PROPUESTAS DIDACTICAS.

### 6.8.1. Propuestas Didácticas.

Maple 14 es el medio ambiente para una amplia gama de transformaciones matemáticas y la creación de documentación técnica, indispensable para los ingenieros modernos, los matemáticos y científicos. La interfaz del programa permite resolver muchos problemas a partir de cálculos y algoritmos básicos de diseño para desarrollar modelos complejos, la simulación lógica y aprendizaje de las matemáticas. Sistema de Cálculo Simbólico Maple, con una interfaz gráfica cómoda, permite solución simbólica y numérica de ecuaciones diferenciales y cálculo de integrales.

### 6.8.2. Propuesta Metodológica.

Se preparó el siguiente manual sobre Cálculo I con actividades en Maple utilizando la siguiente metodología en todas las unidades:

**Cuadro 48.** Propuesta Didáctica Unidad 1.

**Articular el análisis Lógico, Algebraico y Geométrico; para potenciar el intelecto racional basado en teoremas demostrables.**

| Contenido | Contenidos Cognoscitivos | Contenidos Procedimentales | Contenidos Actitudinales | Estrategias y Técnicas | Ambiente de Aprendizaje | TIEMPO (HORAS) | | | Trabajo Autónomo | Recursos Didácticos |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | T | P | A | | |
| 1. Fundamentación de Límites y Continuidad. | Identificar los puntos donde la función no está definida.<br>Aplicar las propiedades de los límites en la resolución de problemas<br>Calcular asíntotas verticales, horizontales y oblicuas.<br>Analizar la continuidad y la discontinuidad de las funciones. | Graficar y calcular el Dominio y el Dominio de imagen de las funciones<br><br>Calcular la Inversa de una función<br><br>Realizar la composición entre dos o más funciones. | Importancia del reconocimiento de las gráficas de las funciones para calcular.<br><br>Conexión entre el cálculo de límites y la continuidad de la función.<br><br>La continuidad como un concepto geométrico. | E-14, TI-1<br><br>E-3, TI-10<br>E-16<br><br>E-4, TI-10<br>E-16 | Dinámica de introducción<br>Desarrollo del contenido<br>Dinámica de introducción<br>Resumen de la clase anterior<br>Desarrollo del contenido<br>Dinámica de introducción<br>Resumen de la clase anterior | 2<br><br>3<br><br>2 | 1<br><br>2<br><br>1 | 3<br><br>5<br><br>3 | TA -1-1<br><br>TA-1-2<br><br>TA-1-3 | Biblioteca<br>Texto básico<br>Computador<br>Proyector<br><br>Biblioteca<br>Texto básico<br>Computador<br>Proyector<br><br>Biblioteca<br>Texto básico<br>Equipo de cómputo |
| Bibliografía<br>LEITHOLD, L. 1973.<br>El Cálculo con Geometría Analítica.<br>Editorial Harla.<br>Harper & Raw Latinoamericana. | | | | | | | | | | |

**Elaborado por: El investigador**

**Cuadro 49.** Propuesta Didáctica Unidad 2.

**Identificar modelos matemáticos propios del cálculo diferencial e integral involucrados en diversos problemas.**

| Contenido | Contenidos Cognoscitivos | Contenidos Procedimentales | Contenidos Actitudinales | Estrategias y Técnicas | Ambiente de Aprendizaje | TIEMPO (HORAS) | | | Trabajo Autónomo | Recursos Didácticos |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | T | P | A | | |
| 1. La derivada y sus aplicaciones.<br><br>2. Diferencial | Interpretar la definición de la derivada de una función en un punto.<br><br>Calcular la derivada de las funciones por definición y por tablas<br><br>Derivar funciones expresadas en forma implícita<br><br>Definición de diferencial y formulas | Definición de Derivadas, propiedades.<br>Derivadas de funciones<br>Tabla de Derivadas.<br>Derivada de las Funciones Compuestas.<br>Regla de la Cadena<br>Derivadas de orden superior.<br>Aplicaciones geométricas de las derivadas. Máximos y Mínimos:<br>Aplicar correctamente la definición de diferenciabilidad | Adquirir habilidad en el cálculo de derivadas parciales, aplicando reglas de derivación.<br><br>Interpretar el significado e importancia del Teorema del valor medio.<br><br>Relacionar derivabilidad de funciones de dos variables con continuidad. | E-14, TI-1<br>E-16<br><br>E-3, TI-10<br>E-16<br><br>E-4, TI-10<br>E-16<br><br>E-4, TI-10<br>E-16 | Dinámica de introducción<br>Desarrollo del contenido<br>Dinámica de introducción<br>Resumen de la clase anterior<br>Desarrollo del contenido<br><br>Dinámica de introducción<br>Resumen de la clase anterior | 2<br><br>2<br><br>2<br><br>0,5 | 2<br><br>2<br><br>1<br><br>0,5 | 4<br><br>4<br><br>3<br><br>1 | TA -2-1<br><br>TA-2-2<br><br>TA-2-3<br><br>TA-2-4 | Biblioteca<br>Texto básico<br>Computador<br>Proyector<br><br>Biblioteca<br>Texto básico<br>Computador<br>Proyector<br><br>Biblioteca<br>Texto básico<br>Equipo de cómputo |

Bibliografía
LEITHOLD, L. 1973.
El Cálculo con Geometría Analítica.
Editorial Harla.
Harper & Raw Latinoamericana.

**Elaborado por: El investigador**

**Cuadro 50.** Propuesta Didáctica Unidad 3.

**Comprenden aplican y valoran el concepto de integral indefinida, su relación con el cálculo Diferencial y sus distintos registros de representación**

| Contenido | Contenidos Cognoscitivos | Contenidos Procedimentales | Contenidos Actitudinales | Estrategias y Técnicas | Ambiente de Aprendizaje | TIEMPO (HORAS) | | | Trabajo Autónomo | Recursos Didácticos |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | T | P | A | | |
| 1. La integral Funciones Trascendentes. | Integral Indefinida.<br>Definición y Propiedades.<br>Teoremas<br>Función Primitiva.<br>Antiderivada de una función<br>Integración por tablas.<br>Uso de Tablas<br>Métodos de integración,<br>Sustitución o Cambio de Variable,<br>Integración por Partes,<br>Método de Cálculo de Integración | Resuelve integrales indefinidas utilizando tablas<br>Aplica los diferentes métodos de integración para calcular primitivas de las funciones<br>Aplica las propiedades de la integral en el cálculo de integrales definidas<br>Aplica las integrales definidas para calcular áreas | Uso de integrales indefinidas como herramientas de solución de dichos problemas.<br><br>Uso de este tipo de integrales en la solución de problemas.<br><br>Uso de series como una forma diferente de sumar. | E-14, TI-1<br>E-16<br><br>E-3, TI-10<br>E-16<br><br>E-4, TI-10<br>E-16 | Dinámica de introducción<br>Desarrollo del contenido<br>Dinámica de introducción<br>Resumen de la clase anterior<br>Desarrollo del contenido<br>Dinámica de introducción<br>Resumen de la clase anterior | 1<br><br>1<br><br>0,5 | 1<br><br>1<br><br>0,5 | 2<br><br>2<br><br>11 | TA -3-1<br><br>TA-3-2<br><br>TA-3-3 | Biblioteca<br>Texto básico<br>Computador<br>Proyector<br><br>Biblioteca<br>Texto básico<br>Computador<br>Proyector<br><br>Biblioteca<br>Texto básico<br>Equipo de cómputo |

Bibliografía
LEITHOLD, L. 1973.
El Cálculo con Geometría Analítica.
Editorial Harla.
Harper & Raw Latinoamericana.

**Elaborado por: El investigador**

**Cuadro 51.** Propuesta Didáctica Unidad 4.

**Articular el análisis Lógico, Algebraico y Geométrico; para potenciar el intelecto racional basado en teoremas demostrables.**

| Contenido | Contenidos Cognoscitivos | Contenidos Procedimentales | Contenidos Actitudinales | Estrategias y Técnicas | Ambiente de Aprendizaje | TIEMPO (HORAS) | | | Trabajo Autónomo | Recursos Didácticos |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | **T** | **P** | **A** | | |
| 1. Integral Definida | Integrales Propias.<br><br>Integral Definida<br><br>Cálculo de Áreas.<br><br>Área entre curvas.<br>Aplicaciones<br><br>Teorema del valor medio del cálculo Integral | Resuelve integrales definidas<br>Aplica los diferentes métodos de integración para calcular funciones<br><br>Aplica las propiedades de la integral en el cálculo de integrales definidas<br><br>Aplica las integrales definidas para calcular áreas | Uso de integrales definidas como herramientas de solución de dichos problemas.<br><br>Manejo de integrales en la solución de problemas.<br><br>Cálculo de áreas bajo la curva. | E-14, TI-1<br>E-16<br><br>E-3, TI-10<br>E-16<br><br>E-4, TI-10<br>E-16 | Dinámica de introducción<br>Desarrollo del contenido<br>Dinámica de introducción<br>Resumen de la clase anterior<br>Desarrollo del contenido<br>Dinámica de introducción<br>Resumen de la clase anterior | 2<br><br>3<br><br>2 | 1<br><br>2<br><br>1 | 3<br><br>5<br><br>11 | TA -4-1<br><br>TA-4-2<br><br>TA-4-3 | Biblioteca<br>Texto básico<br>Computador<br>Proyector<br><br>Biblioteca<br>Texto básico<br>Computador<br>Proyector<br><br>Biblioteca<br>Texto básico<br>Equipo de cómputo |

Bibliografía

LEITHOLD, L. 1973.
El Cálculo con Geometría Analítica.
Editorial Harla.
Harper & Raw Latinoamericana.

**Cuadro 52.** Estrategias Metodológicas.

| ESTRATEGIA | CODIGO | ESTRATEGIA | CODIGO | ESTRATEGIA | CODIGO |
|---|---|---|---|---|---|
| Magistral Dialogada | E-1 | Simulaciones | E-7 | Exposición de estudiantes | E-13 |
| Método del caso | E-2 | Focus Group | E-8 | Conversatorio | E-14 |
| ABP | E-3 | Foro | E-9 | Lluvia de ideas | E-15 |
| Ciclo experiencial | E-4 | Video foro | E-10 | Aprendizaje Colaborativo | E-16 |
| Investigaciones | E-5 | Debates | E-11 | | |
| Proyectos | E-6 | Mesa Redonda | E-12 | | |

**Elaborado por:** El investigador.

**Cuadro 53.** Técnicas de Investigación.

| TÉCNICAS DE INVESTIGACIÓN | CODIGO |
|---|---|
| Investigación bibliográfica de por lo menos tres fuentes y sacar conclusiones | TI-1 |
| Explorar en redes de información (internet) y procesar la información | TI-2 |
| Elaborar fichas bibliográficas y nemotécnicas | TI-3 |
| Elaborar cuestionario para encuestas | TI-4 |
| Aplicar encuestas, tabular y analizar datos | TI-5 |
| Elaborar guías de entrevistas | TI-6 |
| Realizar entrevistas y procesar información | TI-7 |
| Elaborar guías de observación | TI-8 |
| Aplicar guías de observación y procesar información | TI-9 |
| Otras (especificar) | TI-10 |

**Elaborado por:** El investigador.

**ESCUELA DE ELECTRICIDAD Y ELECTRONICA**
**TECNOLOGIA EN AUTOMATIZACION Y CONTROL INDUTRIAL**

# MÓDULO FORMATIVO
# DE CALCULO I, APLICANDO EL SOFWARE MAPLE

## IISEMESTRE - 48H – 3CREDITOS


Ing. Oscar Ruiz Robalino
INGENIERO ELECTROMECANICO
Egdo. MASTER EN DOCENCIA MATEMATICA



**AMBATO - ECUADOR**

**2013**

## COMANDOS BÁSICOS SOFTWARE MAPLE.

**in**

Operador de pertenencia para conjuntos.

**evalb(exprb)**

Evalúa una expresión booleana.

**union(c1,c2)**

Operador de unión para conjuntos.

**intersection(c1,c2)**

Operador de intersección para conjuntos.

**minus(c1,c2)**

Operador de diferencia para conjuntos.

**subset(c1,c2)**

Operador de subconjuntos.

**powerset(c1)**

Calcula el conjunto potencia de un conjunto, requiere el comando with(combinat).

**nops(c1)**

Obtiene la cardinalidad de un conjunto.

**restart**

Limpia la memoria de Maple para todas las definiciones.

**unassign('var')**

Limpia una variable nombrada var=variable.

**unapply(expr)**

Retorna un operador de una expresión en forma de función.

**with( )**

Trae funciones adicionales que se encuentran en la biblioteca de Maple.

**numer( )**

Selecciona el numerador de una fracción.

**denom( )**

Selecciona el denominador de una fracción.

**ifactor(n)**

Da la factorización de números primos para un entero dado.

**lhs(eqn)**

Selecciona el lado izquierdo de una ecuación.

**rhs(eqn )**

Selecciona el lado derecho de una ecuación.

**rationalize(expr)**

Racionaliza el denominador de una expresión.

**simplify(expr)**

Simplifica una expresión.

**expand(expr)**

Expande la expresión dada.

**eval(expr,x=v)**

Evalúa las expresiones en un punto donde x=a.

**evalf(expr)**

Evalúa numéricamente una expresión dando por default 10 dígitos.

**evalf(expr,n)**

Evalúa numéricamente una expresión dando el número de dígitos que se requieran.

**factor(expr)**

Factoriza una expresión.

**fsolve(eqn)**

Encuentra numéricamente (por aproximación) la solución de una ecuación, cuando se le da el valor de x.

**subs(x= v,expr)**

Sustituye el valor de una variable en la variable independiente de la expresión.

**solve(eqn)**

Encuentra la solución exacta de una ecuación incluyendo ecuaciones con letras y sistemas lineales.

**plot( )**

Gráfica de funciones definidas por expresiones algebraicas, más de una expresión a la vez, puntos, ecuaciones paramétricas, etc.

**display( )**

Combina graficas de funciones y puntos (requiere el comando with(plots)).

**implicitplot( )**

Gráfica de funciones definidas implícitamente.

**Matrix([])**

Es el comando para crear una matriz.

**DeleteRow(M,#)**

Elimina una fila de una matriz, donde M es la matriz y # es el número de fila a eliminar.

**DeleteColumn(M,#)**

Elimina una columna de una matriz, donde M es la matriz y # es el número de columna.

**RowOperation(M,α,#)**

Multiplica una fila de una matriz por un escalar, donde M es la matriz, α, es un escalar y # es el número de la fila.

**RowOperation(M,[ ])**

Hace el intercambio de filas en una matriz, donde M es la matriz.

**ColumnOperation(M,α,#)**

Multiplica una columna por un escalar, donde M es la matriz, α, es el escalar y # el número de columna.

**ColumnOperation(M,[ ])**

Hace el intercambio de columnas en una matriz, donde M es la matriz.

**MatrixAdd()**

Suma dos matrices.

**Multiply()**

Multiplica dos matrices.

**ScalarMultiply()**

Multiplica una matriz por un escalar.

**MatrixScalarMultiply()**

Multiplica una matriz por un escalar.

**Transpose()**

Transpone una matriz.

**Determinant()**

Calcula el determinante de una matriz.

**MatrixInverse()**

Calcula la matriz inversa.

**ReducedRowEchelonForm(<|>)**

Resuelve un sistema de ecuaciones por el método de Gaussiano.

**GenerateEquations( ,[ ])**

Convierte una matriz en un sistema de ecuaciones.

**GenerateMatrix()**

Convierte un sistema de ecuaciones en un sistema matricial.

**LinearSolve()**

Resuelve el sistema que está expresado en matrices.

**limit()**

Calcula el límite de una función.

**Limit()**

Escribe el límite de una función, sin calcularlo.

**piecewise()**

Define una función construida por partes.

**discont()**

Encuentra los puntos de discontinuidad de una función.

**Showtangent()**

Dibuja una función y la línea tangente para un valor dado de x.

**D()**

Deriva una función y evalúa la función derivada en x.

**diff()**

Calcula la derivada de una función.

**Implicitdiff()**

Deriva una función definida por una ecuación.

**CriticalPoints()**

Encuentra los puntos críticos de una función.

**FunctionChart()**

Grafica una función a la vez que señala en la gráfica los intervalos para los cuales la función es creciente y decreciente.

**InflectionPoints()**

Encuentra los puntos de inflexión de una función.

**integrate() o int()**

Calcula la integral de una función.

**Integrate() o Int()**

Escribe la integral de una función, sin calcularla.

**normal()**

Normaliza una expresión racional.

**leftbox()**

Grafica los rectángulos por la izquierda de una suma de Riemann.

**leftsum**

Calcula la suma de Riemann por la izquierda.

**rightbox**

Grafica los rectángulos por la derecha de una suma de Riemann.

**Rightsum**

Calcula la suma de Riemann por la derecha.

## CONSTANTES MATEMÁTICAS

| | |
|---|---|
| **Pi** | $\pi$ (Debe ser necesariamente Pi con P mayúscula). |
| **exp(1)** | e |
| **I** | $\sqrt{-1}$ |
| **sqrt(x)** | $\sqrt{X}$ |

**abs(x)** $|X|$

**exp(x)** $e^x$

**ln(x)** Logaritmo natural.

**log(x)** Logaritmo natural igual que ln(x).

**log[n](x)** Logaritmo base n.

Funciones trigonométricas:

**sin(x), cos(x), tan(x), cot(x), sec(x), csc(x)**

Funciones trigonométricas inversas:

**arcsin(x), arccos(x), arctan(x)**

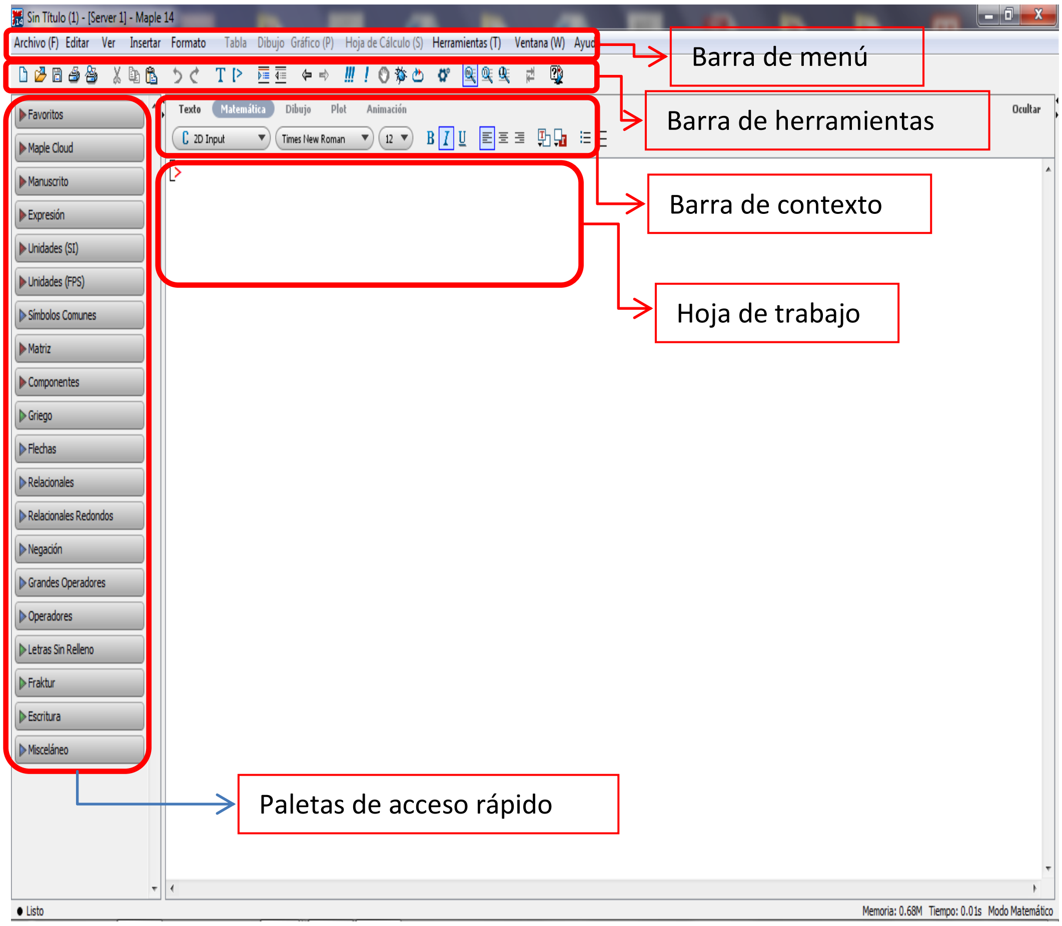
**COLORES UTILIZADOS EN MAPLE**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Aquamarine | black | blue | navy | coral |
| cyan | brown | gold | green | gray |
| khaki | magenta | maroon | orange | pink |
| plum | red | sienna | tan | turquoise |
| violet | wheat | white | yellow | |

**VENTANA DE INICIO MAPLE.**

La interface de Maple se denomina hoja de trabajo, donde se muestra las siguientes barras de menú y submenú.

**Imagen 29: Interfaz del software Maple.**

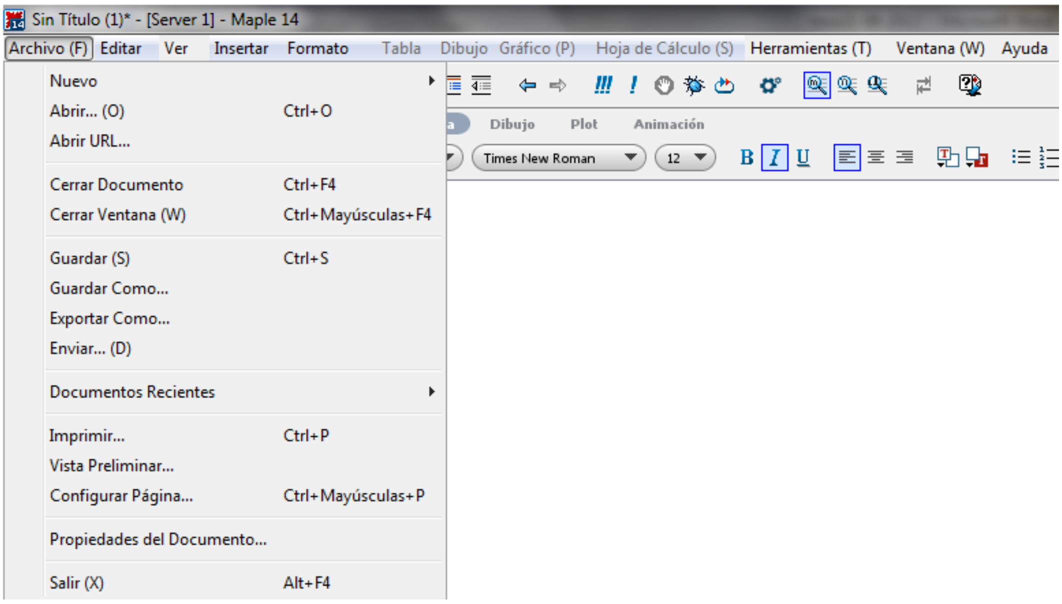



**Elaborado por:** El Investigador.

## Barra de Menús.

Muestra al pinchar en la pestaña, Archivo se despliega el submenú con todas las viñetas de: Nuevo, Guardar, Guardar como, Cerrar documento, Cerrar ventana, etc. Las cuales de manera intuitiva podemos relacionar con la gran mayoría de paquetes informáticos y su aplicación, ejecución.

**Imagen 30: Barra de Menús.**




**Elaborado por:** El Investigador.

## Barra de Herramientas.

Muestra de manera icónica el acceso rápido a las tareas más requeridas por el usuario.

**Imagen 31: Barra de Herramientas.**

**Elaborado por:** El Investigador.

## Barra de Contexto.

Muestra el título del archivo con el que se está trabajando así como las diferentes formas de ingresar texto, ecuaciones, mostrar gráficas, dibujar resultados y animaciones, convirtiéndose en una de las herramientas de procesamiento matemático más completas y versátiles por su interfaz interactiva.

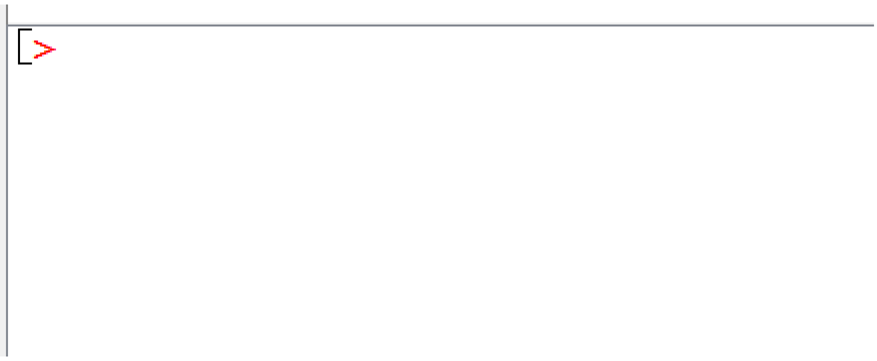
**Imagen 32: Barra de Herramientas.**


**Elaborado por:** El Investigador.

### Hoja de trabajo.

La hoja de trabajo proporciona un ingreso rápido, ya que el paquete está concebido con un conjunto de herramientas acceso a las paletas de entrada, menús contextuales y las funciones de entrada de texto, como bloques de documentos. En el modo de hoja de cálculo para la manipulación de documentos matemáticos.

**Imagen 33: Hoja de trabajo.**



**Elaborado por:** El Investigador.

### Paletas de Acceso Rápido.

Al desplegar el icono triangular nos muestra, las diferentes formas de signos y forma de escritura matemática necesaria para el ingreso de datos para su posterior análisis.

## Imagen 34: Paletas de Acceso Rápido.


**Elaborado por:** El Investigador.

**UNIDAD 1.**

Se aplicara operaciones matemáticas en lo que al Calculo Diferencial ya que esta función se define como un límite, y es necesario comprender la parte de la inducción a límites y su continuidad.

**Actividad 1.**

Comenzaremos estudiando cómo calcular límites de diferentes formas con Maple, así cómo se determinará si una función es continua o no. Esencialmente se utilizan los comandos: **limit**, **discont** y **piecewise**, así como el comando **plot**.

Comenzaremos calculando límites para diversas funciones.

Para calcular el $\lim_{x\to 1}\left(\frac{x-1}{x^2-1}\right)$, primeramente se borrará la memoria de Maple con el comando **restart**; de no ser así, el programa podría utilizar información definida previamente.

Sea la función $f(x)=\frac{x-1}{x^2-1}$

> f:=x->(x-1)/(x^2-1);

$$f:=x\to\frac{x-1}{x^2-1}$$

Ahora calculamos el valor del límite al cual tenderá *x*; nombrando el valor por la letra *a*

> a:=1;

$a := 1$

Utilicé el comando ***limit*** para calcular el límite de la función anterior

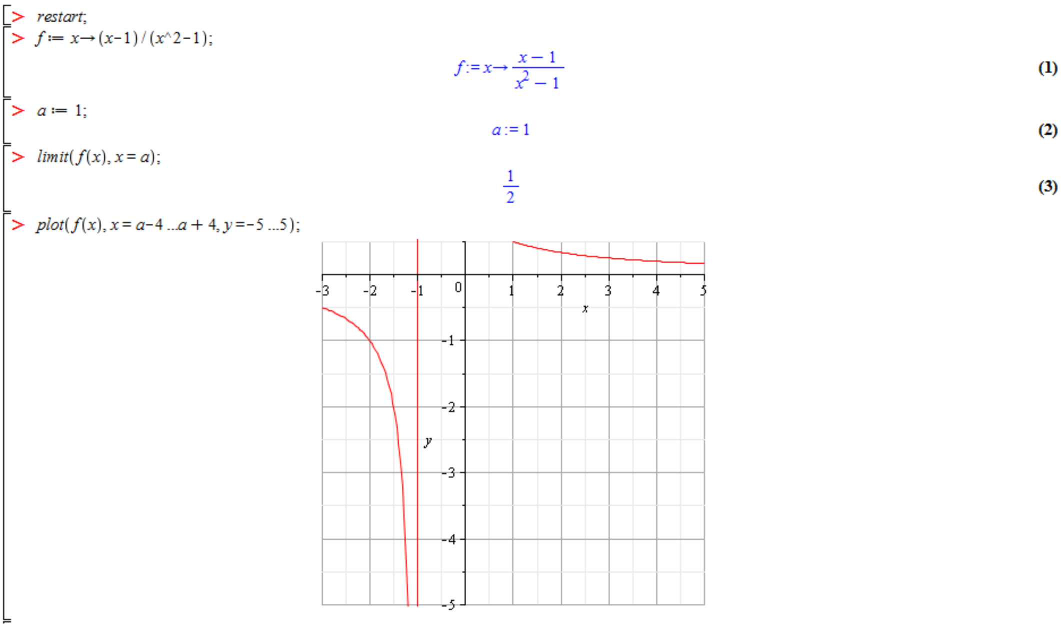
> limit(f(x),x=a);

1/2

Grafique la función con el comando ***plot*** dando valores al eje *x* de –4 a 4 y al eje *y* de –5 a 5.

> plot(f(x),x=a-4...a+4,y=-5...5);

**Imagen 35: Aplicación Actividad 1 en Software Maple.**



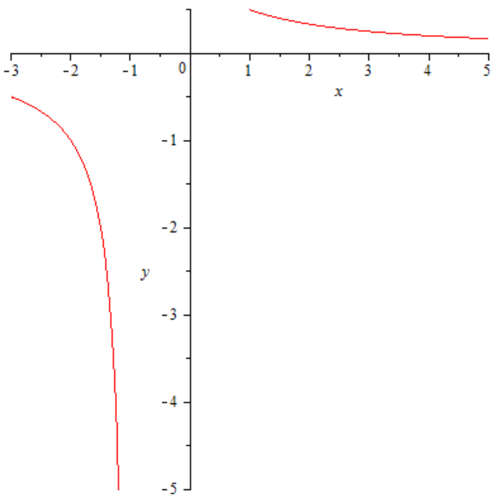

**Elaborado por:** El Investigador.

Observe que en el gráfico existe una discontinuidad de la función $f(x) = \frac{x-1}{x^2-1}$, la línea vertical que se da en el gráfico es lo que se llama asíntota vertical, cuando x= $-1$.

Luego entonces, se averiguará si realmente existe una discontinuidad en la función por medio del gráfico y del comando ***discont***, en x = $-1$, Si mencionamos que la discontinuidad es verdadera, graficará la misma función eliminando la asíntota.

> plot(f(x),x=a-4...a+4,y=-5...5,discont=true);

**Imagen 36: Aplicación comando discont Actividad 1 en Software Maple.**

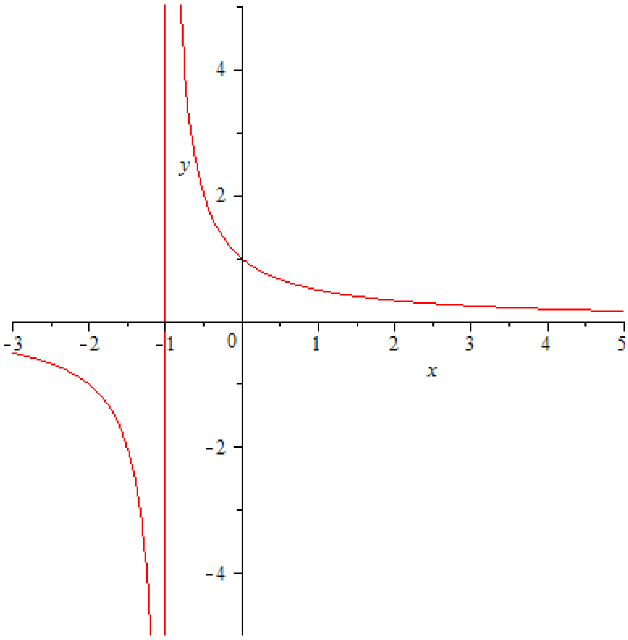



**Elaborado por:** El Investigador.

Ahora si se menciona que es falsa la discontinuidad, o sea, que no existe, graficará la función junto con la asíntota que pasa exactamente en el punto de discontinuidad.

> plot(f(x),x=a-4..a+4,y=-5..5,discont=false);

**Imagen 38: Aplicación comando discontfalse Actividad 1 en Software Maple.**




**Elaborado por:** El Investigador.

### Actividad 1.1.

Ahora calcule el $\lim_{x \to -1} \frac{|x-1^3|}{x} + 1$ recuerde, antes de iniciar cualquier operación utilice el comando ***restart*** para borrar la memoria de Maple, ya que está utilizando la misma variable x que el ejemplo anterior.

> restart;

Cree la función $f(x) = \frac{|x-1^3|}{x}$

> f:=x->abs(x+1)^3/(x+1);

$$f := x \rightarrow \frac{|x - 1^3|}{x}$$

El valor de x nómbrelo por a

> a:=-1;

$a$ := -1

Calcule el límite

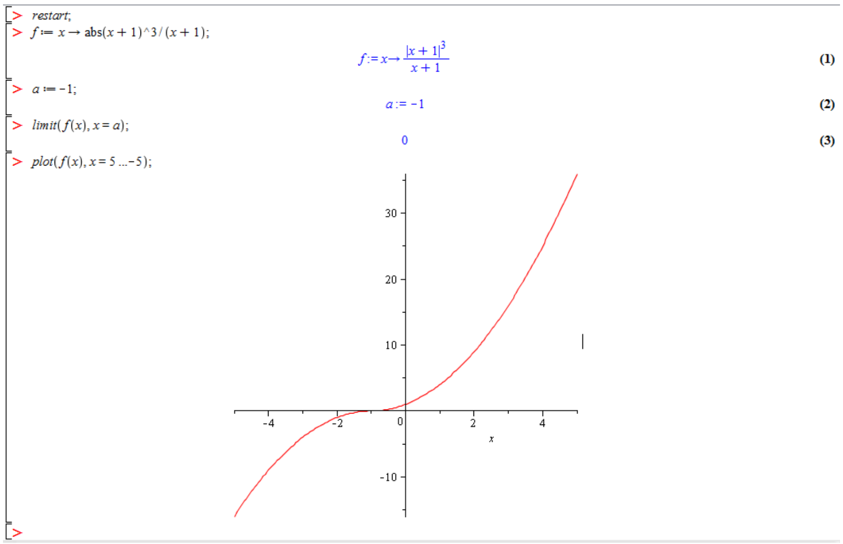
> limit(f(x),x=a);

0

Grafique la función dando valores al eje *x* desde -5 hasta 5

>plot(f(x), x = 5 .. -5);

**Imagen 39: Aplicación comando plot en la Actividad 1.1 con el Software Maple**




**Elaborado por:** El Investigador.

Observe que no existe ninguna discontinuidad, en este ejemplo la función es continua; en otras palabras existe, el límite, para x=a.

### Actividad 1.2.

El siguiente ejemplo es también un límite con valor absoluto, el cual contiene discontinuidad.

Borre la memoria de Maple nuevamente con el comando ***restart***. Calcule el siguiente límite.

$$\lim_{x \to -1} \frac{|x+1|}{x+1}$$

> restart;

Cree la función $f(x) = \frac{|x+1|}{x+1}$

> f:=x->abs(x+1)/(x+1);

$$f := x \to \frac{|x+1|}{x+1}$$

El valor de *x* nómbrelo por *a*

> a:=-1;

*a* := -1;

Calcule el límite de la función cuando *x* tiende a -1

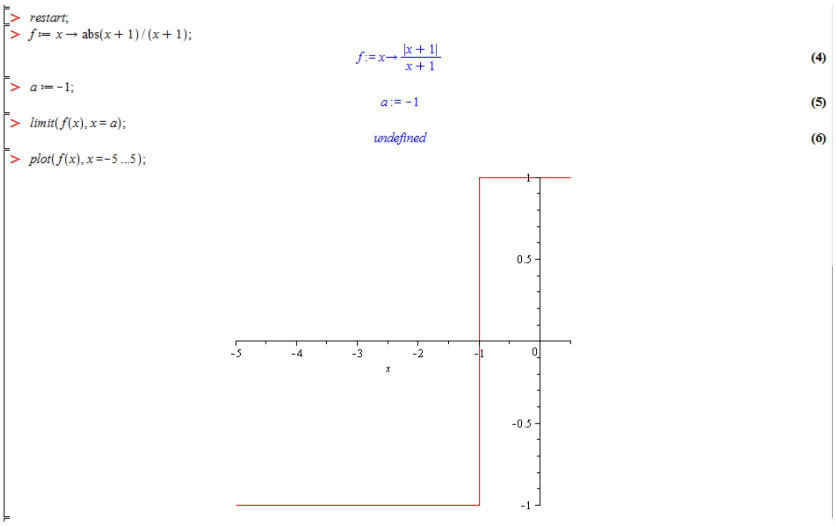
> limit(f(x),x=a);

*Undefined*

El resultado que arroja el cálculo es que no está definido el límite. Se probará lo anterior primeramente graficando la función. Grafique la función *f(x)* dando valores en el eje *x* desde -5 hasta 5.

> plot(f(x),x=-5...5);

**Imagen 40: Aplicación comando plot en la Actividad 1.2 con el Software Maple**

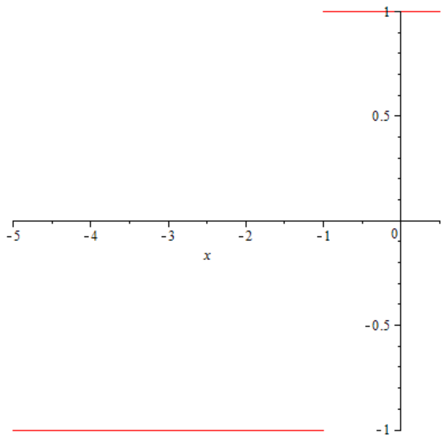



**Elaborado por:** El Investigador.

Observe que existe una discontinuidad, ahora dentro del comando de gráfico mencione que la discontinuidad es verdadera.

plot(f(x),x=-5...5,discont=true);

**Imagen 41: Aplicación comando discont=true en la Actividad 1.2 con el Software Maple.**




**Elaborado por:** El Investigador.

Se ha quitado la discontinuidad, mostrando que es verdad que la función no es continua en todo su dominio. Ahora se darán diferentes ejemplos, pero con límites que tienden al infinito.

## Actividad 1.3.

Antes de iniciar, borre la memoria del Maple, ya que de no hacerlo se seguirá utilizando la variable x, pero usted puede utilizar otra variable si lo desea, esto sólo se hace por cuestión práctica.

> restart;

Calcule el siguiente límite $\lim_{x\to\infty} \frac{7}{2x+1}$

Primeramente defina la función

> f:=x->7/(2*x+1);

$$f:=x\to \frac{7}{2x+1}$$

El valor de *x*, el cual tiende al infinito, nómbrelo por la letra *a* y la palabra ***infinity***.

> a:=infinity;

$a := \infty$

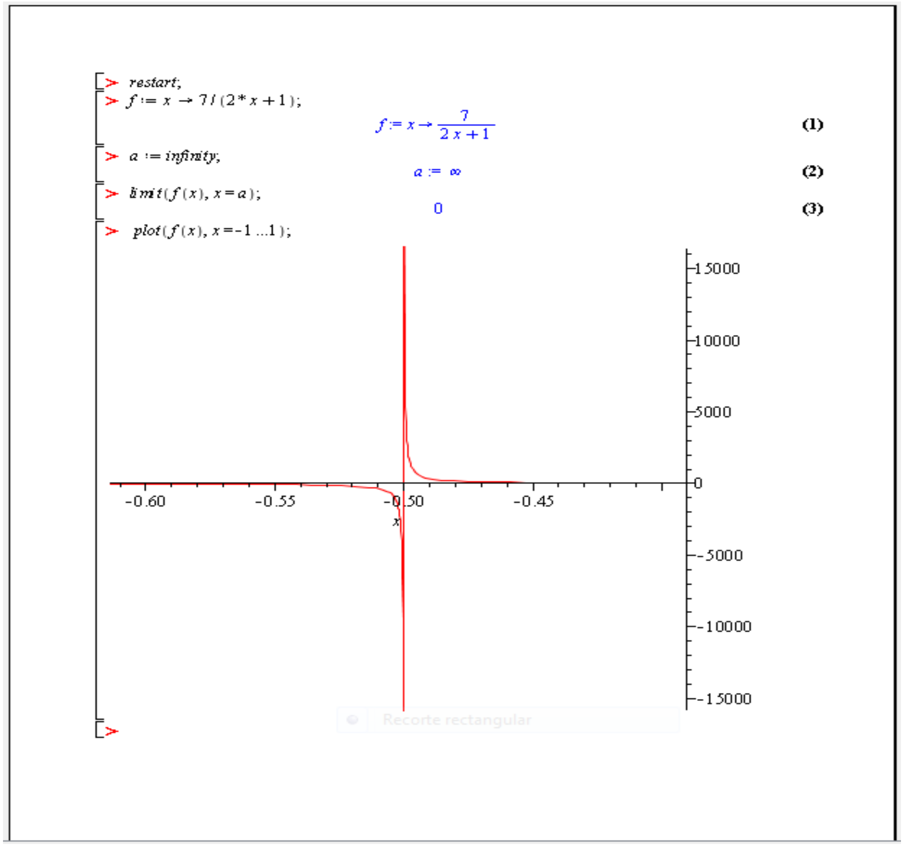
Realice el cálculo del límite y grafíquelo.

> limit(f(x),x=a);

0

> plot(f(x),x=-1...1);

**Imagen 41: Aplicación comando limit en una función de la Actividad 1.3 con el Software Maple.**




**Elaborado por:** El Investigador.

**Actividad 1.4.**

Ejemplo, calcule el siguiente límite $\lim_{x \to \infty} \frac{x^2-3x+1}{x^2+1}$

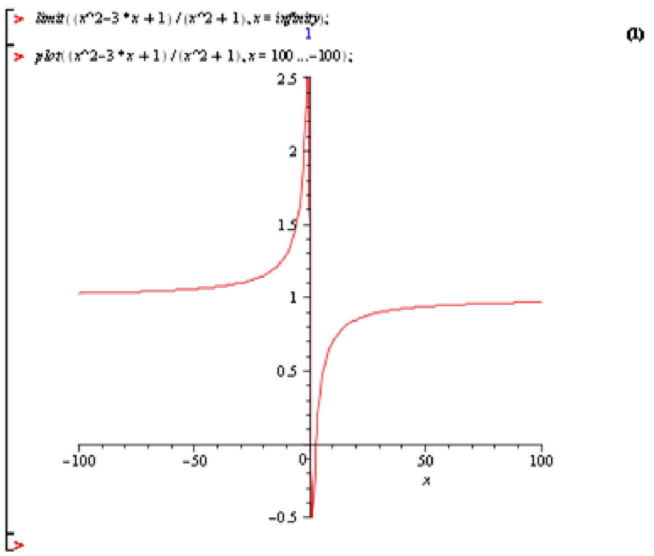
> limit((x^2-3*x+1)/(x^2+1),x=infinity);

1

Grafique el límite anterior dando valores al eje *x* de -100 hasta 100.

> plot((x^2-3*x+1)/(x^2+1),x=100...-100);

**Imagen 42: Aplicación comando plot en una función de la Actividad 1.4 con el Software Maple.**




**Elaborado por:** El Investigador.

**Existe una discontinuidad en la función anterior cuando x=1, lo cual es llamado asíntota horizontal.**

**Actividad 1.5.**

**Ahora se harán algunos ejemplos de límites infinitos, al mismo tiempo considerando los límites laterales. Calculé el siguiente límite** $\lim\limits_{x \to 0} \frac{8}{x}$

> limit(8/x,x=0);

*undefined*

Observe que el resultado muestra que no existe el límite. Se corroborará este resultado calculando el límite por la izquierda y por la derecha, para que finalmente se grafique. Para ello sólo se añade la palabra ***left*** si es por la izquierda, y la palabra *right* si el cálculo se hace por la derecha.

> limit(8/x,x=0,left);

$-\infty$

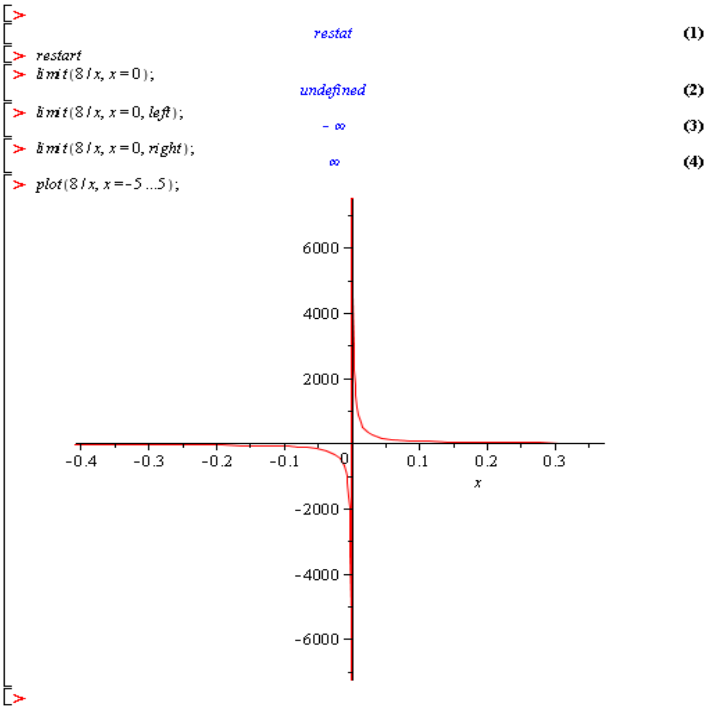
> limit(8/x,x=0,right);

$\infty$

Grafique la función dando valores al dominio de -5 hasta 5 y observe el gráfico

**> plot(8/x,x=-5...5);**

**Imagen 44: Aplicación comando plot en una función de la Actividad 1.5 con el Software Maple.**




**Elaborado por:** El Investigador.

## Actividad 1.6.

**Existen tanto asíntotas horizontales y verticales; en este caso existe una asíntota vertical en x = 0, lo cual lleva a concluir de que no existe límite para esta función.**

**Para el caso de funciones definidas por partes con el Maple es sencillo graficar para determinar si existe o no la discontinuidad para algún punto.**

**Compruebe si existe continuidad o no de la siguiente función.**

$$\boldsymbol{f(X)} = \begin{cases} \boldsymbol{x - 3\ ;\ x > 0} \\ \boldsymbol{5; x = 0} \\ \boldsymbol{x^2 + 4x - 1; x > 0} \end{cases}$$

Borre la memoria de Maple para evitar cálculos erróneos por datos almacenados en la memoria. Para crear la función anterior se debe utilizar el comando ***piecewise***, el cual se utiliza bajo el supuesto de que la función es continua, para lo cual tendremos que graficar, y a partir del gráfico ver si es continua o no la función. Se debe crear la función definida anteriormente, y cuando se declare la función, ahí se debe utilizar el comando ***piecewise***, nombrando primero la restricción y después la función.

> restart;

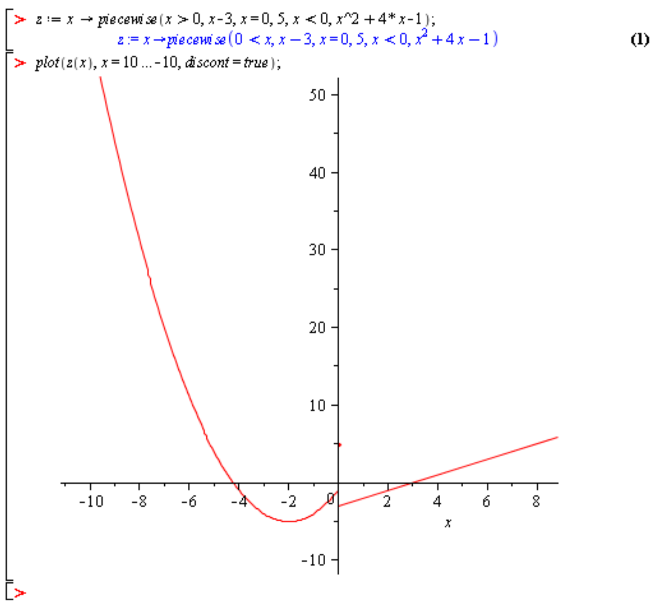
> z:=x->piecewise(x>0,x-3,x=0,5,x<0,x^2+4*x-1);

*z* := *x* _piecewise (0 < *x*, *x* – 3, *x* = 0, 5, *x* < 0, *x*2 + 4 *x* – 1)

Ahora grafique la función, bajo el supuesto de que existe discontinuidad.

>plot(z(x), x = 10 .. -10, discont = true)

**Imagen 45: Aplicación comando discont = true en una función de la Actividad 1.6 con el Software Maple.**




**Elaborado por:** El Investigador.

De acuerdo al gráfico se puede concluir que la función es discontinua, existe una sección de una parábola, un punto y parte de una línea recta. Crearemos ahora otro ejemplo donde se muestra una función continua definida por partes. Primero, borre la memoria de Maple.

**Actividad 1.7.**

```
> restart;
```

Graficar la siguiente función. Determine dónde la función  es discontinua.

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x<-4 \\ 4x+16, & -4\le x\le -2 \\ 2x^2, & -2<x\le 1 \\ 5\sqrt{x+3}-8, & 1<x<6 \\ 7, & x<6 \end{cases}$$

Se sigue el mismo procedimiento que el ejemplo anterior  utilizando el comando ***piecewise***, empezando por la restricción, seguida de la función.

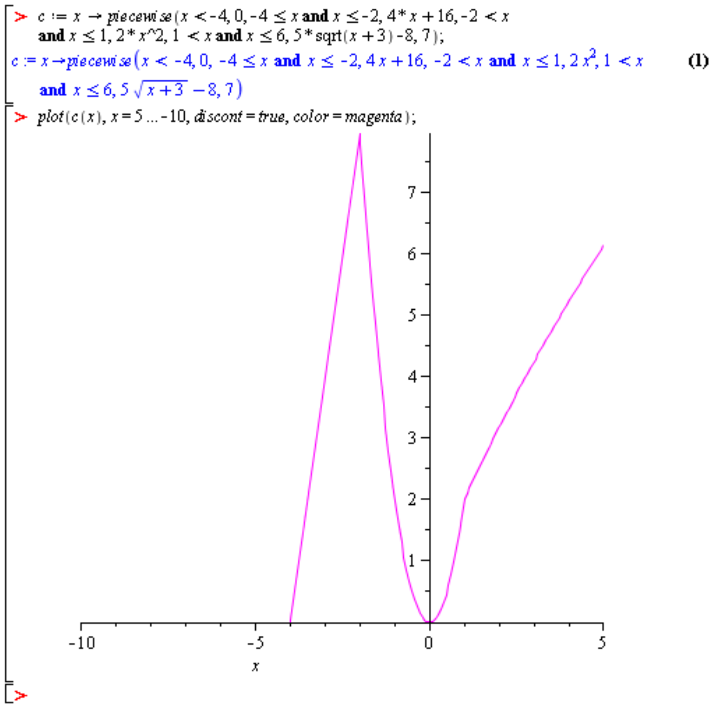
```
> c:=x->piecewise(x<-4,0,-4 <=x and x<=-2,4*x+16,-2<xand x<=1,2*x^2,1<x and x<=6,5*sqrt(x+3)-8,7);
```

$c:=x\rightarrow \mathrm{piecewise}\left(x<-4, 0, -4\le x \textbf{ and } x\le -2, 4x+16, -2<x \textbf{ and } x\le 1, 2x^2, 1<x \textbf{ and } x\le 6, 5\sqrt{x+3}-8, 7\right)$

Dibuje la gráfica de color magenta y con un dominio de -5 hasta 10

```
> plot(c(x),x=5...-10,discont=true,color=magenta);
```

**Imagen 46: Aplicación comando discont=true,color=magenta en una función de la Actividad 1.7 con el Software Maple.**




**Elaborado por:** El Investigador.

Podemos observar claramente que la función graficada anteriormente es continua. Enseguida crearemos otro ejemplo donde se muestra una función discontinua.

## Actividad 1.8.

Primero, borre la memoria de Maple con el comando restart.

> restart;

Cree la función utilizando el comando piecewise,

$$f(x) = \begin{cases} 1, x < 0 \\ 0, x = 0 \\ -1, x > 0 \end{cases}$$

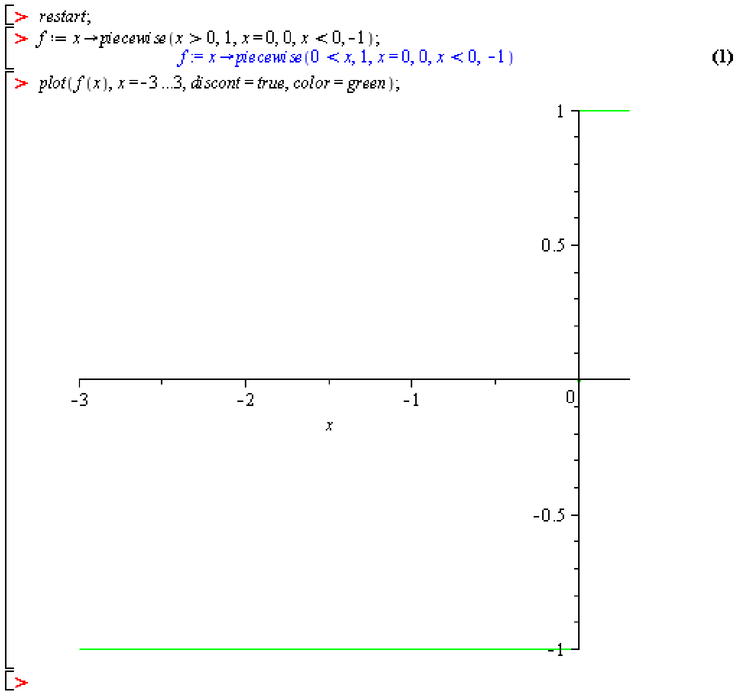
> f:=x->piecewise(x>0,1,x=0,0,x<0,-1);

f := x→piecewise (0 < x, 1, x = 0, 0, x < 0, –1)

Grafique la función para ver el punto de discontinuidad en color verde.

> plot(f(x),x=-3...3,discont=true,color=green);

**Imagen 47: Aplicación comando discont=true,color=green en una función de la Actividad 1.8 con el Software Maple**




**Elaborado por:** El Investigador.

Existe discontinuidad en la función ya que hay un evidente salto en la función definida por partes, cuando x=0. Además, formalmente podemos verificar que el límite de la función no existe cuando x=0. Por lo tanto, la función es discontinua en x=0.

**Actividad 1.9.**

Verifique si la siguiente función es continua o discontinua

$$\boldsymbol{s(x)} = \begin{cases} \boldsymbol{x^2, x < 2} \\ \boldsymbol{x + 2, x \geq 2} \end{cases}$$

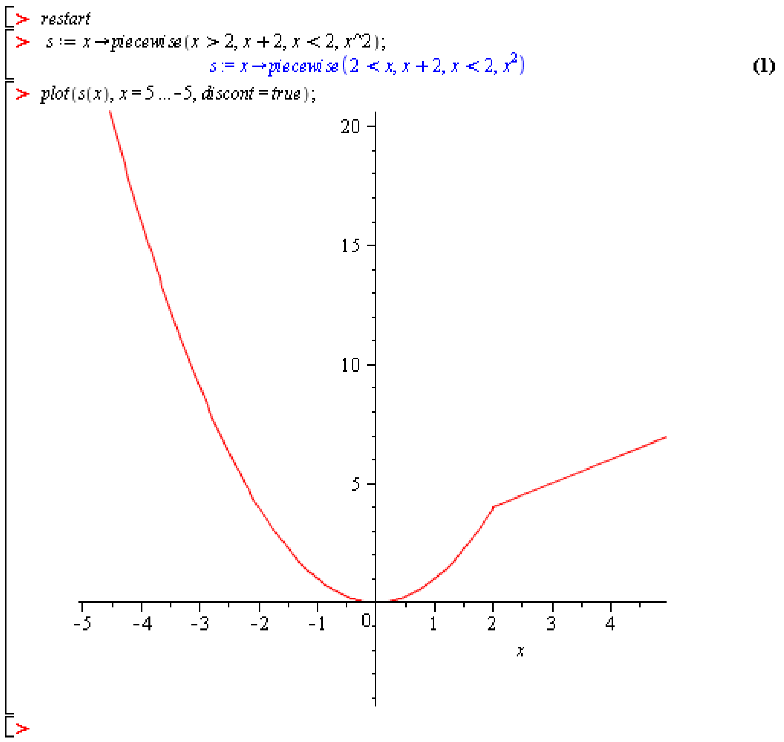
Al utilizar el comando *piecewise* y *plot* se demostrará si existe discontinuidad o no.

**> s:=x->piecewise(x>2,x+2,x<2,x^2);**

*s* := *x* _piecewise (2 < *x*, *x* + 2, *x* < 2, *x*2 )

**> plot(s(x),x=-5...5,discont=true);**

**Imagen 48: Aplicación comando *piecewise* y *plot* en una función de la Actividad 1.9 con el Software Maple**




**Elaborado por:** El Investigador.

Note que no existe ningún salto ni agujero en la gráfica de la función, por lo tanto, es continua para cualquier valor de x.

A pesar de que se mencionó en el gráfico de que la función es discontinua, se observa claramente que no es así, es continua para cualquier valor de x. También puede utilizar el comando discont (f (x), x), para encontrar la discontinuidad de una función con respecto a x.

**Actividad 1.10.**

Por ejemplo, determine la discontinuidad para la siguiente función

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{6}{x^2 - x - 6}}$$

Primero cree la función y luego utilice el comando *discont (f (x), x).*

**> f:=x->x/(x^2-x-6);**

$f := x \rightarrow \frac{6}{x^2-x-6}$

> discont(f(x),x);

{-2, 3 }

Observe que el resultado es {2,3} los cuales son los valores de $x$ donde $f\,(x)$ es discontinua.

## UNIDAD 2.

## LA DERIVADA.

En esta unidad se estudiará el procedimiento para graficar la recta tangente de una función con una variable usando el comando showtangent, también se revisarán los comandos básicos para derivar funciones a través de los comandos diff y D(f), así como la forma de evaluar la función derivada en un valor dado de x, para calcular la pendiente de la recta tangente; y finalmente se desarrollarán algunos ejemplos sencillos de aplicación en las ciencias económico administrativas.

### RECTA TANGENTE.

A continuación se utilizará comandos de la biblioteca de Maple, específicamente la biblioteca student, con el comando showtangent para mostrar cómo se grafica la ecuación de la recta tangente a la curva en un punto dado; sin tener que derivar ni calcular la pendiente en dicho punto.

Se debe llamar la biblioteca de Maple con el comando with(nombre de la biblioteca). El nombre de la biblioteca que utilizaremos es student. Como resultado de la instrucción with, se observarán los diferentes comandos que contiene la biblioteca student. Para nuestro caso se utilizará el comando showtangent.

**> with(student);**

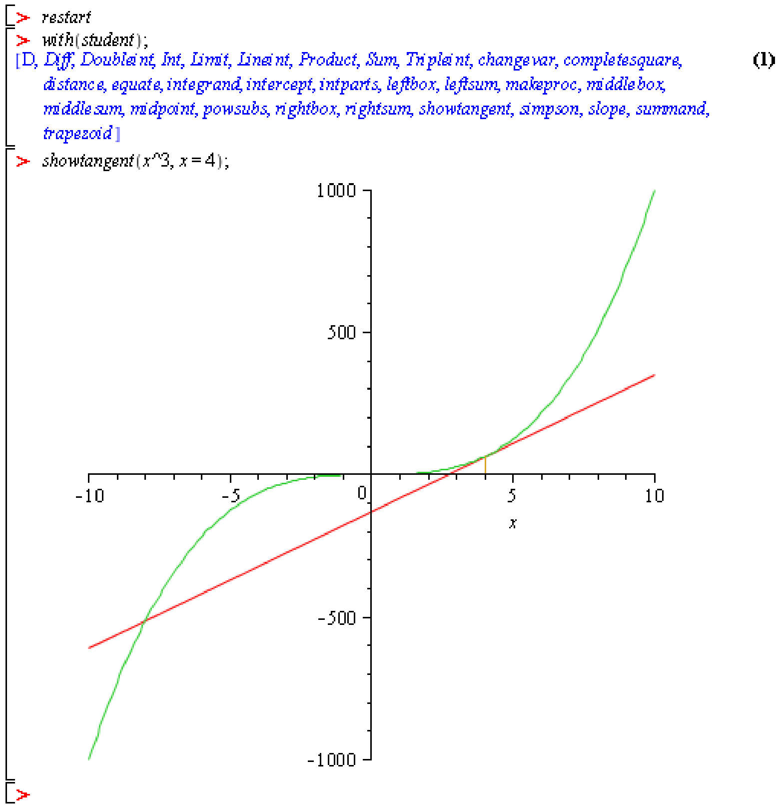
[D, *Diff, Doubleint, Int, Limit, Lineint, Product, Sum, Tripleint, changever, completesquare, distance, equiate, integrand, intercept, intparts, leftbox, leftsum, makeproc, middlebox, middlesum, midpoint, pwsubs, rigtbox, rightsum, showtangent, simpson, slope, summand, trapezoid*]

**Actividad 2**.1.

A continuación se muestra la recta tangente a la gráfica de la función f (x) = x3 cuando x = 4, utilizando el comando showtangent, mencionando primero la función y después el valor de x.

>showtangent(x^3,x=4);

**Imagen 49: Aplicación comando showtangent,en una función de la Actividad 2.1 con el Software Maple.**



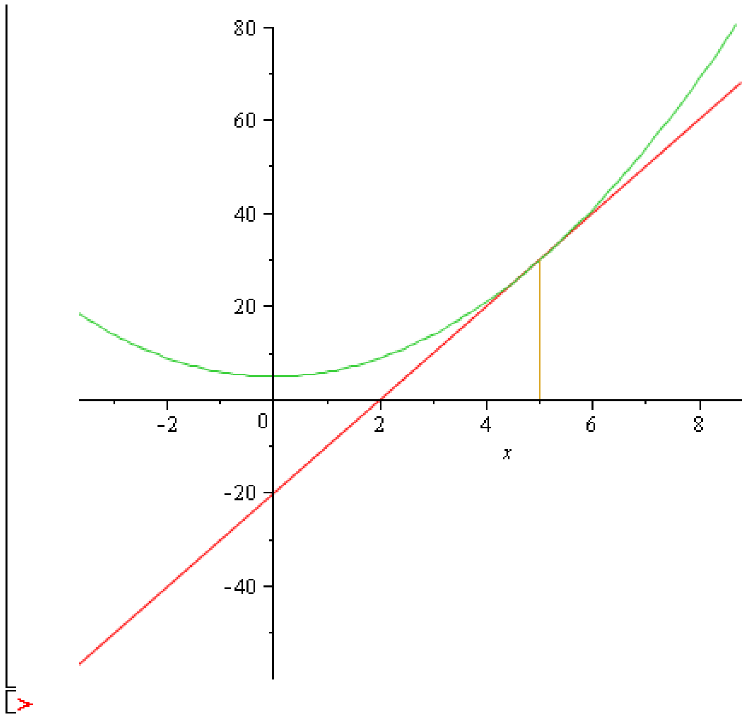

**Elaborado por:** El Investigador.

La gráfica de la función f (x) está de color verde y la recta tangente a la gráfica es de color rojo indicando con una línea vertical de color amarillo el punto donde hace tangencia la recta respecto al valor de x.

Otro ejemplo, donde hay que graficar la recta tangente a la gráfica f (x) = x2 + 5 cuando x = 5. Utilizando nuevamente el comando showtangent.

> showtangent(x^2+5,x=5);

**Imagen 50: Aplicación comando showtangent, en una función de la Actividad 2.1 con el Software Maple.**




**Elaborado por:** El Investigador.

**FÓRMULAS DE DIFERENCIACIÓN.**

La utilidad de los comandos para derivar con Maple, se emplean múltiples fórmulas de derivación con los comandos D ( f ) y diff. Para utilizar D ( f ) se deberá definir previamente la función. La ventaja de este comando es que el resultado se puede volver a llamar después. La sintaxis diff se utiliza para derivar sin necesidad de definir previamente la función, sin embargo, no se puede volver a llamar posteriormente este resultado. Primero, borre la memoria de Maple con el comando restart.

**Actividad 2.2.**

**> restart;**

Se empezará calculando la derivada por incrementos, después ya se utilizarán los comandos antes mencionados.

Escriba la función $f\ (x) = x^2$

> f:=x->x^2;

$f := x \rightarrow x2$

Calcule las derivadas por incrementos, utilizando

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

> (f(x+h)-f(x))/h;

$$\frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$$

Expanda la función anterior con el símbolo $\%$ (que significa el valor anteriormente calculado) para obtener el resultado:

> expand(%);

$2\ x + h$

Finalmente, calcule el límite cuando $h$ tiende a cero de la función que expandió, llamándolo con el símbolo $\%$, para obtener finalmente la primera derivada.

> f´(x)=limit(%,h=0);

$f'\ (x) = 2\ x$

En el siguiente ejemplo se calcula la derivada de la función $f(x) = x$ utilizando el comando $D(f)$, donde $D$ significa la primera derivada de $f$, que es la función a derivar.

Primero se borra la memoria de Maple.

```
> restart;
> f:=x->x;
```

$f := x \rightarrow x$

Utilice el comando $D(f)$ para derivar la función anterior.

```
> D(f);
```

1

El resultado de la primera derivada de la función es

$f(x)= x$ es $f'(x) = 1$.

Ahora se calculará la primera derivada para la misma función, sólo que ahora con el comando *diff()*, el cual se utiliza sin necesidad de nombrar la función, para ello se introduce la función y se indica con respecto a qué variable se va a derivar.

El comando *diff*() tiene como primer argumento la función a derivar, la variable con respecto a la cual se va a derivar la función, y como segundo argumento la variable con respecto a la cual se deriva.

```
> diff(x,x);
```

1

Es el mismo resultado que en el ejemplo anterior, sólo que no es necesario escribir la función. Vea el siguiente ejemplo:

Calcule la primera derivada de la función *f*^*x*h = *x* primero con el comando $D(f)$ y después con el comando *diff()*. Observe los resultados:

```
> f:=x->sqrt(x);
```

$f := x \to \sqrt{x}$

> D(f);

$x \to \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}$

> diff(sqrt(x),x);

$\frac{1}{2\sqrt{x}}$

El primer resultado está en forma de función y el segundo es directo. Si se necesita el primer comando, es para posteriormente sustituir valores, lo cual se verá en el siguiente laboratorio. Si utiliza el segundo comando probablemente
se desee el valor para no considerar la primera derivada como función.
Encuentre la primera derivada de $f\ (x)=\ x(3x^2\ -10x+\ 7\ )$ utilizando el comando *diff()*

> diff(x*(3*x^2-10*x+7),x);

3*x* 10*x* 7 *x* 6*x* 10 2 - + + ^ - h

> expand(%);

9 *x*2 − 20 *x* + 7

**Actividad 2.3.**

A continuación se da otro ejemplo para encontrar la primera derivada, donde se utiliza el comando ***simplify*** y ***expand***. Borre la memoria de Maple

> restart;

Encuentre la primera derivada de$f\,(q) = \frac{4q^3+7q-4}{q}$ utilizando el comando ***diff***

> diff((4*q^3+7*q-4)/q,q);

$\frac{12q^2 + 7}{q} + \frac{4q^3 + 7q - 4}{q^2}$

Observe que se obtiene una resta de fracciones, por lo cual se procede a simplificar la expresión con el comando *simplify* y el operador *%*

> simplify(%);

$$\frac{4(2q^3+1)}{q^2}$$

Ahora ya está simplificada la expresión, pero todavía hay que expandir el resultado anterior para obtener finalmente la primera derivada de *f(q)*

> expand(%);

$$8q+\frac{4}{q^2}$$

Derive la siguiente función $f(x)= x^5 (x-4)$

> diff(x^5*(x-4)^5,x);

$5\,x^4\,(x-4)^5+5\,x^5\,(x-4)^4$

El resultado es la primera derivada de la función, pero no está factorizada, por lo cual se utilizará el comando *factor* para factorizar la expresión y así tener un mejor resultado.

> factor(%);

$10\,x^4\,(x-2)\,(x-4)^4$

**Actividad 2.4.**

A continuación se darán diferentes ejemplos para derivar funciones logarítmicas y exponenciales. Derive $f(x)= \ln(x^{100})$

> diff(ln(x^100),x);

$$\frac{100}{x}$$

Encuentre $f'(x) = x\ de\ f(x) = \frac{x^2}{\ln(x)}$

> diff(x^2/ln(x),x);

El resultado es una resta de fracciones, por lo cual se tendrá que utilizar el comando *factor* para factorizar la expresión.

> factor(%);

$$\frac{x\,(2\,ln(\,x)\,-\,1\,)}{ln(\,x)^2}$$

**Actividad 2.5.**

El siguiente ejemplo es para encontrar la primera derivada de una función logarítmica que tiene diferente base. Encuentre la primera derivada de:

$f(x) = log_2(x^2 + 4)$

> diff(log[2](x^2+4),x);

$$\frac{2\,x}{(x^2 +\ 4\,)\ln\,(2\,)}$$

Hallar para $f'(x)$ para $f(x) = 7e^x$

> diff(7*exp(x),x);

$7e^x$

¿Cuál es la primera derivada de *f x x e* 2 *x*2 = ^ h - ?

> diff(x^2*exp((-x^2)),x);

$2xe^{(-x^2)} - 2x^3e^{(-x^2)}$

El resultado es correcto, sin embargo, se puede factorizar y simplificar la expresión.

> factor(%);

$xe^{(-x^2)}\,(\,x - 1\,)\,(\,x + 1\,)$

> simplify(%)

$xe^{(-x^2)}(-1+x^2)$

## EVALUACIÓN DE LA DERIVADA.

En este apartado aprenderemos que el comando *D(f)* es útil para evaluar la primera derivada. A continuación se dan algunos ejemplos.

**Actividad 2.6.**

Encuentre la pendiente de la función $f(x) = 3x^2+4x-8$ en los puntos indicados (0,-8), (2,12) y (-3,7).

Se borrará la memoria de Maple

> restart;

Defina la función $f(x) = 3x^2+4x-8$

> f:=x->3*x^2+4*x-8;

$f := x \rightarrow 3\,x^2 + 4\,x - 8$

Utilice el comando *D(f)* y derive la función enseguida nombre entre paréntesis el valor que en él se requiere evaluar la derivada, para este caso es cero

> D(f)(0);

4

El resultado es 4, el cual es el valor de la pendiente en el punto (0,8), sin necesidad de conocer primero la derivada. Sin embargo, si sólo se utiliza el comando *D(f)*, se obtendrá la primera derivada como una función, lo cual se hará en el siguiente paso:

> D(f);

$x \rightarrow 6\,x + 4$

Ahora se evaluará el valor de *x* para los demás puntos, lo cual dará como resultado la pendiente, respectivamente.

> D(f)(2);

16

> D(f)(-3);

-14

En el siguiente ejemplo se utilizará la biblioteca de Maple para graficar la ecuación de la recta tangente.

**Actividad 2.7.**

Definimos $f(x) = 4x^2 + 5x + 6$. Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto (1,15) y grafíquela. Borre la memoria de Maple

> restart;

Nombre la función $f(x) = 4x^2 + 5x + 6$

> f:=x->4*x^2+5*x+6;

$f := x \to 4\,x^2 + 5\,x + 6$

Derive la función y evalúela cuando $x = 1$ para encontrar la pendiente de la recta

> D(f)(1);

13

Encuentre la ecuación de la recta tangente utilizando el comando *solve*

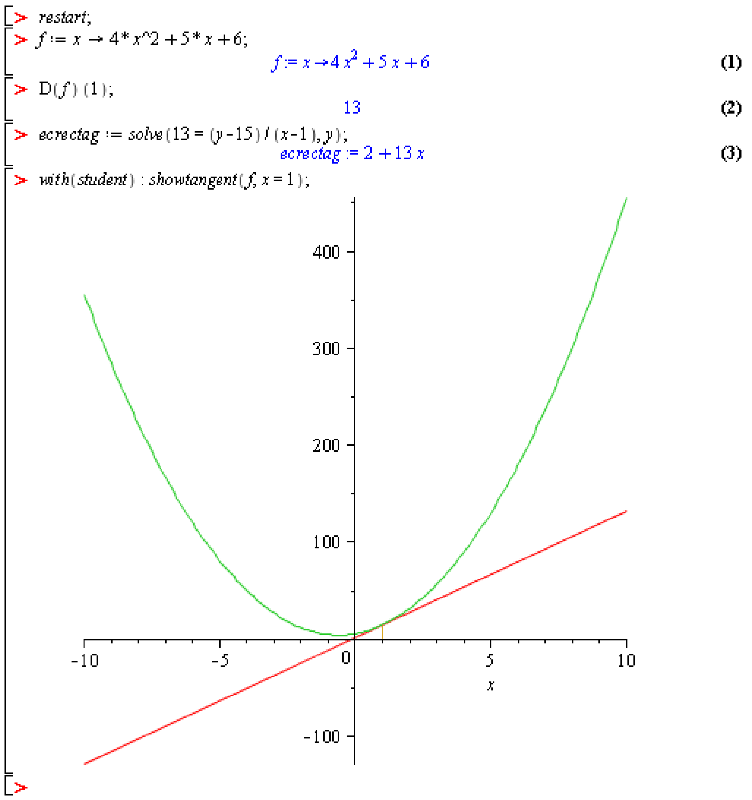
> ecrectag:=solve(13=(y-15)/(x-1),y);

$ecrectag := 13\,x + 2$

Grafique la función y la recta tangente a ella utilizando la biblioteca de Maple *with(student)* y el comando *showtangent*

> with(student):showtangent(f,x=1);

**Imagen 51: Aplicación comando *with(student)* , *showtangent,* en una función de la Actividad 2.7 con el Software Maple**




**Elaborado por:** El Investigador.

A continuación se dan algunas aplicaciones de la derivada en las ciencias económico administrativas.

## Actividad 2.8.

Determine el costo marginal de c = q2 + 50q + 1000 cuando q = 15, q = 16 y q =17.

Grafique la función.

Los pasos a realizar son los siguientes:

1. Borre la memoria de Maple.
2. Derive la función con el comando D() para encontrar el costo marginal.
3. Evalúe la derivada en cada punto con el único fin de encontrar el valor del costo marginal cuando se producen q unidades.
4. Obtenga de la biblioteca de Maple el comando plots para graficar el costo y el costo marginal. Utilice en lugar de q la variable x para que se pueda graficar y establezca un dominio de -100 hasta 100, y el rango de -1000 a 1000.

**PASO 1**

> restart;

**PASO 2**

> c:=q->q^2+50*q+1000;

$c := q \to q^2 + 50\, q + 1000$

> D(c);

$q \to 2\, q + 50$

La función anterior representa el costo marginal.

**PASO 3**

> D(c)(15);

80

> D(c)(16);

82

> D(c)(17);

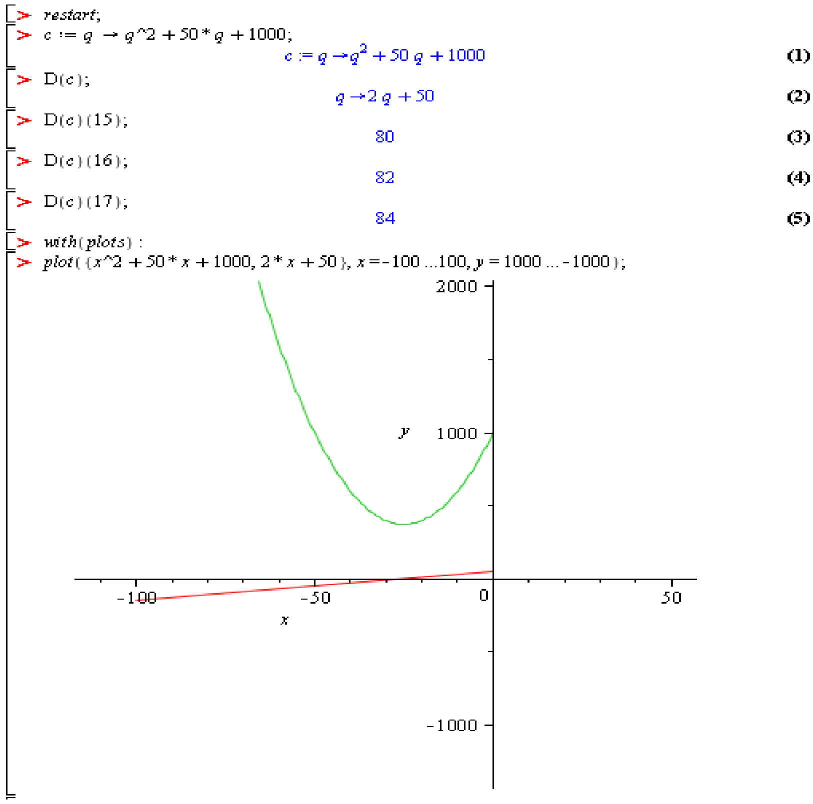
84

**PASO 4**

> with(plots):

> plot({x^2+50*x+1000,2*x+50},x=-100...100,y=-1000...1000);

**Imagen 52: Aplicaciones de la derivada en las ciencias económico administrativas, en una función de la Actividad 2.8 con el Software Maple.**




**Elaborado por:** El Investigador.

## Actividad 2.9.

Observe que el costo es una curva de color verde y el costo marginal es una recta de color rojo, las cuales nunca se cruzan, luego entonces, no se cumple con la teoría económica de producción del mínimo costo. Todo lo contrario, cada vez que se aumenta una unidad de producción, el costo marginal aumenta.

Calcule el producto del ingreso marginal. Cuando

$$q = \frac{10m^2}{\sqrt{m^2 + 19}}$$

$$p = \frac{900}{q + 9}$$

Y m=9 donde m es el número de empleados a contratar, q la cantidad a producir y p el precio.

Los pasos a seguir en este caso son:

1. Cree la función q y p.
2. Multiplique la función p por q para obtener el ingreso.
3. Evalúe q cuando m=9, nombrando el valor con la letra a.
4. Nombre el resultado de p por q, el cual es el ingreso con la letra r como una función.
5. Derive la función ingreso para obtener la función de ingreso marginal.
6. Evalúe el ingreso marginal cuando q = a y nómbrela por la letra b.
7. Calcule la derivada de q con respecto a m.
8. Evalúe la derivada de q con respecto a m cuando m = 9, nombrándola con la letra c.
9. Multiplique b*c y al resultado llámelo d. El cual será el producto del ingreso marginal.
10. Finalmente, utilice el comando evalf para evaluar el producto del ingreso marginal numéricamente.

**PASO 1**

```
> q:=m->10*m^2/(m^2+19)^(1/2);
```

$$q := m \to \frac{10m^2}{\sqrt{m^2 + 19}}$$

```
> p:=q->900/(q+9);
```

$$p := q \to \frac{900}{q + 9}$$

**PASO 2**

> p(q)*q;

$$\frac{900q}{q+9}$$

**La función anterior representa el ingreso.**

**PASO 3**

> a:=q(9);

$$a := \frac{81\sqrt{100}}{10}$$

**PASO 4**

> r:=q->900*q/(q+9);

$$r := q \rightarrow \frac{900q}{q+9}$$

**PASO 5**

> D(r);

$$q \rightarrow \frac{900}{q+9} - \frac{900q}{(q+9)^2}$$

La función anterior expresa el ingreso marginal.

**PASO 6**

> b:=D(r)(a);

$$b := \frac{900}{\frac{81\sqrt{100}}{10}+9} - \frac{7290\sqrt{100}}{\left(\frac{81\sqrt{100}}{10}+9\right)^2}$$

**PASO 7**

**> D(q);**

$$c := \frac{1071\sqrt{100}}{1000}$$

**PASO 8**

> c:=D(q)(9);

$$c := \frac{1071\sqrt{100}}{1000}$$

**PASO 9**

> d:=b*c;

$$d := \frac{1071\left(\frac{900}{\frac{81\sqrt{100}}{10}+9} - \frac{7290\sqrt{100}}{\left(\frac{81\sqrt{100}}{10}+9\right)^2}\right)\sqrt{100}}{1000}$$

**PASO 10**

> evalf(d);

10.71000001

Con este resultado podemos decir que, dadas las funciones anteriores, cuando se contrata un trabajador adicional (el trabajador número 10), se espera que el ingreso aumente aproximadamente en 10.7 unidades.

**DIFERENCIACIÓN.**

Se utilizara las diferentes técnicas avanzadas de derivación; comenzaremos revisando la manera de obtener las segundas derivadas, terceras derivadas, y en general las enésimas derivadas de una función con el comando ***diff*** más el parámetro ***$***.

Después se procederá a examinar la manera de calcular las derivas implícitas de una función utilizando el comando ***implicitdiff***, calculando también sus derivadas de orden superior; para finalizar el laboratorio se explicará el comando para graficar funciones implícitas ***implicitplot***.

**DERIVADAS DE ORDEN SUPERIOR.**

Al aplicar ejemplos de derivadas de orden superior. En otras palabras, encontrar la segunda, tercera, cuarta o enésima derivada de una función.

Se empezará como anteriormente se ha venido haciendo, borrando la memoria de Maple con el comando ***restart.***

> restart;

**Actividad 2.10.**

Calcule la sexta derivada de la función

$f(x) = x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1$

Primero defina la función.

> f:=x->x^5-x^4+x^3-x^2+x-1;

$f := x \to x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1$

Encuentre la primera derivada de *f(x).*

> diff(f(x),x);

$5x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 2x + 1$

Ahora se resolverá la segunda derivada de *f(x)*. Para ello, después de mencionar la función a derivar, utilice la variable respecto a la cual derivar seguida del signo de pesos y el número 2, *x$2*, lo cual indica que se quiere obtener la segunda derivada, sin obtener la primera derivada.

> diff(f(x),x$2);

$20x^3 - 12x^2 + 6x - 2$

Obtenga la tercera derivada, siga derivando hasta que llegue a cero, lo cual indicará que es la enésima.

> diff(f(x),x$3);

$60x^2 - 24x + 6$

> diff(f(x),x$4);

$120x - 24$

> diff(f(x),x$5);

120

> diff(f(x),x$6);

0

**DIFERENCIACIÓN IMPLÍCITA.**

Existen formas de derivar funciones con ciertas características, en las cuales se pueden usar diversas técnicas que permitan simplificar o modificar las funciones para luego derivarlas. Tal es el caso de la derivación implícita.

La derivación implícita es una técnica usada para funciones que están expresadas implícitamente, en las cuales no está despejada la variable dependiente en función de la independiente, por ejemplo: $3x + y^2 = 4x^2 + y$ . Aprenderá a utilizar el comando *implicitdiff* para diferenciar funciones de este tipo.

**Actividad 2.11.**

Utilice el comando *restart* para borrar la memoria del *software*.

> restart;

Diferencie la siguiente expresión $x^2 + y^2 - 4 = 0$ , con respecto a $x$.

Utilice el comando *implicitdiff* donde el primer argumento de dicho comando es la ecuación como segundo argumento la variable dependiente y el tercer argumento la variable respecto a la cual derivar.

> implicitdiff(x^2+y^2-4=0,y,x);

$$-\frac{x}{y}$$

Ahora diferencie con respecto a *y* la siguiente expresión

$x^3 + 4xy^2 - 27 = y^4$.

> implicitdiff(x^3+4*x*y^2-27=y^4,y,x);

$$-\frac{3\,x^2 + 4y^2}{4y(-y^2 + 2x)}$$

Resuelva el siguiente ejemplo. Encontrar la pendiente de la curva $x\,3 = (y - x^2)^2$ en *(1,2)*;

> restart;

> implicitdiff(x^3=(y-x^2)^2,y,x);

$$\frac{x\,(-3\,x - 4\,y + 4\,x^2)}{2(-y + x^2)}$$

Utilice el comando *subs* para sustituir los valores de *x* e *y*, para encontrar la pendiente.

> subs({x=1,y=2},%);

$$\frac{7}{2}$$

## DERIVADAS DE ORDEN SUPERIOR IMPLÍCITA.

A continuación se resolverán ejercicios para encontrar la enésima derivada de una función implícita. De hecho, es el mismo procedimiento que se hace con respecto a una variable, sólo que aquí se utiliza el comando ***implicitdiff.***

**Actividad 2.12.**

Encuentre la segunda derivada de la expresión $x^2 + 4y^2 = 4$ respecto a $x$, evalúe cuando $x = 4$ e $y = 1$ utilizando el comando ***implicitdiff*** más el parámetro que indica el orden de derivación; después utilice el comando ***eval*** para evaluar el resultado en los valores dados.

```
> implicitdiff(x^2+4*y^2=4,y,x$2);
```

$$-\frac{1}{16}\frac{x^2+4y^2}{y^3}$$

```
> eval(%,[x=4,y=1]);
```

$$-\frac{5}{4}$$

Encuentre la tercera derivada de la expresión $\sqrt{x} + y^2 = 5$ respecto a x

```
>implicitdiff(sqrt(x)+y^2=5,y,x$3);
```

$$-\frac{3(4y^4x^3-2x^{\left(\frac{7}{2}\right)}y^2+x^4}{64y^5x^{\left(\frac{11}{2}\right)}}$$

## GRAFICACIÓN DE FUNCIONES IMPLÍCITAS.

En el siguiente apartado aprenderá a graficar funciones implícitas.

Para poder graficar funciones implícitas, borre la memoria de Maple y llame la biblioteca de gráficos.

> restart;

> with(plots);

[*animate, animate3d, animatecurve, arrow, changecoords, complexplot, complexplot3d, conformal, conformal3d, contourplot, contourplot3d, coordplot, coordplot3d, densityplot, display, filedplot, fieldplot3d, gradplot, gradplot3d, graphplot3d, implicitplot, implcitplot3d, inequal, interactive, interactiveparams, intersectplot, listcontplot, listcontplot3d, listdensityplot, listplot, listplot3d, loglogplot, logplot, matrxplot, multiple, odeplot, pareto, plotcompare, pointplot, pointplot3d,polarplot, plygonplot, polygonplot3d, polyhedra_supported, polyhedraplot, rootlocus,seilogplot, setcolors, setoptions, setoptions3d, spacecurve, sparsematrixplot, surfdata, extplot, textplot3d, tubeplot]*

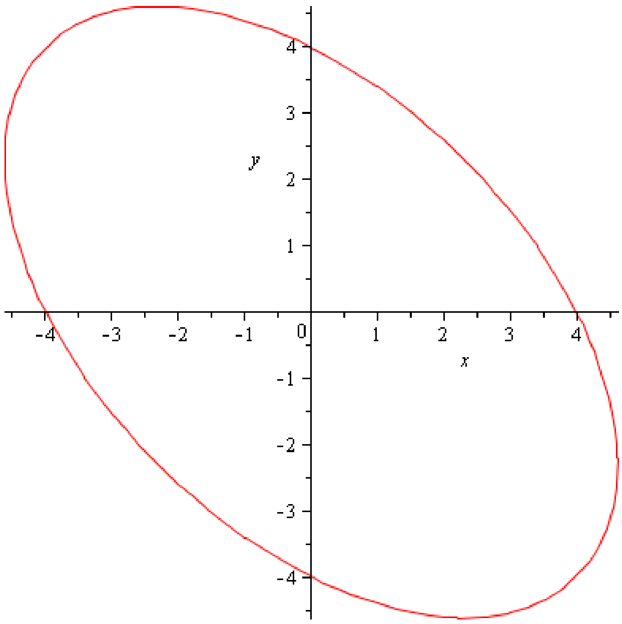
**Actividad 2.13.**

**Grafique la siguiente función $x^2$ +xy +$y^2$ =16 con un dominio y codominio (o rango) de -5 a 5. Utilice el comando implicitplot.**

**> implicitplot(x^2+x*y+y^2=16,x=5...-5,y=5...-5);**

**Imagen 52: Grafica de función implícita, en una función de la Actividad 2.13 con el Software Maple.**

```
> restart
> restart;
> implicitplot(x^2 + x*y + y^2 = 16, x = -5 ...5, y = -5 ...5);
                    implicitplot(x^2 + x y + y^2 = 16, x = -5 ..0.5, y = -5 ..0.5)          (1)
> restart;
> with(plots);
[animate, animate3d, animatecurve, arrow, changecoords, complexplot, complexplot3d,   (2)
   conformal, conformal3d, contourplot, contourplot3d, coordplot, coordplot3d, densityplot,
   display, dualaxisplot, fieldplot, fieldplot3d, gradplot, gradplot3d, implicitplot,
   implicitplot3d, inequal, interactive, interactiveparams, intersectplot, listcontplot,
   listcontplot3d, listdensityplot, listplot, listplot3d, loglogplot, logplot, matrixplot, multiple,
   odeplot, pareto, plotcompare, pointplot, pointplot3d, polarplot, polygonplot, polygonplot3d,
   polyhedra_supported, polyhedraplot, rootlocus, semilogplot, setcolors, setoptions,
   setoptions3d, spacecurve, sparsematrixplot, surfdata, textplot, textplot3d, tubeplot]
> implicitplot(x^2 + x*y + y^2 = 16, x = 5 ... -5, y = 5 ... -5);
```



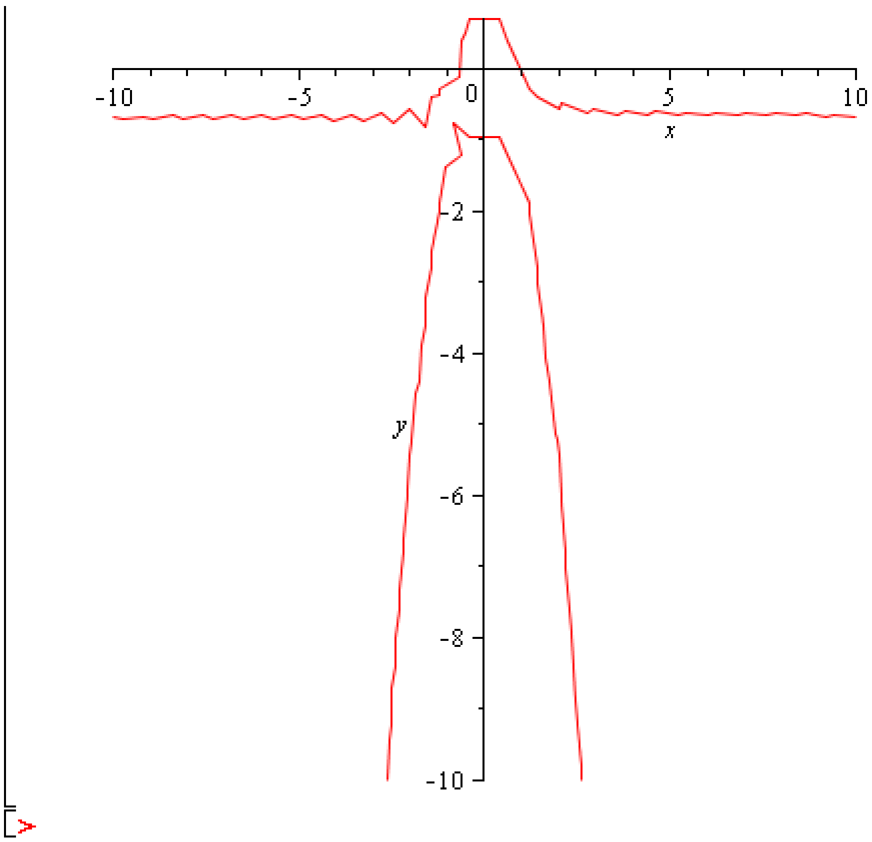

**Elaborado por:** El Investigador.

## Actividad 2.14.

En el siguiente ejemplo se graficará la siguiente expresión $x^2 + 1.5yx^{2+}y^2 = 1$, como se hizo en el ejemplo anterior.

**> implicitplot(x^2+1.5*y*x^2+y^2=1,x=-10...10,y=-10...10);**

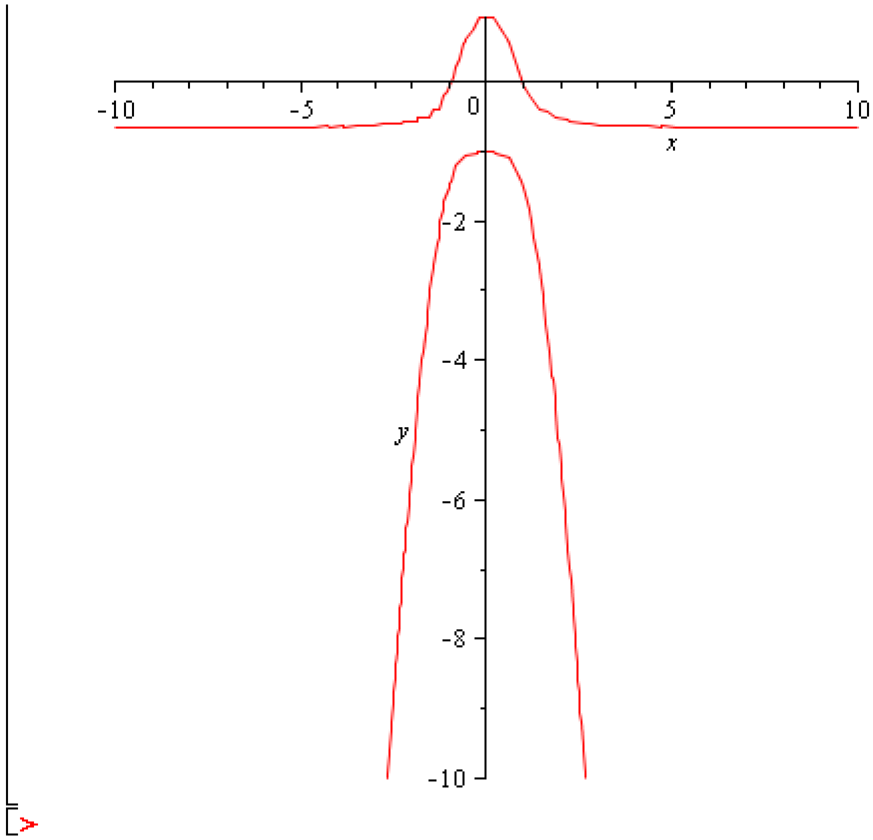
**Imagen 53: Grafica de función implícita, en una función de la Actividad 2.14 con el Software Maple.**




**Elaborado por:** El Investigador.

**>implicitplot(x^2+1.5*y*x^2+y^2=1,x=-10...10,y=-10...10,grid=[50,50]);**

**Imagen 54: Grafica función implícita con el comando grid, en una función de la Actividad 2.14 con el Software Maple.**




**Elaborado por:** El Investigador.

**Note que en este caso la gráfica es mucho más suave y nítida que la anterior, esto debido a la utilización del argumento grid que aumenta o disminuye la resolución de la gráfica.**

**MÁXIMOS Y MÍNIMOS.**

Con este tema se aprenderá a calcular los intervalos donde la función es creciente y/o decreciente, así también el punto donde existen máximos y/o mínimos relativos con el criterio de la primera derivada utilizando el comando

*CriticalPoints*. Además se estudiará cómo determinar los intervalos donde la función es cóncava hacia abajo o cóncava hacia arriba, puntos de inflexión con el comando *InflectionPoints* y se comprobará con el criterio de la segunda derivada que existe un máximo o un mínimo.

**MÁXIMOS Y MÍNIMOS RELATIVOS**

**Actividad 2.15.**

En el siguiente ejemplo $f\ (x\ ) =\ 18x - \frac{2x^3}{3}$ se calcularán los intervalos donde la función es creciente o decreciente, así como si tiene un máximo o un mínimo con el criterio de la primera derivada, y después con la segunda derivada.

Primero defina la función $f\ (x\ ) =\ 18x - \frac{2x^3}{3}$

> restart;

> f:=x->18*x-2/3*x^3;

*f*:=→ 18 $x$- $\frac{2}{3}x^3$

Primero se encontrarán los puntos críticos. Para ello se utilizará la biblioteca *with(Student[Calculus1])*, y posteriormente el comando *CriticalPoints(f(x),x).*

> with(Student[Calculus1]);

*[AntiderivativePlot, AntiderivativeTutor, ApproximateInt, ApproximateIntTutor, ArcLength, ArcLengthTutor, Asymptotes, Clear, CriticalPoints, CurveAnalysisTutor, DerivativePlot, DerivativeTutor, DiffTutor, ExtremePints, FunctionAverage,FunctionAverageTutor, FunctionChart, FunctionPlot, GetMessage, GetNumProblems, GetProblem, Hint, InflectionPoints, IntTutor, Integrand, InversePlot, InverseTutor, LimitTutor, MeanValueTheorem, Mean ValueTheoremTutor, NewtonQuotient, NewtonsMethod, NewtonsMethodTutor, PointInterpolation, RiemannSum, RollesTheorem, Roots, Rule, Show,*

*ShowIncomplete, ShowSteps, Summand, SurfaceOfRevolution, SurfaceOfRevolutionTutor, Tangent, TangentSecantTutor, TagentTutor, TaylorApproximation, TaylorApproximationTutor, Understand, Undo, VolumeOfRevolution, VolumeOfRevolutionTutor, WhatProblem*]

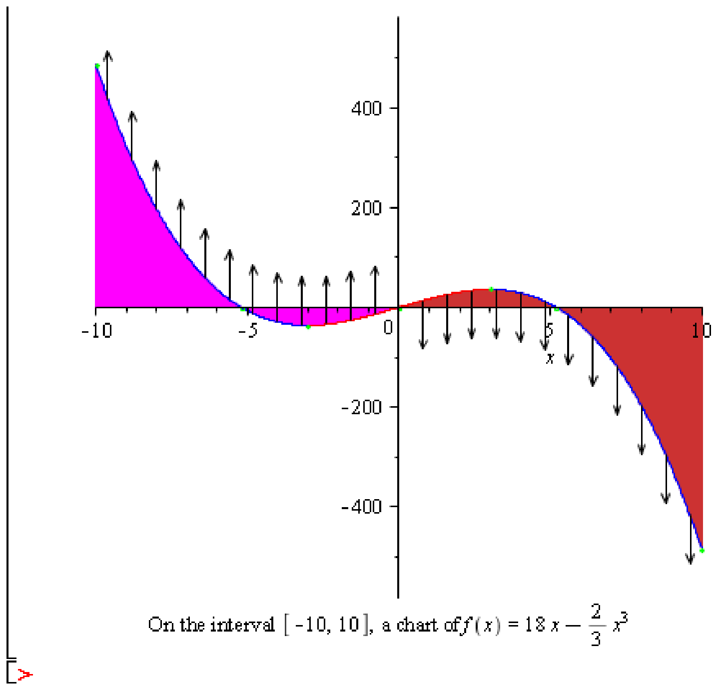
> CriticalPoints(f(x),x);

[ -3, 3 ]

Ahora se graficará la función para conocer el intervalo donde la función es creciente o decreciente y si hay máximos o mínimos. Para ello se utilizará el comando *Functionchart(f(x))*.

**> FunctionChart(f(x));**

**Imagen 55: Grafica función por intervalo, en una función de la Actividad 2.15 con el Software Maple.**




**Elaborado por:** El Investigador.

Observe que el gráfico arroja un intervalo por *default* de *(-10,10).* Con ello determina dónde la función es decreciente o creciente. Se puede ver cómo se marca con una señal los puntos críticos. Apreciando que la función es decreciente de *(-infinity,-3)* y de *(3,infinity)*; creciente de *(-3,3).* Con ellos se tiene un mínimo en $x = -3$ . Para tener la coordenada hay que sustituir estos valores en la función original. Para eso evalué la función con el comando *eval().*

```
> eval(f(x),x=-3),eval(f(x),x=3);
-36, 36
```

Luego entonces, la función tiene un mínimo relativo en *(-3,36)* y un máximo relativo *(3,36)*

Además, con el gráfico se puede obtener la concavidad y el punto de inflexión. La concavidad de la función se muestra con flechas, por lo tanto, es cóncava hacia arriba en el intervalo *(-infinity,0)* y es cóncava hacia debajo de *(0,infinity).*

Para determinar el punto de inflexión se utilizará el comando *InflectionPoints(f(x)),* el cual dará el valor de *x;* luego se sustituirá ese valor en *f(x)* para conocer el punto.

```
> InflectionPoints(f(x));
[0 ]
```

Ahora se sustituirá el valor en la función original para saber el valor de *f(x).*

```
> eval(f(x),x=0);
0
```

Entonces hay un punto de inflexión en el punto *(0,0).* En el ejemplo siguiente calcule los intervalos donde la función es creciente, decreciente, donde hay máximos o mínimos, donde es cóncava hacia abajo, cóncava hacia arriba y puntos de inflexión de $f(x) = 4 + 3x - x^3$.

```
> restart;
```

> with(Student[Calculus1]);

[*AntiderivativePlot, AntiderivativeTutor, ApproximateInt, ApproximateIntTutor, ArcLength, ArcLengthTutor, Asymptotes, Clear, CriticalPoints, curveAnalysisTutor, DerivativePlot, DerivativeTutor, DiffTutor, ExtremePints, FunctionAverage, FunctionAverageTutor, FunctionChart,FunctionPlot, GetMessage, GetNumProblems,GetProblem, Hint, InflectionPoints, IntTutor, Integrand, InversePlot, InverseTutor, LimitTutor,MeanValueTheorem, Mean ValueTheoremTutor,*
*NewtonQuotient, NewtonsMethod, NewtonsMethodTutor,PointInterpolation, RiemannSum, RollesTheorem, Roots,Rule, Show, ShowIncomplete, ShowSteps, Summand, SurfaceOfRevolution, SurfaceOfRevolutionTutor,Tangent, TangentSecantTutor, TagentTutor, TaylorApproximation, TaylorApproximationTutor,Understand, Undo, VolumeOfRevolution, VolumeOfRevolutionTutor, WhatProblem*]

**Actividad 2.16.**

> f:=x->4+3*x-x^3;

$f := x \rightarrow 4 + 3\,x - x^3$

Se encontrarán los valores críticos de la función.

> CriticalPoints(f(x));

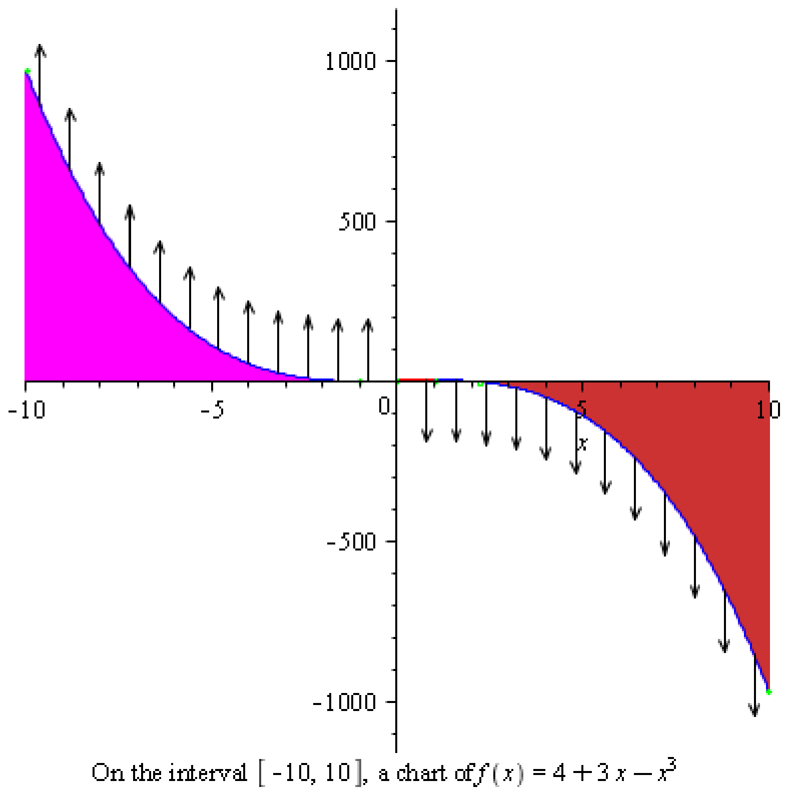
[ -1, 1 ]

Ahora se graficará la función para conocer dónde es creciente, decreciente, máximo, mínimo, cóncava hacia abajo, cóncava hacia arriba y puntos de inflexión (para los puntos de inflexión recuerde utilizar el comando *InflectionPoints()*).

> FunctionChart(f(x));

**Imagen 56: Grafica de función con el comando** InflectionPoints **, en una función de la Actividad 2.16 con el Software Maple.**

```
> restart;
> with(Student[Calculus1]);
[AntiderivativePlot, AntiderivativeTutor, ApproximateInt, ApproximateIntTutor, ArcLength,      (1)
 ArcLengthTutor, Asymptotes, Clear, CriticalPoints, CurveAnalysisTutor, DerivativePlot,
 DerivativeTutor, DiffTutor, ExtremePoints, FunctionAverage, FunctionAverageTutor,
 FunctionChart, FunctionPlot, GetMessage, GetNumProblems, GetProblem, Hint,
 InflectionPoints, IntTutor, Integrand, InversePlot, InverseTutor, LimitTutor,
 MeanValueTheorem, MeanValueTheoremTutor, NewtonQuotient, NewtonsMethod,
 NewtonsMethodTutor, PointInterpolation, RiemannSum, RollesTheorem, Roots, Rule, Show,
 ShowIncomplete, ShowSolution, ShowSteps, Summand, SurfaceOfRevolution,
 SurfaceOfRevolutionTutor, Tangent, TangentSecantTutor, TangentTutor,
 TaylorApproximation, TaylorApproximationTutor, Understand, Undo, VolumeOfRevolution,
 VolumeOfRevolutionTutor, WhatProblem]
> f := x -> 4+3*x-x^3;
                         f := x -> 4 + 3 x - x^3                                      (2)
> CriticalPoints(f(x));
                               [-1, 1]                                                (3)
```




**Elaborado por:** El Investigador.

> InflectionPoints(f(x));

[0 ]

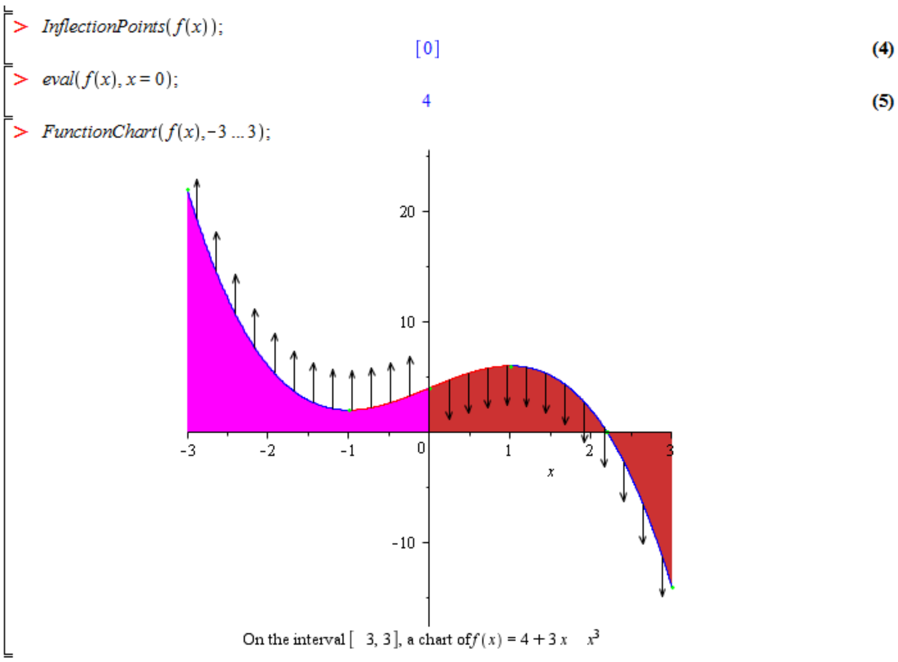
> eval(f(x),x=0);

4

Al parecer, la función según el gráfico es decreciente de *(-infinity,infinity)*. Sin embargo, hay un punto de inflexión en *(0,4)* lo que lleva a concluir que la función tiene máximos y mínimos que no se notan en el gráfico; para ello, debemos establecer el dominio más pequeño, pues no se puede establecer el codominio con este comando. Al establecer el dominio se reducirá el codominio. Establezca un dominio de *-3* a *3* con el comando *FunctionChart(f(x),-3...3).*

**> FunctionChart(f(x),-3...3);**

**Imagen 57: Grafica de función con el comando *FunctionChart*, en una función de la Actividad 2.16 con el Software Maple**




**Elaborado por:** El Investigador.

**Luego entonces, la función es decreciente en el intervalo de (-infinity,-1) y de (1,infinity); creciente en el intervalo (-1,1). Es cóncava hacia arriba en (-infinity,0) y cóncava hacia abajo en (0,infinity) con un punto de inflexión en (0,4).**

**EXTREMOS ABSOLUTOS.**

Para determinar el máximo o mínimo absoluto se deberá calcular los valores críticos y sustituir en la función, y el mayor de ellos será el máximo absoluto y el menor es el mínimo absoluto.

```
> restart;
> with(Student[Calculus1]);with(plots);
```

[*AntiderivativePlot*, *AntiderivativeTutor*, *ApproximateInt*, *ApproximateIntTutor*, *ArcLength*, *ArcLengthTutor*,*Asymptotes*, *Clear*, *CriticalPoints*, *urveAnalysisTutor*, *DerivativePlot*, *DerivativeTutor*, *DiffTutor*, *ExtremePints*,*FunctionAverage*, *FunctionAverageTutor*, *FunctionChart*,*FunctionPlot*, *GetMessage*, *GetNumProblems*,*GetProblem*,*Hint*, *InflectionPoints*, *IntTutor*,*Integrand*, *InversePlot*, *InverseTutor*, *LimitTutor*,*MeanValueTheorem*, *Mean ValueTheoremTutor*,*NewtonQuotient*, *NewtonsMethod*, *NewtonsMethodTutor*, *PointInterpolation*, *RiemannSum*, *RollesTheorem*, *Roots*,*Rule*, *Show*, *ShowIncomplete*, *ShowSteps*, *Summand*, *SurfaceOfRevolution*, *SurfaceOfRevolutionTutor*, *Tangent*, *TangentSecantTutor*, *TagentTutor*, *TaylorApproximation*, *TaylorApproximationTutor*, *Understand*, *Undo*, *VolumeOfRevolution*, *VolumeOfRevolutionTutor*, *WhatProblem*][*animate*, *animate3d*, *animatecurve*, *arrow*, *changecoords*, *complexplot*, *complexplot3d*, *conformal*, *conformal3d*, *contourplot*, *contourplot3d*, *coordplot*, *coordplot3d*, *densityplot*, *display*, *filedplot*, *fieldplot3d*, *gradplot*, *gradplot3d*, *graphplot3d*, *implicitplot*, *implcitplot3d*, *inequal*, *interactive*, *interactiveparams*, *intersectplot*, *listcontplot, listcontplot3d, listdensityplot, listplot, listplot3d, loglogplot, logplot, matrxplot, multiple, odeplot, pareto, plotcompare, pointplot, pointplot3d, polarplot, plygonplot, polygonplot3d, polyhedra_supported, polyhedraplot, rootlocus,seilogplot, setcolors,setoptions, setoptions3d, spacecurve, sparsematrixplot,surfdata, extplot, textplot3d, tubeplot*]

**Actividad 2.17.**

Encontrar los extremos absolutos para la siguiente función $f(x) = x^2 - 4x + 5$ en el intervalo cerrado *[1,4]*.

> f:=x->x^2-4*x+5;

$f := x \rightarrow x^2 - 4\,x + 5$

> CriticalPoints(f(x));

[2 ]

Como sólo se necesita la gráfica en el intervalo *[1,4]*, se graficará con este intervalo

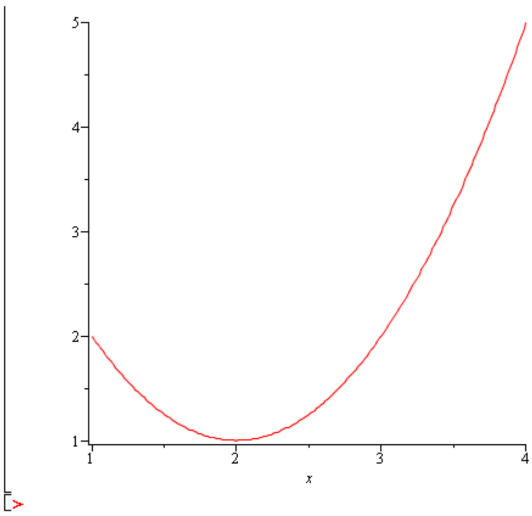
**> plot(f(x),x=1... 4);**

**Imagen 58: Visualización del comando with(Student[Calculus1]), en el Software Maple.**

```
> restart;
> with(Student[Calculus1]); with(plots);
[AntiderivativePlot, AntiderivativeTutor, ApproximateInt, ApproximateIntTutor, ArcLength,
  ArcLengthTutor, Asymptotes, Clear, CriticalPoints, CurveAnalysisTutor, DerivativePlot,
  DerivativeTutor, DiffTutor, ExtremePoints, FunctionAverage, FunctionAverageTutor,
  FunctionChart, FunctionPlot, GetMessage, GetNumProblems, GetProblem, Hint,
  InflectionPoints, IntTutor, Integrand, InversePlot, InverseTutor, LimitTutor,
  MeanValueTheorem, MeanValueTheoremTutor, NewtonQuotient, NewtonsMethod,
  NewtonsMethodTutor, PointInterpolation, RiemannSum, RollesTheorem, Roots, Rule, Show,
  ShowIncomplete, ShowSolution, ShowSteps, Summand, SurfaceOfRevolution,
  SurfaceOfRevolutionTutor, Tangent, TangentSecantTutor, TangentTutor,
  TaylorApproximation, TaylorApproximationTutor, Understand, Undo, VolumeOfRevolution,
  VolumeOfRevolutionTutor, WhatProblem]
[animate, animate3d, animatecurve, arrow, changecoords, complexplot, complexplot3d,      (1)
  conformal, conformal3d, contourplot, contourplot3d, coordplot, coordplot3d, densityplot,
  display, dualaxisplot, fieldplot, fieldplot3d, gradplot, gradplot3d, implicitplot,
  implicitplot3d, inequal, interactive, interactiveparams, intersectplot, listcontplot,
  listcontplot3d, listdensityplot, listplot, listplot3d, loglogplot, logplot, matrixplot, multiple,
  odeplot, pareto, plotcompare, pointplot, pointplot3d, polarplot, polygonplot, polygonplot3d,
  polyhedra_supported, polyhedraplot, rootlocus, semilogplot, setcolors, setoptions,
  setoptions3d, spacecurve, sparsematrixplot, surfdata, textplot, textplot3d, tubeplot]
> f := x -> x^2-4*x+5;
                        f := x -> x^2 - 4 x + 5                                          (2)
> CriticalPoints(f(x));
                              [2]                                                        (3)
```

**Elaborado por:** El Investigador.

**Imagen 59: Visualización del comando with(Student[Calculus1]), en el Software Maple.**




**Elaborado por:** El Investigador.

Ahora se sustituyen los valores $x = 1$, $x = 2$ y $x = 4$ en la función dada

> f(1);

2

> f(2);

1

> f(4);

5

Por lo tanto, los valores de *f* en los puntos extremos son *f(1)=2* y *f(4)=5*; el valor crítico en *2* es *f(2)=1*. Entonces se concluye que el máximo absoluto es *f(4)=5* y el mínimo absoluto es *f(2)=1*.

**PRUEBA DE LA SEGUNDA DERIVADA.**

Ahora se calculará los máximos y/o mínimos de una función con la prueba de la segunda derivada. Recuerde que si la segunda derivada es mayor a cero es un mínimo relativo y si es menor a cero es un máximo relativo.

**Actividad 2.18.**

Calcule si $f(x) = 18x - \frac{2x^3}{3}$ tiene máximos y/o mínimos relativos con la prueba de la segunda derivada.

Creé la función y grafíquela.

> restart;

**> with(plots);**

[*animate, animate3d, animatecurve, arrow, changecoords,complexplot, complexplot3d, conformal, conformal3d,contourplot, contourplot3d, coordplot, coordplot3d,densityplot, display, filedplot, fieldplot3d, gradplot,gradplot3d, graphplot3d, implicitplot, implcitplot3d,inequal, interactive, interactiveparams, intersectplot,listcontplot, listcontplot3d, listdensityplot, listplot, listplot3d, loglogplot, logplot, matrxplot, multiple,odeplot, pareto, plotcompare, pointplot, pointplot3d,polarplot, plygonplot, polygonplot3d, polyhedra_ supported, polyhedraplot, rootlocus,seilogplot, setcolors,setoptions, setoptions3d, spacecurve, sparsematrixplot,surfdata, extplot, textplot3d, tubeplot*]

> f:=x->18*x-2/3*x^3;

$f := \rightarrow x \;\; 18x - \frac{2x^3}{3}$

> plot(f(x),x=-10...10);

**Imagen 59: Análisis de máximos y/o mínimos relativos con la prueba de la segunda derivada**.

> *restart*;

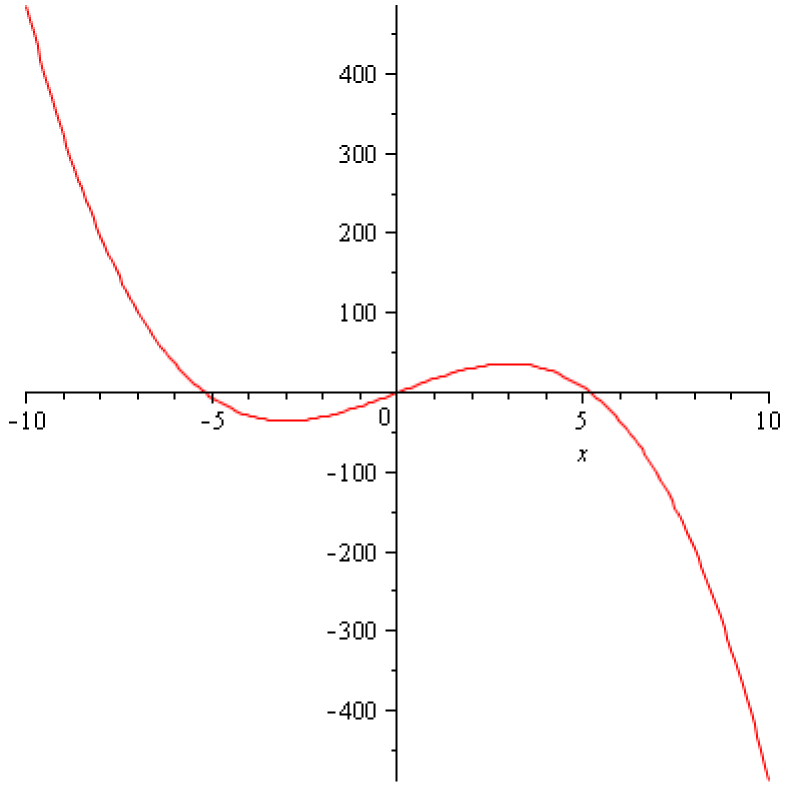
> *with*(*plots*);

[*animate, animate3d, animatecurve, arrow, changecoords, complexplot, complexplot3d, conformal, conformal3d, contourplot, contourplot3d, coordplot, coordplot3d, densityplot, display, dualaxisplot, fieldplot, fieldplot3d, gradplot, gradplot3d, implicitplot, implicitplot3d, inequal, interactive, interactiveparams, intersectplot, listcontplot, listcontplot3d, listdensityplot, listplot, listplot3d, loglogplot, logplot, matrixplot, multiple, odeplot, pareto, plotcompare, pointplot, pointplot3d, polarplot, polygonplot, polygonplot3d, polyhedra_supported, polyhedraplot, rootlocus, semilogplot, setcolors, setoptions, setoptions3d, spacecurve, sparsematrixplot, surfdata, textplot, textplot3d, tubeplot*] **(1)**

> $f := x \rightarrow 18*x-2/3*x\hat{}3;$

$$f := x \rightarrow 18\,x - \frac{2}{3}\,x^3 \qquad \textbf{(2)}$$

> *plot*($f(x)$, $x$=-10 ... 10);




>

**Elaborado por:** El Investigador.

Con el comando *fsolve(D(f))* encuentre donde la primera derivada se hace cero.

> fsolve(D(f)(x)=0,x=-6...8);

-3.000000000 , 3.000000000

Sustituya los valores en la segunda derivada para conocer su signo y determinar si hay un máximo o mínimo relativo.

> D(D(f))(-3);

12

> D(D(f))(3);

-12

Por lo tanto, existe un mínimo relativo en $x = -3$ y un máximo relativo en $x = 3$.

**Actividad 2.19.**

Suponga la ecuación de demanda para el producto de un monopolista que es $p = 400 - 2q$ y que la función de costo promedio es $cm = 0.2q + 4q + 400/q$ donde $q$ es el número de unidades, $p$ y $cm$ se expresan en dólares por unidad.

1. Determine el nivel de producción en el que se maximiza la utilidad.
2. Determine el precio en que ocurre la utilidad máxima.
3. Determine la utilidad máxima
4. Si como medida reguladora el gobierno impone un impuesto de *$22* por unidad al monopolista, ¿cuál es el nuevo precio que maximiza la utilidad?

**PASO 1**

> p:=q->400-2*q;

$p := q \rightarrow 400 - 2q$

> cm:=q->0.2*q+4+400/q;

$c := q \rightarrow 0.2q + 4 + \frac{400}{q}$

> c:=cm(q)*q;

$c := \left(0.2q + 4 + \frac{400}{q}\right)$

> factor(%);

$2q^2 + 4.000000000q + 4000000000$

> r:=p(q)*q;

$r := (400 - 2q)q$

> expand(%);

$400q - 2q^2$

> u:=r-c;

$u := (400 - 2q)q - \left(0.2q + 4 + \frac{400}{q}\right)q$

> expand(%);

$36q \rightarrow 2.2q^2 - 400$

**> with(plots):**

> U:=x->396*x-2.2*x^2-400;

$U := x \rightarrow 396x - 2.2x^2 - 400$

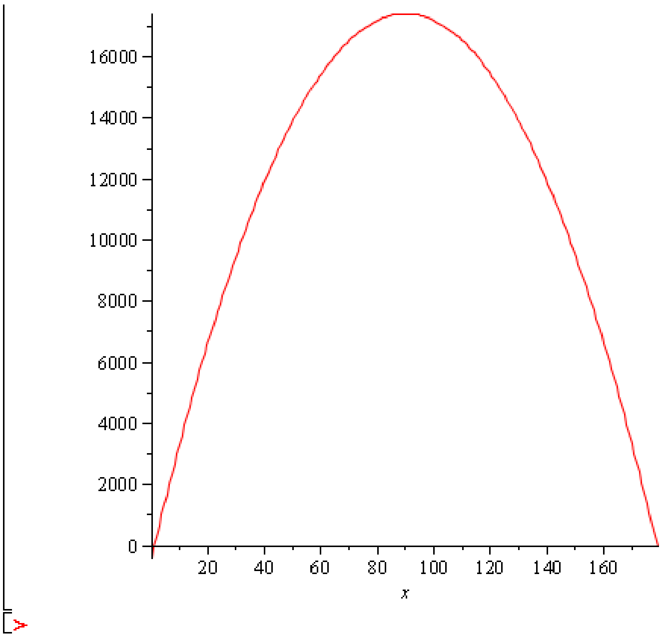
> fsolve(D(U)(x)=0,x=-10..100);

90

**> plot(U(x),x=0...178.9841661);**

**Imagen 60: Análisis de demanda para el producto de un  monopolista.**

```
> restart;
> p := q → 400-2*q;
                    p := q → 400 − 2 q                                   (1)
> cm := q → 0.2*q + 4 + 400/q;
                    cm := q → 0.2 q + 4 + 400/q                          (2)
> c := cm(q)*q;
                    c := (0.2 q + 4 + 400/q) q                           (3)
> factor(%);
                    0.2 q^2 + 4.000000000 q + 400.0000000                (4)
> r := p(q)*q;
                    r := (400 − 2 q) q                                   (5)
> expand(%);
                    400 q − 2 q^2                                        (6)
> u := r-c;
                    u := (400 − 2 q) q − (0.2 q + 4 + 400/q) q           (7)
> expand(%)
                    396 q − 2.2 q^2 − 400                                (8)
> with(plots);
[animate, animate3d, animatecurve, arrow, changecoords, complexplot, complexplot3d,   (9)
  conformal, conformal3d, contourplot, contourplot3d, coordplot, coordplot3d, densityplot,
  display, dualaxisplot, fieldplot, fieldplot3d, gradplot, gradplot3d, implicitplot,
  implicitplot3d, inequal, interactive, interactiveparams, intersectplot, listcontplot,
  listcontplot3d, listdensityplot, listplot, listplot3d, loglogplot, logplot, matrixplot, multiple,
  odeplot, pareto, plotcompare, pointplot, pointplot3d, polarplot, polygonplot, polygonplot3d,
  polyhedra_supported, polyhedraplot, rootlocus, semilogplot, setcolors, setoptions,
  setoptions3d, spacecurve, sparsematrixplot, surfdata, textplot, textplot3d, tubeplot]
> U := x → 396*x-2.2*x^2-400;
                    U := x → 396 x + (-1)·2.2 x^2 − 400                 (10)
> fsolve(D(U)(x) = 0, x = -10 ... 100);
                    90.                                                 (11)
> plot(U(x), x = 0 ... 178.9841661);
```




**Elaborado por:** El Investigador.

> fsolve(U(x));

1.015833891,178.984166

**PASO 2**

> p(90);

220

**PASO 3**

> U(90);

17420

**PASO 4**

> c1:=c+22*q;

$$c1 := \left(0.2q + 4 + \frac{400}{q}\right) q + 22q$$

> u2:=r-c1;

$$u2 := (400 - 2q)q - \left(0.2q + 4 + \frac{400}{q}\right) q - 22q$$

> expand(%);

$$374q - 2.2q^2 - 400$$

> U2:=q->374*q-2.2*q^2-400;

$$u2 := q \rightarrow 374q - 2.2q^2 - 400$$

> fsolve(D(U2)(q)=0);

85.

> D(D(U2))(85);

–4.4

> U2(85);

**15495**

A un precio de *220* y produciendo $q$ = 90 alcanza la máxima utilidad con *17420*; sin embargo, cuando viene el impuesto tiene que producir menos, o sea, *85* y alcanza sólo la utilidad de *15495*.

## UNIDAD 3.

## INTEGRALES.

Se propone el estudio y análisis de los comandos básicos que nos permiten integrar indefinidamente funciones algebraicas con los comandos *Int*, *int*, *Integrate* e *integrate*; se revisará la manera de calcular integrales definidas con los comandos *int* e *integrate*; se analizará la forma obtener el área bajo la curva o el área entre curvas; y finalmente se evaluará las sumas de Riemann utilizando los comandos *rightsum*, *leftsum*, *rightbox* y *leftbox*.

### LA INTEGRAL INDEFINIDA.

El comando *Integrate* (o en su forma alternativa *Int*) nos muestra la integral con el símbolo sólo del operador; en cambio, el comando *integrate* (o en su forma alternativa *int*) resuelve la integral directamente. Daremos a continuación algunos ejemplos:

**Actividad 3.1.**

```
> restart;
> Integrate(5,x);
```

$$\int 5\, dx$$

```
> integrate(5,x);
```

$5\, x$

```
> Integrate(8+u,u)=integrate(8+u,u);
```

$$\int 8 + u du = 8u + \frac{1}{2}u^2$$

```
> integrate(w,w);
```

$$\frac{w^2}{2}$$

> int(x,x);

$$\frac{x^2}{2}$$

> Int(x,x);

$$\int x\,dx$$

> Integrate(x,x);

$$\int x\,dx$$

> restart;

> Int(1/(4*x^(2/8)),x)=integrate(1/(4*x^(2/8)),x);

$$\int \frac{1}{4x^{\left(\frac{1}{4}\right)}}\,dx = \frac{x^{\left(\frac{3}{4}\right)}}{3}$$

> int((2*u+1)^2,u);

$$\frac{(2u+1)^3}{6}$$

Expresemos ahora el resultado anterior como un polinomio

> expand(%);

$$\frac{4}{3}u^3 + 2u^2 + u + \frac{1}{6}$$

> int((z^4+10*z^3)/(2*z^2),z);

$$\frac{4}{3}z^3 + \frac{5}{2}z^2$$

> Int((z^4+10*z^3)/(2*z^2),z);

$$\int \frac{z^4 + 10z^3}{2z^2}\,dz$$

> int((exp(x)+exp(2*x))/exp(x),x);

$x + \mathbf{e}^x$

En los ejemplos anteriores los resultados no muestran la constante de integración "*c*". Por tal motivo, al resultado anterior le sumamos la constante de integración a continuación, para que se resuelva como una integral con condiciones iniciales. Luego entonces de acuerdo a la siguiente condición *y(0)=0* encontrar *y*

> %+c;

$x + \mathbf{e}^{x} + c$

> f:=x->x+exp(x)+c;

$f := x \to x + e^{x} + c$

> f(0);

**1 + c**

> solve(1+c,c);

–1

**Actividad 3.2.**

Se muestra a continuación una serie de ejercicios donde se manipula la presentación de la respuesta para visualizar el uso de alguna regla de integración.

> int((x+1)^20,x);

$$\frac{(x+1)^{21}}{21}$$

> int((3*x^2)*(x^3+7)^3,x);

$$\frac{1}{4}x^{12} + 7x^{9} + \frac{147}{2}x^{6} + 343x^{3}$$

> factor(%);

$$\frac{x^{3}(x^{3}+14)(x^{6}+14x^{3}+98)}{4}$$

> simplify(%);

$$\frac{x^3(x^3+14)(x^6+14x^3+98)}{4}$$

**Actividad 3.3.**

Ahora se muestra la evaluación, en particular de algunas integrales empleando los dos comandos, que se resuelven usando las fórmulas básicas de integración.

**> Int((3*x^2)*(x^3+7)^3,x)=int((3*x^2)*(x^3+7)^3,x);**

$$\int \boldsymbol{3x^2(x^3+7)^3dx = \frac{1}{4}x^{12} + 7x^9 + \frac{147}{2}x^6 + 343x^3}$$

>Int(x*(x^2+5)^(1/2),x)=int(x*(x^2+5)^(1/2),x);

$$\int \sqrt{x^2+5}\,dx = \frac{(x^2+5)^{\frac{3}{2}}}{3}$$

> Int((4*x+1)^2,x)=int((4*x+1)^2,x);

$$\int (4x+1)^2dx = \frac{(4x+1)^3}{12}$$

> Int((2*x^3+3*x)/(x^4+3*x^2+7)^4,x)=int((2*x^3+3*x)/x^4+3*x^2+7)^4,x);

$$\int \frac{2x^3+3x}{(x^4+3x^2+7)}dx = -\frac{1}{6(x^4+3x^2+7)^3}$$

> Int((4*x^2)*(x^4+1)^2,x)=int((4*x^2)*(x^4+1)^2,x);

$$\int 4x^2(x^4+1)^2dx = \frac{4}{11}x^{11} + \frac{8}{7}x^7 + \frac{4}{3}x^3$$

> Int(2*x*exp(x^2),x)=int(2*x*exp(x^2),x);

$$\int x^2 + e^{2x}dx = e^{2x}$$

> Int((x^2+1)*exp(x^3+3*x),x)=int((x^2+1)*exp(x^3+3*x),x);

$$\int (x^2+1)e^{(x^3+3x)}dx = \frac{1}{3}e^{(x^3+3x)}$$

**> Int(7/x,x)=int(7/x,x);**

$$\int \frac{\mathbf{7}}{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{dx} = \mathbf{7ln}\ (\boldsymbol{x})$$

> Int(2*x/(x^2+5),x)=int(2*x/(x^2+5),x);

$$\int \frac{2x}{x^2+5}\,dx = \ln\,(x^2+5)$$

> Int((2*x^3+3*x)/(x^4+3*x^2+7),x)=int((2*x^3+3*x)/(x^4+3*x^2+7),x);

$$\int \frac{2x^3+3x}{x^4+3x^2+7}\,dx = \frac{1}{2}\ln\,(x^4+3x^2+7)$$

> Int((1/(1-w)^2)+(1/(w-1)),w)=int(((1/(1-w)^2)+(1/(w-1)),w));

$$\int \frac{1}{(1-w)^2}+\frac{1}{w-1}\,dw = \frac{1}{1-w}+\ln\,(w-1)$$

**Actividad 3.4.**

Ahora se muestra una serie de comandos con expresiones complejas a integrar, además se puede comprobar que su expresión, al derivarla, es igual que el integrando de la integral inicial.

> Int((((x+1)/(x^2+2*x))*ln(x^2+2*x),x)=int((((x+1)/(x^2+2*x))*ln(x^2+2*x),x);

$$\int \frac{(x+1)\ln\,(x^2+2x)}{x^2+2x}\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\ln(x+2)\ln(x^2+2x) - \frac{1}{2}\ln(2)\ln\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{4}\ln(x+2)^2$$
$$+\frac{1}{2}\ln(x)\,(x^2+2x) - \frac{1}{2}\ln(x)\ln\left(\frac{x}{2}+1\right) - \frac{1}{4}\ln\,(x)^2$$

> diff(rhs(%),x);

$$\frac{1}{2}\frac{ln(x^2+2x)}{x+2}+\frac{1}{2}\frac{ln(x+2)(x+2)}{x^2+2x}-\frac{1}{2}\frac{\ln(2)}{x}-\frac{1}{2}\frac{ln(x+2)}{x+2}+\frac{1}{2}\frac{ln(x^2+2x)}{x}$$
$$+\frac{1}{2}\frac{\ln(x)\,(2x+2)}{x^2+2x}-\frac{1}{2}\frac{\ln\left(\frac{x}{2}+1\right)}{x}-\frac{1}{4}\frac{\ln(X)}{\frac{X}{2}+1}-\frac{1}{2}\frac{ln(X)}{x}$$

El resultado anterior es en cierto modo complicado y susceptible de simplificación, por lo cual se normalizará la solución y al mismo tiempo se utilizará el comando *expanded* para reducir tanto el numerador como el denominador del polinomio y después simplificarlo.

> normal(%,'expanded');

$$\frac{ln(x^2+2x)x+ln(x^2+2x)}{x^2+2x}$$

> simplify(%);

$$\frac{\ln(x(x+2)(x+1))}{x(x+2)}$$

Se muestran algunos comandos que verifican algunas reglas de integración.

**> Int((x^3+x)/x^2,x)=int((x^3+x)/x^2,x);**

$$\boldsymbol{\int\frac{x^3+x}{x^2}dx=\frac{x^2}{2}+\ln(x)}$$

> Int((2*x^3+3*x^2+x+1)/(2*x+1),x)=int((2*x^3+3*x^2+x+1)/(2*x+1),x);

$$\int\frac{2x^3+3x^2+x+1}{2x+1}dx=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}\ln(2x+1)$$

> restart;

> Int((x^(1/2)-2)^(-3)/(x^(1/2)),x)=int((x^(1/2)-2)^(-3)/(x^(1/2)),x);

$$\int\frac{1}{(\sqrt{x}-2)^3\sqrt{x}}dx=-\frac{1}{(\sqrt{x}-2)^2}$$

> Int(2^(3-x),x)=int(2^(3-x),x);

$$\int 2^{(3-x)}dx=-\frac{2^{(3-x)}}{\ln(2)}$$

**> diff(rhs(%),x);**

$$\boldsymbol{2^{(3-x)}}$$

**UNIDAD 4.**

**INTEGRAL DEFINIDA.**

Se describe un método de aproximación a una integral definida, empleando sumas inferiores y superiores de Riemann, valiéndose de herramientas del Maple.

> restart;with(student):with(plots):
warning, the name changecoords has been redefines

**Actividad 4.1.**

Para la siguiente función $f(X) = x^2 + 3$ desarrollar los siguientes pasos:

**1. Graficar f(x) para valores positivos de x.**
2. Graficar los rectángulos por abajo de la gráfica para x desde *0* hasta *4* usando *8* rectángulos.
3. Calcular la suma de los rectángulos.
4. Incrementar el número de rectángulos a *16* y repetir los pasos *2* y *3*.
5. Incrementar el número de rectángulos a *128* y repetir los pasos *2* y *3*. ¿Qué pasa con el área cuando se incrementa el número de rectángulos?
6. Resuelve la integral definida *f(x)* para *x* desde *0* hasta *4*.
7. Repite los pasos *1* hasta *6* graficando ahora los rectángulos por arriba de la gráfica.
8. ¿Cuál es su respuesta a esta comparación?

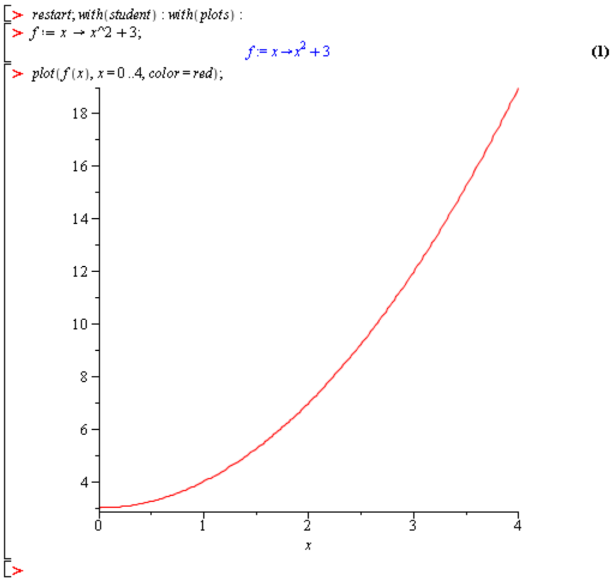
Primero definimos la función
> f:=x->x^2+3;
$f := x \to x^2 + 3$

**PASO 1.**

Se graficará *f(x)* para valores positivos de *x*, tomando *x* de *0* a *4*, usando un trazo de color rojo para la curva.

**> plot(f(x),x=0..4,color=red);**

**Imagen 61: Análisis de la integral definida, empleando sumas inferiores y superiores de Riemann.**



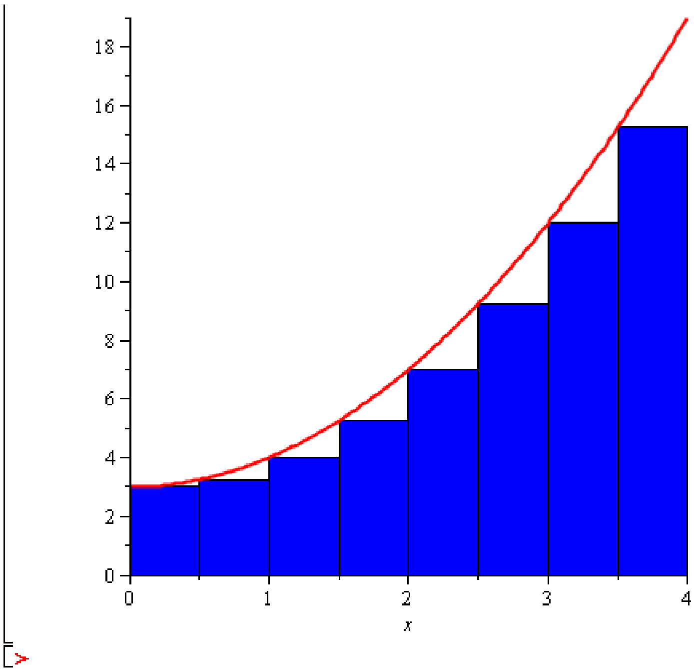

**Elaborado por:** El Investigador.

**PASO 2.**

Se grafican los rectángulos por abajo de la curva para *x* desde *0* hasta *4* usando *8* rectángulos, marcando éstos de color azul.

> leftbox(f(x),x=0..4,8,color=red,shading=blue);

**Imagen 62: Área bajo la curva de la función de la actividad 4.1 usando el software Maple.**




**Elaborado por:** El Investigador.

**PASO 3.**

Se calcula la suma de los *8* rectángulos anteriores.

> leftsum(f(x),x=0..4,8);

$$\frac{1}{2}\left(\sum_{i=0}^{7}\left(\frac{i^2}{4}+3\right)\right)$$

Se calcula un valor aproximado de la integral.

> evalf(%);

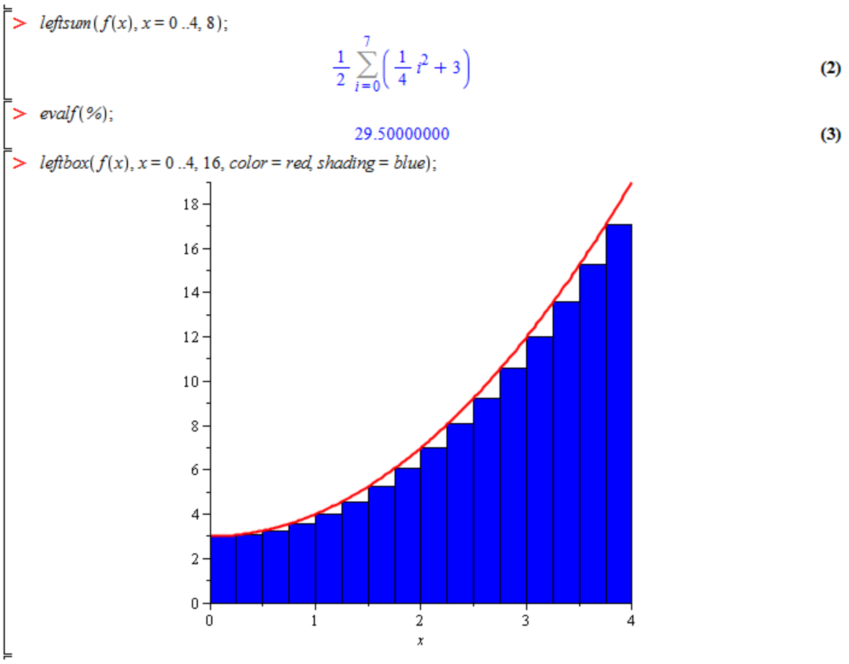
**29.50000000**

**PASO 4.**

Se incrementa el número de rectángulos a *16* y se repite los pasos *2* y *3*.

**> leftbox(f(x),x=0..4,16,color=red,shading=blue);**

**Imagen 63: Suma del área bajo la curva de la función de la actividad 4.1 usando el software Maple.**




**Elaborado por:** El Investigador.

> leftsum(f(x),x=0..4,16);

$$\frac{1}{4}\left(\sum_{i=0}^{15}\left(\frac{i^2}{16}+3\right)\right)$$

> evalf(%);

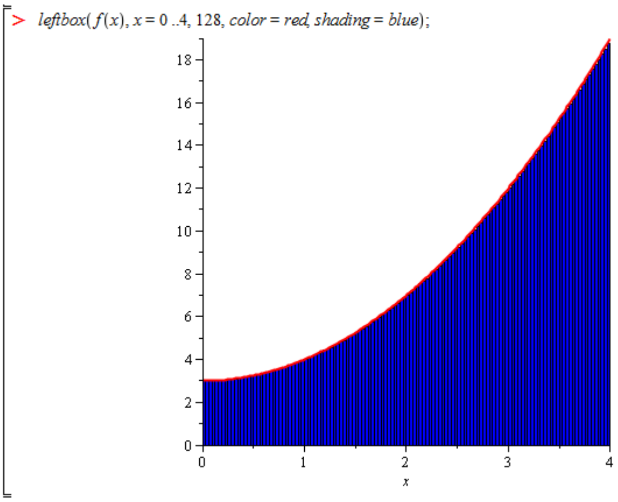
31.37500000

**PASO 5.**

Se incrementa el número de rectángulos a *128* y se repiten los pasos *2* y *3*.

**> leftbox(f(x),x=0..4,128,color=red,shading=blue);**

**Imagen 64: Suma del área bajo la curva incrementando sus particiones para reducir el grado de error en el cálculo  de la función de la actividad 4.1 usando el software Maple.**




**Elaborado por:** El Investigador.

Se calcula la suma de los rectángulos empleando *128*, así como su valor aproximado.

> leftsum(f(x),x=0..4,128);

$$\frac{1}{32}\left(\sum_{i=0}^{127}\left(\frac{i^2}{1024}+3\right)\right)$$

> evalf(%);

33.08398438

**PASO 6.**

Resuelve la integral definida *f(x)* para *x* desde *0* hasta *4*.

> Int(f(x),x=0..4)=int(f(x),x=0..4);

$$\int_0^4 x^2+3dx=\frac{100}{3}$$

**Se obtiene el valor aproximado de esta integral.**

> evalf(rhs(%));

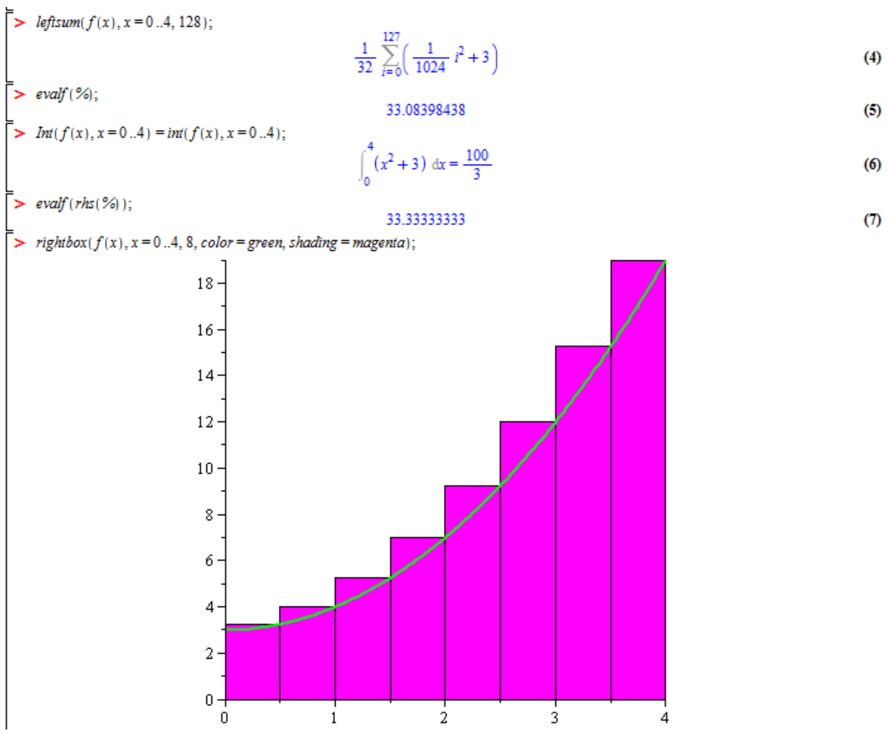
33.33333333

**PASO 7.**

Se repiten los pasos del *1* hasta *6* graficando ahora los rectángulos por arriba de la gráfica y usando el color magenta para los rectángulos.

**> rightbox(f(x),x=0..4,8,color=green,shading=magenta);**

**Imagen 65: Grafica del área bajo la curva y cambio de color de la función de la actividad 4.1 usando el software Maple.**




**Elaborado por:** El Investigador.

> rightsum(f(x),x=0..4,8);

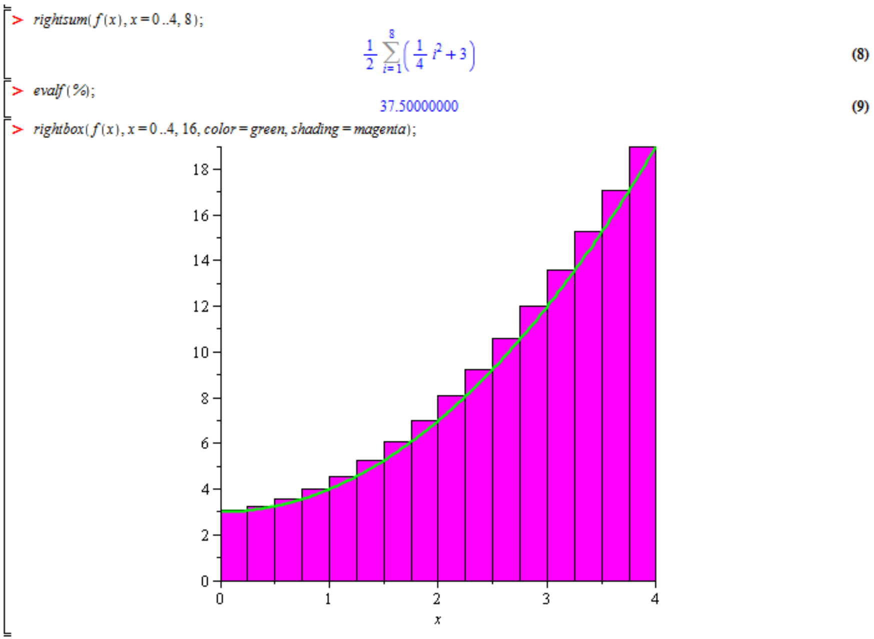
$$\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{8}\left(\frac{i^2}{4}+3\right)\right)$$

> evalf(%);

37.50000000

**> rightbox(f(x),x=0..4,16,color=green,shading=magenta);**

**Imagen 66: Suma del área bajo la curva de la función de la actividad 4.1 usando el software Maple.**




**Elaborado por:** El Investigador.

> rightsum(f(x),x=0..4,16);

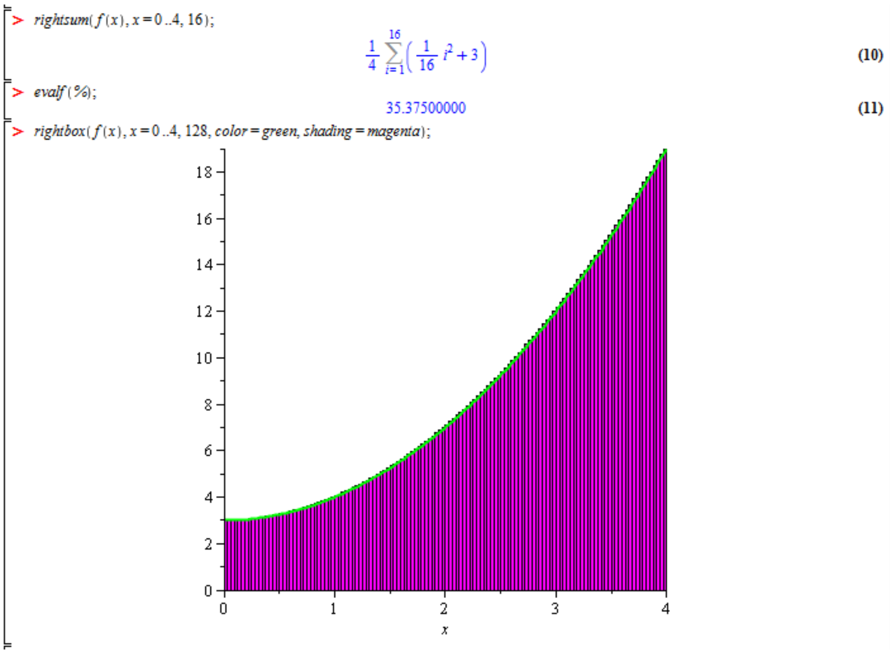
$$\frac{1}{4}\left(\sum_{i=1}^{16}\left(\frac{i^2}{4}+3\right)\right)$$

> evalf(%);

35.37500000

**> rightbox(f(x),x=0..4,128,color=green,shading=magenta);**

**Imagen 67: Suma del área bajo la curva incrementando sus particiones para reducir el grado de error en el cálculo de la función de la actividad 4.1 usando el software Maple.**




**Elaborado por:** El Investigador.

> rightsum(f(x),x=0..4,128);

$$\frac{1}{32}\left(\sum_{i=1}^{128}\left(\frac{i^2}{1024}+3\right)\right)$$

> evalf(%);

33.58398438

> Int(f(x),x=0..4)=int(f(x),x=0..4);

$$\int_0^4 x^2 + 3dx = \frac{100}{3}$$

> evalf(rhs(%));

33.33333333

**PASO 8.**

¿Cuál es su respuesta a esta comparación? Conforme aumenta el número de rectángulos, ya sea por abajo de la curva o por arriba, se obtiene la misma área.

Se limpiará la pantalla y se reinicia una sección de trabajo para mostrar algunos ejemplos de la integral definida calculado directamente.

> restart;

**Actividad 4.2.**

A continuación desarrollaremos algunos ejemplos más para ilustrar el uso de la integral definida.

> Int(7,x=0..2)=int(7,x=0..2);

$$\int_0^2 7\,dx = 14$$

> Int(x^2*(7*x^3+1)^(1/3),x=0..1)=int(x^2*(7*x^3+1)^(1/3),x=0..1);

$$\int_0^1 x^2\,(7x^3+1)^{\frac{1}{3}}dx = \frac{15}{28}$$

> evalf(rhs(%));

0.5357142857

> Int((x^6+6*x^4+x^3+8*x^2+x+5)/(x^3+5*x+1),x = 0 .. 2)
=int((x^6+6*x^4+x^3+8*x^2+x+5)/(x^3+5*x+1),x = 0 .. 2);

$$\int_0^1 \frac{x^6+6x^4+x^3+8x^2+x+5}{x^3+5x+1}\,dx = 6+\ln(19)$$

## ÁREA BAJO LA CURVA

**Actividad 4.3.**

Ahora se analizará el área bajo la curva. Primero se llamará la biblioteca *plots* para poder graficar la función:

$$\int_{-3}^{2} 6 - x - x^2 dx$$

> restart;with(plots):

> Int(6-x-x^2,x=-3..2)=int(6-x-x^2,x=-3..2);

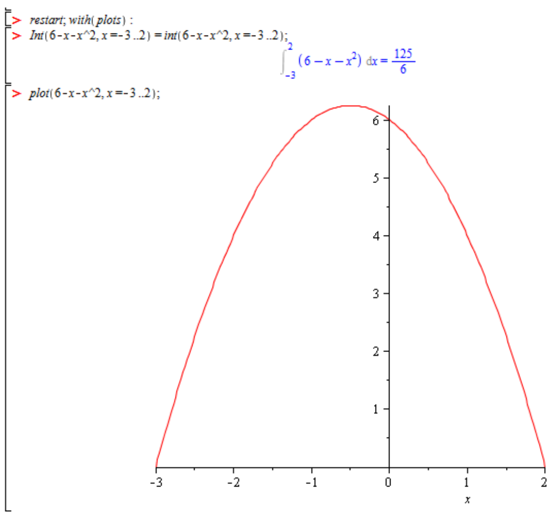
El resultado es el área bajo la curva

$$\int_{-3}^{2} 6 - x - x^2 dx = \frac{12}{6}$$

Ahora se grafica la función con el comando *plot*:

**> plot(6-x-x^2,x=-3..2);**

**Imagen 68: Análisis del área bajo la curva de la función de la actividad 4.3 usando el software Maple.**




**Elaborado por:** El Investigador.

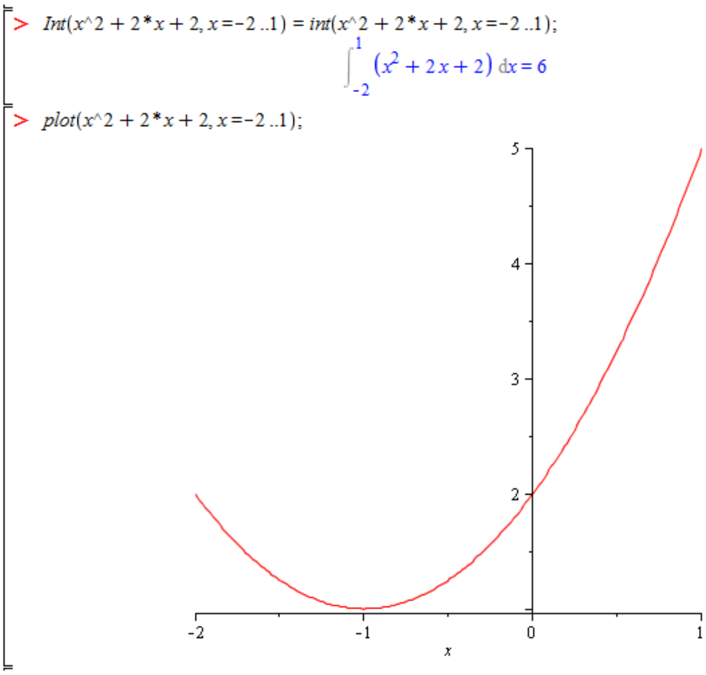
Ahora se muestran otro ejemplo de área bajo la curva.

> Int(x^2+2*x+2,x=-2..1)=int(x^2+2*x+2,x=-2..1);

$$\int_{-2}^{1} x^2 + 2x + 2dx = 6$$

**> plot(x^2+2*x+2,x=-2..1);**

**Imagen 69: Análisis del área bajo la curva de la función de la actividad 4.3 usando el software Maple**.




**Elaborado por:** El Investigador.

## ÁREA ENTRE CURVAS.

### Actividad 4.4.

A continuación se encontrará el área entre dos curvas: $y = x^2 - 5x + 7$ , y=4 y los *x =1* y *x = 4*

> restart;with(plots);

Sea $f(x) = 4$ y $g(x) = x\ 2 - 5x + 7$ y calcularemos a continuación el área entre las dos curvas.

> f:=4;

$f := 4$

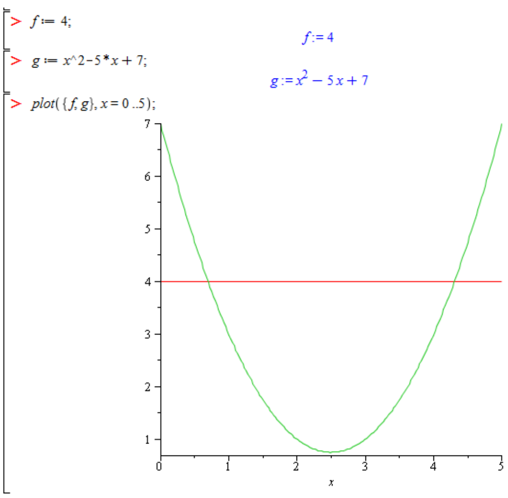
> g:=x^2-5*x+7;

$g := x^2 - 5x + 7$

Grafique las funciones *f* y *g* con un dominio de *0* a *5*.

**> plot({f,g},x=0..5);**

**Imagen 70: Análisis del área bajo la curva de dos función de la actividad 4.4 usando el software Maple**




**Elaborado por:** El Investigador.

## Actividad 4.5.

Se encuentra el área entre las dos curvas, restando la superior a la inferior.

> Area:=Int(f-g,x=1..4);

$$Area := \int_1^4 -3 - x^2 + 5x dx$$

Utilice el comando *value* para conocer el valor del área.

> value(%);

$$\frac{15}{2}$$

Aquí otro ejemplo. Encuentre el área entre las curvas

> f:=x->x^2-x-2;

$f := x \rightarrow x^2 - x - 2$

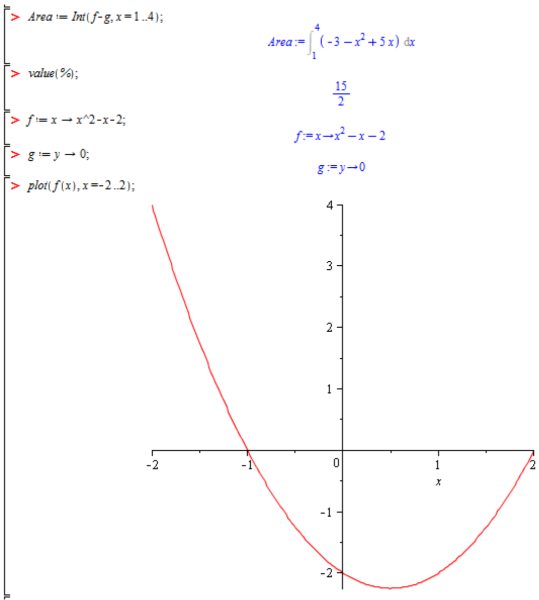
> g:=y->0;

$g := y \rightarrow 0$

Se grafican la función *f(x)* con un dominio de *-2* a *2*. Se observa que la función se intercepta con el eje *x* en *-1* y *2,* los cuales serán los límites del área. Sin embargo, el área está por debajo del eje *x*. Por lo tanto, por propiedades de la integral definida le debe anteceder un signo negativo a la integral.

**> plot(f(x),x=-2..2);**

**Imagen 71: Análisis del área bajo la curva de la función de la actividad 4.5 usando el software Maple.**




**Elaborado por:** El Investigador.

> Area:=-Int(x^2-x-2,x=-1..2);

$$Area := \int_{-1}^{2} x^2 - x - 2dx$$

> value(%);

$$\frac{19}{3}$$

**Actividad 4.6.**

Desarrollaremos a continuación otro ejemplo, sólo que se cambiará el color de las gráficas. De este modo graficaremos primero las funciones y luego calcularemos el área entre las curvas. Sean las funciones.

> restart:

> with(plots):

**g:= x -> x^2 + 2;**

$\boldsymbol{g :=\rightarrow x^2 + 2}$

> f:= x -> 2*x + 5;

$f :=\rightarrow 2\mathrm{x} + 5$

**Actividad 4.7.**

Ahora se grafican las funciones con los colores que tiene el Maple; se escogerán rojo (red) y café (brown). Usted puede escoger el color que más desee.

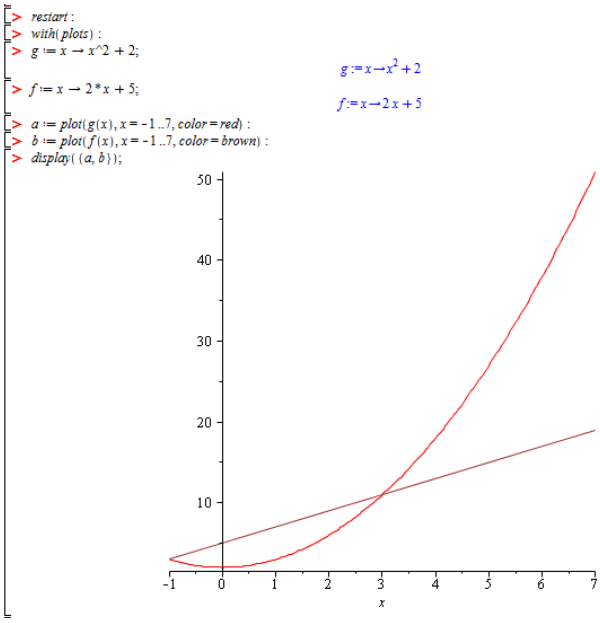
> a:= plot(g(x), x = -1..7, color = red):

> b:= plot(f(x), x = -1..7, color = brown):

Se utiliza el comando *display* para graficar las funciones.

**> display({a,b});**

**Imagen 72: Grafica en diferentes colores de la función de la actividad 4.7 usando el software Maple.**




**Elaborado por:** El Investigador.

Para encontrar el área bajo las curvas debemos encontrar los valores donde se cruzan las funciones. Para eso se utiliza el comando *solve* para encontrar las intersecciones de los puntos de las curvas.

**> solve(x^2+2-2*x-5,x);**

3, –1

El área entre las curvas desde *x=-1* hasta *x=3* es

$$\int_{-1}^{3} 2x + 5 - x^2 - 2dx$$

> int(2*x+5-x^2-2,x=-1..3);

$$\frac{32}{3}$$

**Actividad 4.8.**

Ahora encontraremos el área entre las funciones.

$f(x) = 4x - x^2 + 8$

$g(x) = x^2 - 2x$

> restart;with(plots):

> f:=x->4*x-x^2+8;

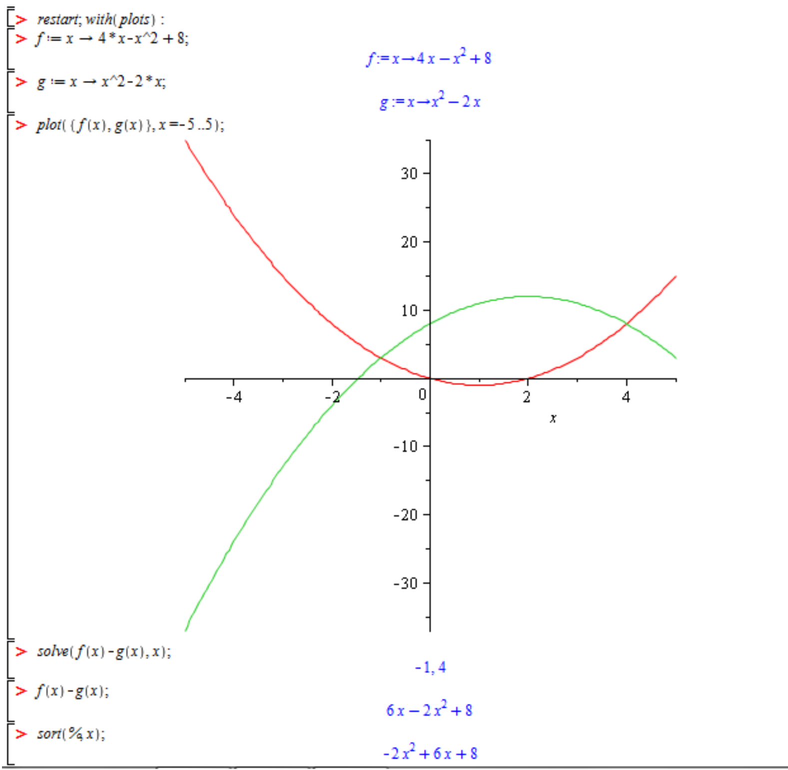
$f := x \to 4\,x - x^2 + 8$

> g:=x->x^2-2*x;

$g := x \to x^2 - 2\,x$

**> plot({f(x),g(x)},x=-5..5);**

**Imagen 73: Calculo del área de dos funciones de la actividad 4.8 usando el software Maple.**




**Elaborado por:** El Investigador.

> solve(f(x)-g(x),x);

–1, 4

> f(x)-g(x);

6x-2x$^2$+8

> sort(%,x);

-2x$^2$ +6x+8

> h:=x->-2*x^2+6*x+8;

$h := x \rightarrow -2\,x^2 + 6\,x + 8$

> int(h(x),x=-1..4);

$\frac{125}{3}$

**Actividad 4.9.**

Ahora calcularemos el área entre las curvas definidas por.

Definimos $y = \sqrt{x}$ y $y = x$ graficamos a continuación cada una de las funciones anteriores.

> restart;with(plots):

> f:=x->x^(1/2);

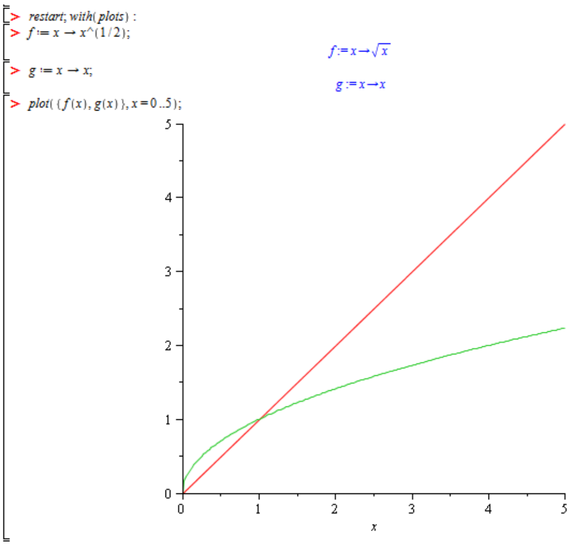
$f := x \rightarrow \sqrt{x}$

> g:=x->x;

$g := x \rightarrow x$

**> plot({f(x),g(x)},x=0..5);**

**Imagen 74: Calculo del área de dos funciones de la actividad 4.9 usando el software Maple.**




**Elaborado por:** El Investigador.

Encontramos ahora los puntos de intersección de ambas curvas.

> solve(f(x)-g(x),x);

0, 1

Y finalmente calculamos el área pedida, toda vez que los límites de integración ya están calculados:

> f(x)-g(x);

$\sqrt{x} - x$

> h:=x->x^(1/2)-x;

$h := x \rightarrow \sqrt{x} - x$

> int(h(x),x=0..1);

$\frac{1}{6}$

**Actividad 4.10.**

Encontremos ahora el área entre las curvas. Como en el ejemplo anterior, $f(x) = 9 - x^2$ y $g(x) = x^2 + 1$ definimos y graficamos a continuación cada una de las funciones anteriores.

> restart;with(plots):

> f:=x->9-x^2;

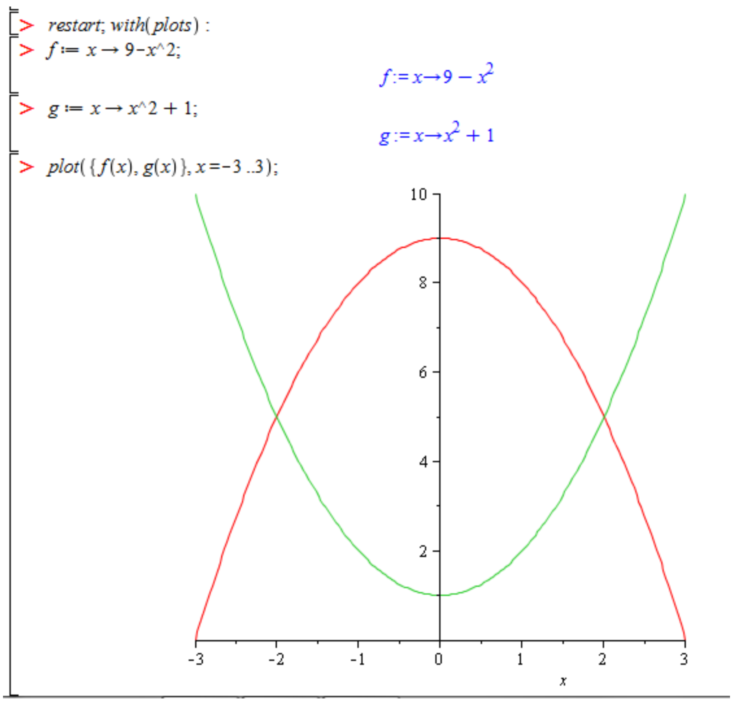
$f := x \rightarrow 9 - x^2$

> g:=x->x^2+1;

$g := x \rightarrow x^2 + 1$

**> plot({f(x),g(x)},x=-3..3);**

**Imagen 75: Calculo del área de dos funciones de la actividad 4.10 usando el software Maple.**




**Elaborado por:** El Investigador.

Ahora encontramos los puntos de intersección de ambas curvas.

> solve(f(x)-g(x),x);

–2, 2

Y por último, calculamos el área pedida, toda vez que los límites de integración ya están calculados.

> h:=f(x)-g(x);

$h$ := 8 – 2 $x$2

> Int(h,x=-2..2)=int(h,x=-2..2);;

$$\int_{-2}^{2} 8 - 2x^2 dx = \frac{64}{3}$$

**Actividad 4.11.**

Finalmente, en el siguiente ejemplo, calcularemos el área entre curvas con respecto al eje y. Calcular el área entre las curvas $y = \sqrt{4x}$ y $x = 3$. Definimos y graficamos a continuación cada una de las funciones anteriores, pero ahora tomamos el eje $y$ como referencia, por lo cual realizamos los despejes correspondientes.

> restart;with(plots):

> f:=x->(4*x)^(1/2);

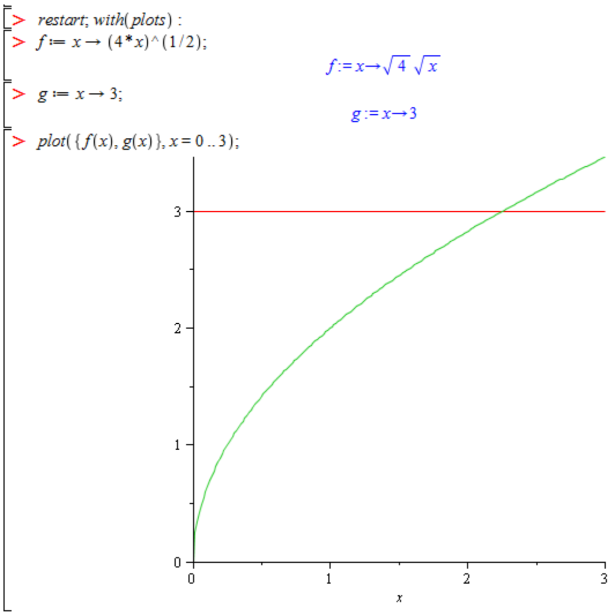
$f := x \rightarrow \sqrt{4}\,\sqrt{x}$

> g:=x->3;

$g := x \rightarrow 3$

> plot({f(x),g(x)},x=0..3);

**Imagen 76: Calculo del área entre curvas con respecto al eje Y de la actividad 4.11 usando el software Maple.**




**Elaborado por:** El Investigador.

Ahora se despejara *x* de la función $y = \sqrt{4x}$.

**> j:=solve(y=sqrt(4*x),x);**

$$j := \frac{y^2}{4}$$

Y para concluir el ejercicio, calculamos el área pedida, ya que los límites de integración son evidentemente 0 y 3.

> Int(j,y=0..3)=int(j,y=0..3);

$$\int_0^3 \frac{y^2}{4} d\,y = \frac{9}{4}$$

> evalf(rhs(%));

2.250000000

Terminaremos el presente tema con dos ejercicios de aplicación a la economía, y específicamente sobre el excedente del consumidor y el excedente del productor.

**Actividad 4.12.**

La función de demanda para un producto es $p=22-0.8q$ donde $p$ es el precio por unidad (en dólares) para $q$ unidades.
La función de oferta es $p=6+1.2q$. Determine el excedente de los consumidores y de los productores, bajo condiciones de equilibrio.

**Solución:**
1. Primero se debe encontrar el punto de equilibrio *(p, q)* usando el comando *solve*.
> solve({p=22-0.8*q, p=6+1.2*q}, {p,q});
{q=8, p=15.60}
2. Ahora determinaremos el excedente del consumidor (EC) con el comando *int.*
> int( (22-0.8*q)-15.6, q=0..8 );
25.60

**3. Finalmente, determinaremos el excedente del productor (EP), nuevamente empleando el comando int.**
> int( (15.6-(6+1.2*q)), q=0..8 );
38.40

**Actividad 4.13.**

La ecuación de demanda para un producto es $q = \frac{90}{p} - 2y$ la ecuación de oferta es $q = p - 1$. Determine el excedente de los consumidores y de los productores cuando se ha establecido el equilibrio del mercado.

**Solución:**

1. Primero se debe encontrar el punto de equilibrio *(p,q)* usando el comando *solve*

> solve({q=(90/p)-2, q=p-1}, {p,q});

{p=-10, q=-11}, {p=9, q=8}

Despreciamos la pareja (-10,-11) por razones obvias y nuestro punto de equilibrio será (*p*,*q*)=(9,8).

2. Ahora obtendremos el límite superior de la integral del EC y el límite inferior de la integral de EP.

> solve(eval(q=(90/p)-2,q=0),p);

45

> solve(eval(q=p-1,q=0),p);

1

Por lo tanto, el límite superior es igual a 45 en EC y el límite inferior es igual a 1 en EP.

3. Ahora determinaremos el excedente del consumidor con el comando *int.*

> int( (90/p)-2 , p=9..45 );

90 ln(5)-72

> evalf(90*ln(5)-72);

72.849412

Finalmente, determinaremos el excedente del productor, nuevamente empleando el comando *int*.

> int( p-1, p=1..9 );

32

**Ejercicios tomados de : *MAPLE 13 para calculo diferencial e integral*, Primera edición 2011,Universidad de Guadalajara Centro Universitario de Ciencias Económico Administrativas Departamento de Métodos Cuantitativos , ISBN E-book 987-607-450-451-4, Leopoldo Coronado,Salvador Sandoval,Victor Hugo Gualajara, Ana Torres, Pag11-Pag16, Pag21-Pag116**

## 6.9. ADMINISTRACIÓN DE LA PROPUESTA.

Lo planteado en esta propuesta, se refiere a las relaciones existentes entre los distintos factores que intervienen en la metodología educativa actual como son: Autoridades, personal docente, estudiantes y recursos tecnológicos los cuales están involucrados en mejorar la calidad educativa de la institución, con una visión de mejora continua.

Al implementar esta propuesta, se espera que las autoridades y docentes del IST-SECAP, con profesionalismo afronten el reto que constituye el manejo de recursos de punta e innovadores cuanto se refiere a la educación los estudiantes con valores y trabajo en equipo.

Por lo que se espera que con el conocimiento y aplicación del Texto sobre el Cálculo Diferencia e Integral con aplicaciones en Maple los maestros desarrollen y mejoren el proceso de enseñanza aprendizaje ya que la educación necesita de nuevas estrategias y habilidades cognitivas, de esta forma consolidar una formación de profesional de personas como entes productivos acorde a las necesidades de este mundo tecnológico y competitivo.

## 6.10. PLAN DE MONITOREO Y EVALUACIÓN.

La elaboración del Texto sobre el Cálculo Diferencia e Integral con ejercicios guía en Maple y su aplicación en la enseñanza de los Límites, Derivadas e Integrales para mejorar la adquisición de aprendizajes colaborativos en los estudiantes de la IST-SECAP, se realizará en función de los objetivos de la Propuesta. Por lo tanto serán los docentes, estudiantes y autoridades quienes expresen su satisfacción de los resultados obtenidos al aplicar la Propuesta.

Para garantizar y asegurar el cumplimiento de los objetivos planteados se deberá realizar el monitoreo del modelo propuesto en este estudio, como un proceso de seguimiento y evaluación permanente que nos permita anticipar contingencias que se pueden presentar en el camino con la finalidad de implementar correctivos a través de acciones que nos aseguren la consecución de las metas propuestas en los cambios en cuanto a la educación superior vive actualmente.

**Cuadro Nº 54:** Preguntas Básicas - Plan de Monitoreo PREGUNTAS BÁSICAS EXPLICACIÓN

| PREGUNTAS BÁSICAS | EXPLICACIÓN |
|---|---|
| ¿Qué evaluar? | **La metodología utilizada como contribución para mejorar el aprendizaje colaborativo del Calculo I.** |
| ¿Por qué evaluar | **Porque se propone una nueva forma de enseñanza basada en el aprendizaje colaborativo, la cual tiene que ser valorada cuantitativa y cualitativa para una mejora continua.** |
| ¿Para qué evaluar? | **Para determinar si existen cambios positivos o no sobre el estudio realizado.** |
| ¿Con qué criterios? | **Determinar la efectividad de la propuesta según resultados obtenidos.** |
| Indicadores | **Desarrollo de aprendizajes colaborativo de Calculo I en los estudiantes.** |
| ¿Quién evalúa? | **El investigador.** |
| ¿Cuándo evaluar? | **Al inicio, en el proceso e inmediatamente luego de concluida la aplicación de la propuesta.** |
| ¿Cómo evaluar? | **Encuesta, observación a estudiantes y profesores y matrices elaboradas en base a indicadores.** |
| Fuentes de información | **Profesores y estudiantes.** |
| ¿Con qué evaluar? | **Utilizando los estadísticos de prueba adecuados al número de muestras según se cuantifique.** |

**Elaborado por: El investigador.**

## 6.11. PRESUPUESTO.

### 6.11.1. Gastos directos.

**Cuadro Nº 55:** Presupuesto

| | Concepto | Costo total |
|---|---|---|
| | Recursos tecnológicos:<br>Computador<br>Proyector Digital<br>Wiimote | <br>650<br>575<br>60 |
| 2 | Investigación Internet | 350 |
| 3 | Papelería e Impresiones | 300 |
| 4 | Gastos administrativos | 120 |
| 5 | Imprevistos 15% | 308 |
| | TOTA | 2363 |

**Elaborado por: El investigador.**

**BIBLIOGRAFÍA.**

1. Aprendizaje y enseñanza [texto impreso] / E. Stones . - México : Centro Regional de Ayuda Técnica, 1972 . - 126 p... - SISBN4022
2. “(Tic) A PARTIR DEL SISTEMA DE APRENDIZAJE LET ME LEARN®.
3. AUTORA: Laura Patricia Villamizar Carrillo, DIRECTOR DE TESIS: Dr. Ángel Pío González Soto, LUGAR: Tarragona – España, AÑO: 2007.
4. GONZÁLEZ CABANACH, R. Et alt. (1996) Psicología de la instrucción. Vol. I: Aspectos históricos explicativos y metodológicos. Barcelona, E.U.B.
5. AGUILAR M. (2000) La asimilación del contenido de la enseñanza. La Habana: Editorial de Libros para la Educación.
6. BELTRAN, J. (2000). Procesos, estrategias y técnicas de aprendizaje. Madriz: Ed. Praxis.
7. DICCIONARIO ENCICLOPÉDICO DE EDUCACIÓN OCÉANO CENTRUM. ENCICLOPEDIA DE LA PSICOPEDAGOGIA. Editorial. Océano Grupo, S.A. ESPAÑA
8. GIMENO SACRISTAN L. (2001) Pérez Gómez A. Comprender y transformar la enseñanza. 2 ed. Madrid. Morata.
9. GUBERN, R.: (2000) El Eros electrónico, Madrid, Taurus, HILGARD ER. (2001) Teorías del aprendizaje. La Habana: Instituto Cubano del Libro.
10. KAPLÚN M. (2005) Los Materiales de auto aprendizaje. Marco para su elaboración. Santiago, Chile: UNESCO. p.55
11. LANHAM, R.A.: The Electronic Word, Chicago, Univ. of Chicago Press, 1993. LYON, D. (2000) El ojo electrónico, Madrid, Alianza.

12. MALDONADO, T. (2001) Crítica de la razón informática, Barcelona, Paidós,
13. MARTÍNEZ, F. (2002): A dónde van los medios. En Cabero, J. (Coord.): Medios audiovisuales y nuevas tecnologías para el s: XXI. Diego Marín Ed. Murcia.
14. MORIN, J.; Seurat, R. (1998): Gestión de los Recursos Tecnológicos. Cotec, Madrid

15. NEGROPONTE, N. (2002) El mundo digital, Barcelona, Ediciones Ramonet, I.
16. NEUNER G, Babanski Yu K, Drefenstedt E, Elkonin DB, Gunther KH, Piskunov AI, et al. Pedagogía. La Habana: MINED; 1981. p. 256.
17. SALINAS, J. (2001): Organización escolar y redes: Los nuevos escenarios de aprendizaje. En Cabero. Y Martínez. (1995): Nuevos canales de comunicación en la enseñanza. Centro de Estudios Ramón Areces, Madrid. 89-118
18. SALINAS, J., de BENITO, B. y PÉREZ, A. (2001): "Tecnologías de la Información y la Comunicación en la Enseñanza universitaria: el caso de la UIB". Comunicación. I Simposio Iberoamericano de Didáctica universitaria.
19. SANTOS MORENO A.(2000) Evaluación eficaz del aprendizaje Vía Internet: Una perspectiva constructivista. Congreso Informática 2000 [trabajo en CD-ROM]. La Habana.
20. VÁZQUEZ, Francisco.( 2006.) Modernas estrategias para la enseñanza Ediciones Euroméxico, S.A. de C.V.
21. LEITHOLD, L. 1973. El Cálculo con Geometría Analítica. Editorial Harla. Harper & Raw Latinoamericana.
22. Evaluación del aprendizaje basada en competencias [texto impreso] / Naranjo López, Galo, Autor; Luis Herrera Espinoza, Autor . - 2008 . - 207 p. : gráf., cuad.Idioma : Español (spa)

## LINKOGRAFÍA.

1. Blog de Formación Inicial Docente. (2012). Estrategias Metodológicas para la enseñanza de la matemática. Recuperado de http://www2.minedu.gob.pe/digesutp/formacioninicial/
2. Revista Iberoamericana. (2012). Evaluación del Aprendizaje. Recuperado de http://Evaluación del aprendizaje - 3_ paradigmas - métodos - mente.htm
3. Marqués, P. (2000). Los medios didácticos y los recursos educativos. Recuperado de http://www.pangea.org/peremarques/medios.htm

4. Blogname. (febrero 2012). Recursos Didácticos. Recuperado de http://www.pedagogia.es/recursos-didacticos/
5. Barbero, J. M. (2002). Jóvenes: Comunicación e Identidad. Recuperado de http://www.oei.es/pensariberoamerica/ric00a03.htm#autor
6. Camilloni, A. (2009): Memoria Académica. Universidad Nacional de la Plata, año 3, no 3, p. 55 – 68. Recuperado de www.memoria.fahce.unlp.edu.ar
7. Díaz, B. F. (2003): Cognición situada y estrategias para el aprendizaje significativo. Revista Electrónica de investigación Educativa. Recuperado de http://redie.ens.uabc.mx/vol5no2/contenido-arceo.html
8. SALINAS, J. (2001): Campus electrónicos y redes de aprendizaje. En Salinas,J. y otros (Coord.): Redes de comunicación, redes de aprendizaje, Servicio de Publicaciones de la Universidad de las Islas Baleares ,Palma de Mallorca. 91-100 http://www.uib.es/depart/gte/salinas.html
9. SALINAS, J. (2001): Nuevos ambientes de aprendizaje para una sociedad de la información. Revista Pensamiento Educativo, 20. Pontificia Universidad Católica de Chile 81-104
   http://www.uib.es/depart/gte/ambientes.html
10. SALINAS, J. (2001): Redes y Educación: Tendencias en educación flexible y a distancia. En Pérez,R. Y otros: Educación y tecnologías de la educación. II Congreso Internacional de Comunicación, tecnología y educación. Oviedo. 141-151 http://www.uib.es/depart/gte/tendencias.html
11. SALINAS, J. (1998b). Redes y desarrollo profesional del docente: Entre el dato serendipiti y el foro de trabajo colaborativo. Rev. Profesorado (Univ. de Granada), 2 (1). http://www.uib.es/depart/gte/docente.html
12. ADELL, J. (2000): Tendencias en educación en la sociedad de las tecnologías de la información. EDUTEC. Revista Electrónica de Tecnología Educativa, nº  http://www.uib.es/depart/gte/revelec7.html

# ANEXOS

**ANEXO I**

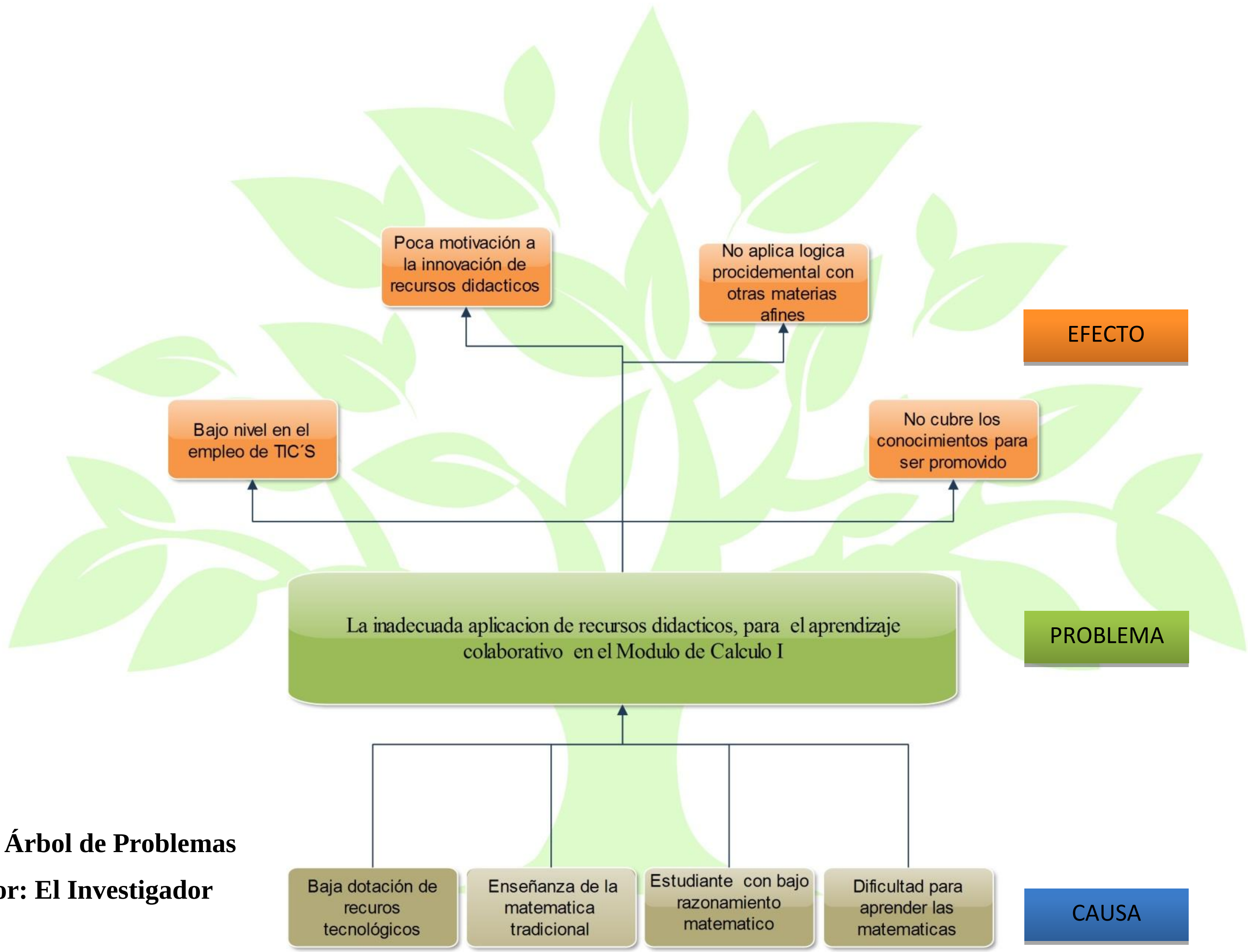



**Grafico N°1: Árbol de Problemas**

**Elaborado por: El Investigador**

## 4.4 ANEXOS

# UNIVERSIDAD TÉCNICA DE AMBATO

***CENTRO DE ESTUDIOS DE POSGRADO***

***MAESTRÍA EN DOCENCIA MATEMÁTICA***

**ENCUESTA DIRIGIDA A LOS DOCENTES DEL ÁREA DE MATEMATICAS DEL IST-SECAP AMBATO**

**Objetivo**

Recabar información sobre la incidencia del Proceso Enseñanza-Aprendizaje y la aplicación de nuevos recursos didácticos.

**Instrucciones**

- Marque con una **X** dentro de la casilla, en la respuesta que considere correcta.
- Al ser anónima la encuesta responda con toda libertad y sinceridad.

***1: SIEMPRE; 2: FRECUENTEMENTE; 3: POCAS VECES; 4: NUNCA.***

| N° | PREGUNTAS | ESCALAS | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 1 | ¿Conoce usted qué es Pantalla Digital Interactiva (PDI)? | | | | |
| 2 | ¿Se emplean Procesos interactivos dentro del IST-SECAP en proceso educativo en el aula? | | | | |
| 3 | ¿Existe pantallas táctiles en las instalaciones de la institución? | | | | |
| 4 | ¿Cómo docente técnico posee la formación profesional adecuada para el empleo de la PID en el desarrollo de las clases? | | | | |
| 5 | ¿Utiliza algún software para realizar cálculos en el proceso de enseñanza aprendizaje? | | | | |
| 6 | ¿Utiliza el software especializado MAPLE? | | | | |
| 7 | ¿Utiliza las TIC en el proceso de enseñanza aprendizaje de Cálculo I? | | | | |
| 8 | ¿Considera que la implementación de un aula interactiva mejoraría el proceso de enseñanza en la institución? | | | | |
| 9 | ¿Cuál será el grado de participación en la elaboración de los contenidos programáticos y analíticos para ser usados en el aula interactiva? | | | | |
| 10 | ¿En su clase se apoya con otros paquetes informáticos que no hemos descritos aquí? | | | | |

**GRACIAS POR SU COLABORACION, AL CONTESTAR LA TOTALIDAD DE LAS PREGUNTAS PLANTEADAS.**

**4.5 ANEXOS**

# UNIVERSIDAD TÉCNICA DE AMBATO

## *CENTRO DE ESTUDIOS DE POSGRADO*

## *MAESTRÍA EN DOCENCIA MATEMÁTICA*

**ENCUESTA DIRIGIDA A LOS ESTUDIANTES DE CÁLCULO I DEL IST-SECAP AMBATO**

**Objetivo**

Recabar información sobre la incidencia del Proceso Enseñanza-Aprendizaje y la aplicación de nuevos recursos didácticos.

**Instrucciones**

- Marque con una **X** dentro de la casilla, en la respuesta que considere correcta.
- Al ser anónima la encuesta responda con toda libertad y sinceridad.

***1: SIEMPRE; 2: FRECUENTEMENTE; 3: POCAS VECES; 4: NUNCA.***

| N° | PREGUNTAS | ESCALAS | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 1 | ¿Con el actual proceso enseñanza-aprendizaje considera que usted está en la capacidad de resolver los diferentes problemas que se enfrenta en el medio? | | | | |
| 2 | ¿Le participa del contenido de la materia en formato digital (presentaciones) los maestros? | | | | |
| 3 | ¿En la clase de Cálculo I, cuando desarrollan talleres de aprendizaje colaborativo logra comprender y mejor los ejercicios planteados? | | | | |
| 4 | ¿Se mejora las competencias con las clases en el sistema colaborativo (Conocimiento, Habilidades, Valores)? | | | | |
| 5 | ¿Despierta en ti el proceso de investigación que un docente plantee nuevas formas de enseñanza)? | | | | |
| 6 | ¿Elaboras algún cuaderno de apuntes o folio estudiantil de la materia? | | | | |
| 7 | ¿Cree usted que en el IST-SECAP se debe implementar aulas con sistemas PDI? | | | | |
| 8 | ¿Con que frecuencia utiliza la pizarra y la tiza liquida en el dictado de Cálculo I? | | | | |
| 9 | ¿Con la herramienta informática MAPLE ha mejorado su aprendizaje del Cálculo? | | | | |

**GRACIAS POR SU COLABORACION, AL CONTESTAR LA TOTALIDAD DE LAS PREGUNTAS PLANTEADAS.**

## 4.6 ANEXOS

# UNIVERSIDAD TÉCNICA DE AMBATO

***CENTRO DE ESTUDIOS DE POSGRADO***

***MAESTRÍA EN DOCENCIA MATEMÁTICA***

**ENCUESTA DIRIGIDA A LOS DOCENTES DEL ÁREA DE MATEMATICAS DEL IST-SECAP AMBATO**

**Objetivo**

Recabar información sobre la incidencia del Proceso Enseñanza-Aprendizaje y la aplicación de nuevos recursos didácticos.

**Instrucciones**

- Marque con una **X** dentro de la casilla, en la respuesta que considere correcta.
- Al ser anónima la encuesta responda con toda libertad y sinceridad.

***1: SIEMPRE; 2: FRECUENTEMENTE; 3: POCAS VECES; 4: NUNCA.***

| N° | PREGUNTAS | ESCALAS | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 1 | ¿Mejora y cambia el proceso enseñanza-aprendizaje en el IST SECA el método colaborativo de enseñanza? | | | | |
| 2 | ¿Dentro del Proceso Enseñanza-aprendizaje permite la construcción del conocimiento a los propios estudiantes a través de la comunicación de la información que usted realiza? | | | | |
| 3 | ¿Mediante la adquisición de conocimiento, el estudiante está en la capacidad de resolver situaciones problemáticas de su medio? | | | | |
| 4 | ¿Realiza grupos de trabajo para motivar el aprendizaje colaborativo en los estudiantes? | | | | |
| 5 | ¿Apoya el desarrollo de ejercicios explicativos por parte de los estudiantes como tarea? | | | | |
| 6 | ¿Considera que existen las condiciones básicas indispensables para implementar el proceso interactivo educativo? | | | | |
| 7 | ¿Con la herramienta informática MAPLE ha mejorado el aprendizaje del Cálculo? | | | | |
| 8 | ¿El estudiante mejora su aprovechamiento con el proceso de enseñanza colaborativa? | | | | |
| 9 | ¿El estudiante es competente luego del curso de formación de Cálculo I con la asistencia de recursos (PDI)? | | | | |
| 10 | ¿Desarrolla el portafolio Académico? | | | | |

**GRACIAS POR SU COLABORACION, AL CONTESTAR LA TOTALIDAD DE LAS PREGUNTAS PLANTEADAS.**

## 4.7 ANEXOS

# UNIVERSIDAD TÉCNICA DE AMBATO

## *CENTRO DE ESTUDIOS DE POSGRADO*

## *MAESTRÍA EN DOCENCIA MATEMÁTICA*

**ENCUESTA DIRIGIDA A LOS ESTUDIANTES DE CÁLCULO I DEL IST-SECAP AMBATO**

**Objetivo**

Recabar información sobre la incidencia del Proceso Enseñanza-Aprendizaje y la aplicación de nuevos recursos didácticos.

**Instrucciones**

- Marque con una **X** dentro de la casilla, en la respuesta que considere correcta.
- Al ser anónima la encuesta responda con toda libertad y sinceridad.

***1: SIEMPRE; 2: FRECUENTEMENTE; 3: POCAS VECES; 4: NUNCA.***

| N° | PREGUNTAS | ESCALAS | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 1 | ¿Conoce usted qué es la Pizarra Interactiva o también denominada (PDI)? | | | | |
| 2 | ¿Los docentes en sus clases utilizan recursos interactivos para la explicación de su materia? | | | | |
| 3 | ¿Existe implementos como pantallas táctiles o interactivas dentro de la institución? | | | | |
| 4 | ¿Los docentes de cálculo emplean los TIC como instrumentos para facilitar la comprensión de los nuevos conocimientos? | | | | |
| 5 | ¿La tecnología acorta el tiempo en el desarrollo de tareas? | | | | |
| 6 | ¿Luego de las evaluaciones comparas las respuestas utilizando software de resolución de ejercicios? | | | | |
| 7 | ¿Siente mayor grado de interés por aprender con nuevos recursos tecnológicos en clases? | | | | |
| 8 | ¿Participaría más activamente si el docente aplicara en su clase elementos multimedia (simuladores, videos, programas especializados, etc.)? | | | | |

**GRACIAS POR SU COLABORACION, AL CONTESTAR LA TOTALIDAD DE LAS PREGUNTAS PLANTEADAS.**

## Fórmulas y tablas

para *Estadística, décima edición*, de Mario Triola



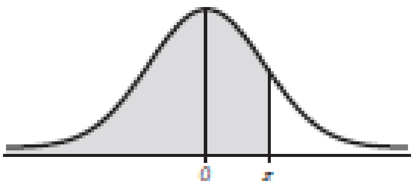
**TABLA A-4** Distribución chi cuadrada ($\chi^2$)

| Grados de libertad | Área a la derecha del valor crítico | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0.995 | 0.99 | 0.975 | 0.95 | 0.90 | 0.10 | 0.05 | 0.025 | 0.01 | 0.005 |
| 1 | — | — | 0.001 | 0.004 | 0.016 | 2.706 | 3.841 | 5.024 | 6.635 | 7.879 |
| 2 | 0.010 | 0.020 | 0.051 | 0.103 | 0.211 | 4.605 | 5.991 | 7.378 | 9.210 | 10.597 |
| 3 | 0.072 | 0.115 | 0.216 | 0.352 | 0.584 | 6.251 | 7.815 | 9.348 | 11.345 | 12.838 |
| 4 | 0.207 | 0.297 | 0.484 | 0.711 | 1.064 | 7.779 | 9.488 | 11.143 | 13.277 | 14.860 |
| 5 | 0.412 | 0.554 | 0.831 | 1.145 | 1.610 | 9.236 | 11.071 | 12.833 | 15.086 | 16.750 |
| 6 | 0.676 | 0.872 | 1.237 | 1.635 | 2.204 | 10.645 | 12.592 | 14.449 | 16.812 | 18.548 |
| 7 | 0.989 | 1.239 | 1.690 | 2.167 | 2.833 | 12.017 | 14.067 | 16.013 | 18.475 | 20.278 |
| 8 | 1.344 | 1.646 | 2.180 | 2.733 | 3.490 | 13.362 | 15.507 | 17.535 | 20.090 | 21.955 |
| 9 | 1.735 | 2.088 | 2.700 | 3.325 | 4.168 | 14.684 | 16.919 | 19.023 | 21.666 | 23.589 |
| 10 | 2.156 | 2.558 | 3.247 | 3.940 | 4.865 | 15.987 | 18.307 | 20.483 | 23.209 | 25.188 |
| 11 | 2.603 | 3.053 | 3.816 | 4.575 | 5.578 | 17.275 | 19.675 | 21.920 | 24.725 | 26.757 |
| 12 | 3.074 | 3.571 | 4.404 | 5.226 | 6.304 | 18.549 | 21.026 | 23.337 | 26.217 | 28.299 |
| 13 | 3.565 | 4.107 | 5.009 | 5.892 | 7.042 | 19.812 | 22.362 | 24.736 | 27.688 | 29.819 |
| 14 | 4.075 | 4.660 | 5.629 | 6.571 | 7.790 | 21.064 | 23.685 | 26.119 | 29.141 | 31.319 |
| 15 | 4.601 | 5.229 | 6.262 | 7.261 | 8.547 | 22.307 | 24.996 | 27.488 | 30.578 | 32.801 |
| 16 | 5.142 | 5.812 | 6.908 | 7.962 | 9.312 | 23.542 | 26.296 | 28.845 | 32.000 | 34.267 |
| 17 | 5.697 | 6.408 | 7.564 | 8.672 | 10.085 | 24.769 | 27.587 | 30.191 | 33.409 | 35.718 |
| 18 | 6.265 | 7.015 | 8.231 | 9.390 | 10.865 | 25.989 | 28.869 | 31.526 | 34.805 | 37.156 |
| 19 | 6.844 | 7.633 | 8.907 | 10.117 | 11.651 | 27.204 | 30.144 | 32.852 | 36.191 | 38.582 |
| 20 | 7.434 | 8.260 | 9.591 | 10.851 | 12.443 | 28.412 | 31.410 | 34.170 | 37.566 | 39.997 |
| 21 | 8.034 | 8.897 | 10.283 | 11.591 | 13.240 | 29.615 | 32.671 | 35.479 | 38.932 | 41.401 |
| 22 | 8.643 | 9.542 | 10.982 | 12.338 | 14.042 | 30.813 | 33.924 | 36.781 | 40.289 | 42.796 |
| 23 | 9.260 | 10.196 | 11.689 | 13.091 | 14.848 | 32.007 | 35.172 | 38.076 | 41.638 | 44.181 |
| 24 | 9.886 | 10.856 | 12.401 | 13.848 | 15.659 | 33.196 | 36.415 | 39.364 | 42.980 | 45.559 |
| 25 | 10.520 | 11.524 | 13.120 | 14.611 | 16.473 | 34.382 | 37.652 | 40.646 | 44.314 | 46.928 |
| 26 | 11.160 | 12.198 | 13.844 | 15.379 | 17.292 | 35.563 | 38.885 | 41.923 | 45.642 | 48.290 |
| 27 | 11.808 | 12.879 | 14.573 | 16.151 | 18.114 | 36.741 | 40.113 | 43.194 | 46.963 | 49.645 |
| 28 | 12.461 | 13.565 | 15.308 | 16.928 | 18.939 | 37.916 | 41.337 | 44.461 | 48.278 | 50.993 |
| 29 | 13.121 | 14.257 | 16.047 | 17.708 | 19.768 | 39.087 | 42.557 | 45.722 | 49.588 | 52.336 |
| 30 | 13.787 | 14.954 | 16.791 | 18.493 | 20.599 | 40.256 | 43.773 | 46.979 | 50.892 | 53.672 |
| 40 | 20.707 | 22.164 | 24.433 | 26.509 | 29.051 | 51.805 | 55.758 | 59.342 | 63.691 | 66.766 |
| 50 | 27.991 | 29.707 | 32.357 | 34.764 | 37.689 | 63.167 | 67.505 | 71.420 | 76.154 | 79.490 |
| 60 | 35.534 | 37.485 | 40.482 | 43.188 | 46.459 | 74.397 | 79.082 | 83.298 | 88.379 | 91.952 |
| 70 | 43.275 | 45.442 | 48.758 | 51.739 | 55.329 | 85.527 | 90.531 | 95.023 | 100.425 | 104.215 |
| 80 | 51.172 | 53.540 | 57.153 | 60.391 | 64.278 | 96.578 | 101.879 | 106.629 | 112.329 | 116.321 |
| 90 | 59.196 | 61.754 | 65.647 | 69.126 | 73.291 | 107.565 | 113.145 | 118.136 | 124.116 | 128.299 |
| 100 | 67.328 | 70.065 | 74.222 | 77.929 | 82.358 | 118.498 | 124.342 | 129.561 | 135.807 | 140.169 |

De Donald B. Owen, *Handbook of Statistical Tables*, © 1962 Addison-Wesley Publishing Co., Reading, MA. Reproducido con permiso del editor.

**TABLA A-3** Distribución $t$: Valores críticos $t$

| Grados de libertad | Área en una cola: 0.005<br>Área en dos colas: 0.01 | 0.01<br>0.02 | 0.025<br>0.05 | 0.05<br>0.10 | 0.10<br>0.20 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 63.657 | 31.821 | 12.706 | 6.314 | 3.078 |
| 2 | 9.925 | 6.965 | 4.303 | 2.920 | 1.886 |
| 3 | 5.841 | 4.541 | 3.182 | 2.353 | 1.638 |
| 4 | 4.604 | 3.747 | 2.776 | 2.132 | 1.533 |
| 5 | 4.032 | 3.365 | 2.571 | 2.015 | 1.476 |
| 6 | 3.707 | 3.143 | 2.447 | 1.943 | 1.440 |
| 7 | 3.499 | 2.998 | 2.365 | 1.895 | 1.415 |
| 8 | 3.355 | 2.896 | 2.306 | 1.860 | 1.397 |
| 9 | 3.250 | 2.821 | 2.262 | 1.833 | 1.383 |
| 10 | 3.169 | 2.764 | 2.228 | 1.812 | 1.372 |
| 11 | 3.106 | 2.718 | 2.201 | 1.796 | 1.363 |
| 12 | 3.055 | 2.681 | 2.179 | 1.782 | 1.356 |
| 13 | 3.012 | 2.650 | 2.160 | 1.771 | 1.350 |
| 14 | 2.977 | 2.624 | 2.145 | 1.761 | 1.345 |
| 15 | 2.947 | 2.602 | 2.131 | 1.753 | 1.341 |
| 16 | 2.921 | 2.583 | 2.120 | 1.746 | 1.337 |
| 17 | 2.898 | 2.567 | 2.110 | 1.740 | 1.333 |
| 18 | 2.878 | 2.552 | 2.101 | 1.734 | 1.330 |
| 19 | 2.861 | 2.539 | 2.093 | 1.729 | 1.328 |
| 20 | 2.845 | 2.528 | 2.086 | 1.725 | 1.325 |
| 21 | 2.831 | 2.518 | 2.080 | 1.721 | 1.323 |
| 22 | 2.819 | 2.508 | 2.074 | 1.717 | 1.321 |
| 23 | 2.807 | 2.500 | 2.069 | 1.714 | 1.319 |
| 24 | 2.797 | 2.492 | 2.064 | 1.711 | 1.318 |
| 25 | 2.787 | 2.485 | 2.060 | 1.708 | 1.316 |
| 26 | 2.779 | 2.479 | 2.056 | 1.706 | 1.315 |
| 27 | 2.771 | 2.473 | 2.052 | 1.703 | 1.314 |
| 28 | 2.763 | 2.467 | 2.048 | 1.701 | 1.313 |
| 29 | 2.756 | 2.462 | 2.045 | 1.699 | 1.311 |
| 30 | 2.750 | 2.457 | 2.042 | 1.697 | 1.310 |
| 31 | 2.744 | 2.453 | 2.040 | 1.696 | 1.309 |
| 32 | 2.738 | 2.449 | 2.037 | 1.694 | 1.309 |
| 34 | 2.728 | 2.441 | 2.032 | 1.691 | 1.307 |
| 36 | 2.719 | 2.434 | 2.028 | 1.688 | 1.306 |
| 38 | 2.712 | 2.429 | 2.024 | 1.686 | 1.304 |
| 40 | 2.704 | 2.423 | 2.021 | 1.684 | 1.303 |
| 45 | 2.690 | 2.412 | 2.014 | 1.679 | 1.301 |
| 50 | 2.678 | 2.403 | 2.009 | 1.676 | 1.299 |
| 55 | 2.668 | 2.396 | 2.004 | 1.673 | 1.297 |
| 60 | 2.660 | 2.390 | 2.000 | 1.671 | 1.296 |
| 65 | 2.654 | 2.385 | 1.997 | 1.669 | 1.295 |
| 70 | 2.648 | 2.381 | 1.994 | 1.667 | 1.294 |
| 75 | 2.643 | 2.377 | 1.992 | 1.665 | 1.293 |
| 80 | 2.639 | 2.374 | 1.990 | 1.664 | 1.292 |
| 90 | 2.632 | 2.368 | 1.987 | 1.662 | 1.291 |
| 100 | 2.626 | 2.364 | 1.984 | 1.660 | 1.290 |
| 200 | 2.601 | 2.345 | 1.972 | 1.653 | 1.286 |
| 300 | 2.592 | 2.339 | 1.968 | 1.650 | 1.284 |
| 400 | 2.588 | 2.336 | 1.966 | 1.649 | 1.284 |
| 500 | 2.586 | 2.334 | 1.965 | 1.648 | 1.283 |
| 750 | 2.582 | 2.331 | 1.963 | 1.647 | 1.283 |
| 1000 | 2.581 | 2.330 | 1.962 | 1.646 | 1.282 |
| 2000 | 2.578 | 2.328 | 1.961 | 1.646 | 1.282 |
| Grande | 2.576 | 2.326 | 1.960 | 1.645 | 1.282 |




# Puntuaciones z POSITIVAS

**TABLA A-2** (*continuación*) Área acumulativa desde la IZQUIERDA

| z | .00 | .01 | .02 | .03 | .04 | .05 | .06 | .07 | .08 | .09 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.0 | .5000 | .5040 | .5080 | .5120 | .5160 | .5199 | .5239 | .5279 | .5319 | .5359 |
| 0.1 | .5398 | .5438 | .5478 | .5517 | .5557 | .5596 | .5636 | .5675 | .5714 | .5753 |
| 0.2 | .5793 | .5832 | .5871 | .5910 | .5948 | .5987 | .6026 | .6064 | .6103 | .6141 |
| 0.3 | .6179 | .6217 | .6255 | .6293 | .6331 | .6368 | .6406 | .6443 | .6480 | .6517 |
| 0.4 | .6554 | .6591 | .6628 | .6664 | .6700 | .6736 | .6772 | .6808 | .6844 | .6879 |
| 0.5 | .6915 | .6950 | .6985 | .7019 | .7054 | .7088 | .7123 | .7157 | .7190 | .7224 |
| 0.6 | .7257 | .7291 | .7324 | .7357 | .7389 | .7422 | .7454 | .7486 | .7517 | .7549 |
| 0.7 | .7580 | .7611 | .7642 | .7673 | .7704 | .7734 | .7764 | .7794 | .7823 | .7852 |
| 0.8 | .7881 | .7910 | .7939 | .7967 | .7995 | .8023 | .8051 | .8078 | .8106 | .8133 |
| 0.9 | .8159 | .8186 | .8212 | .8238 | .8264 | .8289 | .8315 | .8340 | .8365 | .8389 |
| 1.0 | .8413 | .8438 | .8461 | .8485 | .8508 | .8531 | .8554 | .8577 | .8599 | .8621 |
| 1.1 | .8643 | .8665 | .8686 | .8708 | .8729 | .8749 | .8770 | .8790 | .8810 | .8830 |
| 1.2 | .8849 | .8869 | .8888 | .8907 | .8925 | .8944 | .8962 | .8980 | .8997 | .9015 |
| 1.3 | .9032 | .9049 | .9066 | .9082 | .9099 | .9115 | .9131 | .9147 | .9162 | .9177 |
| 1.4 | .9192 | .9207 | .9222 | .9236 | .9251 | .9265 | .9279 | .9292 | .9306 | .9319 |
| 1.5 | .9332 | .9345 | .9357 | .9370 | .9382 | .9394 | .9406 | .9418 | .9429 | .9441 |
| 1.6 | .9452 | .9463 | .9474 | .9484 | .9495 * | .9505 | .9515 | .9525 | .9535 | .9545 |
| 1.7 | .9554 | .9564 | .9573 | .9582 | .9591 | .9599 | .9608 | .9616 | .9625 | .9633 |
| 1.8 | .9641 | .9649 | .9656 | .9664 | .9671 | .9678 | .9686 | .9693 | .9699 | .9706 |
| 1.9 | .9713 | .9719 | .9726 | .9732 | .9738 | .9744 | .9750 | .9756 | .9761 | .9767 |
| 2.0 | .9772 | .9778 | .9783 | .9788 | .9793 | .9798 | .9803 | .9808 | .9812 | .9817 |
| 2.1 | .9821 | .9826 | .9830 | .9834 | .9838 | .9842 | .9846 | .9850 | .9854 | .9857 |
| 2.2 | .9861 | .9864 | .9868 | .9871 | .9875 | .9878 | .9881 | .9884 | .9887 | .9890 |
| 2.3 | .9893 | .9896 | .9898 | .9901 | .9904 | .9906 | .9909 | .9911 | .9913 | .9916 |
| 2.4 | .9918 | .9920 | .9922 | .9925 | .9927 | .9929 | .9931 | .9932 | .9934 | .9936 |
| 2.5 | .9938 | .9940 | .9941 | .9943 | .9945 | .9946 | .9948 | .9949 * | .9951 | .9952 |
| 2.6 | .9953 | .9955 | .9956 | .9957 | .9959 | .9960 | .9961 | .9962 | .9963 | .9964 |
| 2.7 | .9965 | .9966 | .9967 | .9968 | .9969 | .9970 | .9971 | .9972 | .9973 | .9974 |
| 2.8 | .9974 | .9975 | .9976 | .9977 | .9977 | .9978 | .9979 | .9979 | .9980 | .9981 |
| 2.9 | .9981 | .9982 | .9982 | .9983 | .9984 | .9984 | .9985 | .9985 | .9986 | .9986 |
| 3.0 | .9987 | .9987 | .9987 | .9988 | .9988 | .9989 | .9989 | .9989 | .9990 | .9990 |
| 3.1 | .9990 | .9991 | .9991 | .9991 | .9992 | .9992 | .9992 | .9992 | .9993 | .9993 |
| 3.2 | .9993 | .9993 | .9994 | .9994 | .9994 | .9994 | .9994 | .9995 | .9995 | .9995 |
| 3.3 | .9995 | .9995 | .9995 | .9996 | .9996 | .9996 | .9996 | .9996 | .9996 | .9997 |
| 3.4 | .9997 | .9997 | .9997 | .9997 | .9997 | .9997 | .9997 | .9997 | .9997 | .9998 |
| 3.50 y mayores | .9999 | | | | | | | | | |

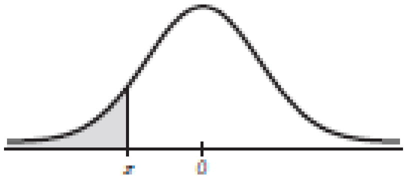
*NOTA:* Para valores de *z* por encima de 3.49, utilice 0.9999 para el área.

*Utilice estos valores comunes que resultan por interpolación:

| Puntuación *z* | Área |
|---|---|
| 1.645 | 0.9500 |
| 2.575 | 0.9950 |

**Valores críticos comunes**

| Nivel de confianza | Valor crítico |
|---|---|
| 0.90 | 1.645 |
| 0.95 | 1.96 |
| 0.99 | 2.575 |




# Puntuaciones z NEGATIVAS

**TABLA A-2** Distribución normal estándar (z): Área acumulativa desde la IZQUIERDA

| z | .00 | .01 | .02 | .03 | .04 | .05 | .06 | .07 | .08 | .09 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| −3.50 y menores | .0001 | | | | | | | | | |
| −3.4 | .0003 | .0003 | .0003 | .0003 | .0003 | .0003 | .0003 | .0003 | .0003 | .0002 |
| −3.3 | .0005 | .0005 | .0005 | .0004 | .0004 | .0004 | .0004 | .0004 | .0004 | .0003 |
| −3.2 | .0007 | .0007 | .0006 | .0006 | .0006 | .0006 | .0006 | .0005 | .0005 | .0005 |
| −3.1 | .0010 | .0009 | .0009 | .0009 | .0008 | .0008 | .0008 | .0008 | .0007 | .0007 |
| −3.0 | .0013 | .0013 | .0013 | .0012 | .0012 | .0011 | .0011 | .0011 | .0010 | .0010 |
| −2.9 | .0019 | .0018 | .0018 | .0017 | .0016 | .0016 | .0015 | .0015 | .0014 | .0014 |
| −2.8 | .0026 | .0025 | .0024 | .0023 | .0023 | .0022 | .0021 | .0021 | .0020 | .0019 |
| −2.7 | .0035 | .0034 | .0033 | .0032 | .0031 | .0030 | .0029 | .0028 | .0027 | .0026 |
| −2.6 | .0047 | .0045 | .0044 | .0043 | .0041 | .0040 | .0039 | .0038 | .0037 | .0036 |
| −2.5 | .0062 | .0060 | .0059 | .0057 | .0055 | .0054 | .0052 | .0051 | * .0049 | .0048 |
| −2.4 | .0082 | .0080 | .0078 | .0075 | .0073 | .0071 | .0069 | .0068 | .0066 | .0064 |
| −2.3 | .0107 | .0104 | .0102 | .0099 | .0096 | .0094 | .0091 | .0089 | .0087 | .0084 |
| −2.2 | .0139 | .0136 | .0132 | .0129 | .0125 | .0122 | .0119 | .0116 | .0113 | .0110 |
| −2.1 | .0179 | .0174 | .0170 | .0166 | .0162 | .0158 | .0154 | .0150 | .0146 | .0143 |
| −2.0 | .0228 | .0222 | .0217 | .0212 | .0207 | .0202 | .0197 | .0192 | .0188 | .0183 |
| −1.9 | .0287 | .0281 | .0274 | .0268 | .0262 | .0256 | .0250 | .0244 | .0239 | .0233 |
| −1.8 | .0359 | .0351 | .0344 | .0336 | .0329 | .0322 | .0314 | .0307 | .0301 | .0294 |
| −1.7 | .0446 | .0436 | .0427 | .0418 | .0409 | .0401 | .0392 | .0384 | .0375 | .0367 |
| −1.6 | .0548 | .0537 | .0526 | .0516 | .0505 | * .0495 | .0485 | .0475 | .0465 | .0455 |
| −1.5 | .0668 | .0655 | .0643 | .0630 | .0618 | .0606 | .0594 | .0582 | .0571 | .0559 |
| −1.4 | .0808 | .0793 | .0778 | .0764 | .0749 | .0735 | .0721 | .0708 | .0694 | .0681 |
| −1.3 | .0968 | .0951 | .0934 | .0918 | .0901 | .0885 | .0869 | .0853 | .0838 | .0823 |
| −1.2 | .1151 | .1131 | .1112 | .1093 | .1075 | .1056 | .1038 | .1020 | .1003 | .0985 |
| −1.1 | .1357 | .1335 | .1314 | .1292 | .1271 | .1251 | .1230 | .1210 | .1190 | .1170 |
| −1.0 | .1587 | .1562 | .1539 | .1515 | .1492 | .1469 | .1446 | .1423 | .1401 | .1379 |
| −0.9 | .1841 | .1814 | .1788 | .1762 | .1736 | .1711 | .1685 | .1660 | .1635 | .1611 |
| −0.8 | .2119 | .2090 | .2061 | .2033 | .2005 | .1977 | .1949 | .1922 | .1894 | .1867 |
| −0.7 | .2420 | .2389 | .2358 | .2327 | .2296 | .2266 | .2236 | .2206 | .2177 | .2148 |
| −0.6 | .2743 | .2709 | .2676 | .2643 | .2611 | .2578 | .2546 | .2514 | .2483 | .2451 |
| −0.5 | .3085 | .3050 | .3015 | .2981 | .2946 | .2912 | .2877 | .2843 | .2810 | .2776 |
| −0.4 | .3446 | .3409 | .3372 | .3336 | .3300 | .3264 | .3228 | .3192 | .3156 | .3121 |
| −0.3 | .3821 | .3783 | .3745 | .3707 | .3669 | .3632 | .3594 | .3557 | .3520 | .3483 |
| −0.2 | .4207 | .4168 | .4129 | .4090 | .4052 | .4013 | .3974 | .3936 | .3897 | .3859 |
| −0.1 | .4602 | .4562 | .4522 | .4483 | .4443 | .4404 | .4364 | .4325 | .4286 | .4247 |
| −0.0 | .5000 | .4960 | .4920 | .4880 | .4840 | .4801 | .4761 | .4721 | .4681 | .4641 |

NOTA: Para valores de z por debajo de −3.49, utilice 0.0001 para el área.

*Utilice estos valores comunes que resultan por interpolación:

| Puntuación z | Área |
|---|---|
| −1.645 | 0.0500 |
| −2.575 | 0.0050 |

## Capítulo 13: Pruebas no paramétricas

$z = \dfrac{(x + 0.5) - (n/2)}{\sqrt{n}/2}$ Prueba del signo para $n > 25$

$z = \dfrac{T - n(n+1)/4}{\sqrt{\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{24}}}$ Prueba de rangos con signo de Wilcoxon (datos apareados y $n > 30$)

$z = \dfrac{R - \mu_R}{\sigma_R} = \dfrac{R - \dfrac{n_1(n_1+n_2+1)}{2}}{\sqrt{\dfrac{n_1 n_2 (n_1+n_2+1)}{12}}}$ Prueba de suma de rangos de Wilcoxon (dos muestras independientes)

$$H = \frac{12}{N(N+1)}\left(\frac{R_1^2}{n_1} + \frac{R_2^2}{n_2} + \ldots + \frac{R_k^2}{n_k}\right) - 3(N+1)$$

Prueba de Kruskal-Wallis (chi cuadrada, gl $= k - 1$)

$r_s = 1 - \dfrac{6\Sigma d^2}{n(n^2-1)}$ Correlación de rangos

$\left(\text{valor crítico para } n > 30\text{: } \dfrac{\pm z}{\sqrt{n-1}}\right)$

$z = \dfrac{G - \mu_G}{\sigma_G} = \dfrac{G - \left(\dfrac{2n_1n_2}{n_1+n_2} + 1\right)}{\sqrt{\dfrac{(2n_1n_2)(2n_1n_2 - n_1 - n_2)}{(n_1+n_2)^2(n_1+n_2-1)}}}$ Prueba de rachas para $n > 20$

## Capítulo 14: Gráficas de control

Gráfica R: Graficar rangos muestrales

LCS: $D_4\overline{R}$

Línea central: $\overline{R}$

LCI: $D_3\overline{R}$

Gráfica $\overline{x}$: Graficar medias muestrales

LCS: $\overline{\overline{x}} + A_2\overline{R}$

Línea central: $\overline{\overline{x}}$

LCI: $\overline{\overline{x}} - A_2\overline{R}$

Gráfica p: Graficar proporciones muestrales

LCS: $\overline{p} + 3\sqrt{\dfrac{\overline{p}\,\overline{q}}{n}}$

Línea central: $\overline{p}$

LCI: $\overline{p} - 3\sqrt{\dfrac{\overline{p}\,\overline{q}}{n}}$

### TABLA A-6
### Valores críticos del coeficiente de correlación $r$ de Pearson

| $n$ | $\alpha = .05$ | $\alpha = .01$ |
|---|---|---|
| 4 | .950 | .999 |
| 5 | .878 | .959 |
| 6 | .811 | .917 |
| 7 | .754 | .875 |
| 8 | .707 | .834 |
| 9 | .666 | .798 |
| 10 | .632 | .765 |
| 11 | .602 | .735 |
| 12 | .576 | .708 |
| 13 | .553 | .684 |
| 14 | .532 | .661 |
| 15 | .514 | .641 |
| 16 | .497 | .623 |
| 17 | .482 | .606 |
| 18 | .468 | .590 |
| 19 | .456 | .575 |
| 20 | .444 | .561 |
| 25 | .396 | .505 |
| 30 | .361 | .463 |
| 35 | .335 | .430 |
| 40 | .312 | .402 |
| 45 | .294 | .378 |
| 50 | .279 | .361 |
| 60 | .254 | .330 |
| 70 | .236 | .305 |
| 80 | .220 | .286 |
| 90 | .207 | .269 |
| 100 | .196 | .256 |

*NOTA:* Para probar $H_0$: $\rho = 0$ contra $H_1$: $\rho \neq 0$, se rechaza $H_0$ si el valor absoluto de $r$ es mayor que el valor crítico que se indica en la tabla.

Constantes de una gráfica de control

| Tamaño del subgrupo $n$ | $A_2$ | $D_3$ | $D_4$ |
|---|---|---|---|
| 2 | 1.880 | 0.000 | 3.267 |
| 3 | 1.023 | 0.000 | 2.574 |
| 4 | 0.729 | 0.000 | 2.282 |
| 5 | 0.577 | 0.000 | 2.114 |
| 6 | 0.483 | 0.000 | 2.004 |
| 7 | 0.419 | 0.076 | 1.924 |

## Capítulo 8: Estadísticos de prueba (una población)

$z = \dfrac{\hat{p} - p}{\sqrt{\dfrac{pq}{n}}}$ Proporción: una población

$z = \dfrac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ Media: una población ($\sigma$ conocida)

$t = \dfrac{\bar{x} - \mu}{s/\sqrt{n}}$ Media: una población ($\sigma$ desconocida)

$\chi^2 = \dfrac{(n-1)s^2}{\sigma^2}$ Desviación estándar o varianza: una población

## Capítulo 9: Estadísticos de prueba (dos poblaciones)

$z = \dfrac{(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\dfrac{\bar{p}\bar{q}}{n_1} + \dfrac{\bar{p}\bar{q}}{n_2}}}$ Dos proporciones

---

$t = \dfrac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\dfrac{s_1^2}{n_1} + \dfrac{s_2^2}{n_2}}}$ gl = el menor de $n_1 - 1, n_2 - 1$

Dos medias: independiente; $\sigma_1$ y $\sigma_2$ desconocidas y no se supone que sean iguales.

---

$t = \dfrac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\dfrac{s_p^2}{n_1} + \dfrac{s_p^2}{n_2}}}$ $\quad s_p^2 = \dfrac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$

Dos medias: independiente; $\sigma_1$ y $\sigma_2$ desconocidas, pero se supone que son iguales.

---

$z = \dfrac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}$ Dos medias: independiente; $\sigma_1$, $\sigma_2$ conocidas.

---

$t = \dfrac{\bar{d} - \mu_d}{s_d/\sqrt{n}}$ Dos medias: datos apareados (gl $= n - 1$)

---

$F = \dfrac{s_1^2}{s_2^2}$ Desviación estándar o varianza: dos poblaciones (donde $s_1^2 \geq s_2^2$)

## Capítulo 11: Multinomiales y tablas de contingencia

$\chi^2 = \Sigma \dfrac{(O - E)^2}{E}$ Multinomial (gl $= k - 1$)

$\chi^2 = \Sigma \dfrac{(O - E)^2}{E}$ Tabla de contingencia [gl $= (r - 1)(c - 1)$]

donde $E = \dfrac{(\text{total por renglón})(\text{total por columna})}{(\text{gran total})}$

$\chi^2 = \dfrac{(|b - c| - 1)^2}{b + c}$ Prueba de McNemar para pares apareados (gl $= 1$)

## Capítulo 10: Correlación lineal/Regresión

Correlación $r = \dfrac{n\Sigma xy - (\Sigma x)(\Sigma y)}{\sqrt{n(\Sigma x^2) - (\Sigma x)^2}\sqrt{n(\Sigma y^2) - (\Sigma y)^2}}$

---

$b_1 = \dfrac{n\Sigma xy - (\Sigma x)(\Sigma y)}{n(\Sigma x^2) - (\Sigma x)^2}$

$b_0 = \bar{y} - b_1\bar{x}$ or $b_0 = \dfrac{(\Sigma y)(\Sigma x^2) - (\Sigma x)(\Sigma xy)}{n(\Sigma x^2) - (\Sigma x)^2}$

$\hat{y} = b_0 + b_1 x$ Ecuación estimada de la recta de regresión

---

$r^2 = \dfrac{\text{variación explicada}}{\text{variación total}}$

$s_e = \sqrt{\dfrac{\Sigma(y - \hat{y})^2}{n - 2}}$ o $\sqrt{\dfrac{\Sigma y^2 - b_0\Sigma y - b_1\Sigma xy}{n - 2}}$

---

$\hat{y} - E < y < \hat{y} + E$ Intervalo de predicción

donde $E = t_{\alpha/2} s_e \sqrt{1 + \dfrac{1}{n} + \dfrac{n(x_0 - \bar{x})^2}{n(\Sigma x^2) - (\Sigma x)^2}}$

## Capítulo 12: Análisis de varianza de un factor

Procedimiento para poner a prueba $H_0$: $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \ldots$

1. Usar un programa de cómputo o una calculadora para obtener los resultados.
2. Identificar el valor $P$.
3. Obtener la conclusión:

   Si el valor $P \leq \alpha$, se rechaza la hipótesis nula de medias iguales.

   Si $P > \alpha$, no se rechaza la hipótesis nula de medias iguales.

## Capítulo 12: Análisis de varianza de dos factores

Procedimiento:

1. Usar un programa de cómputo o una calculadora para obtener los resultados.
2. Probar $H_0$: No hay una interacción entre el factor de renglón y el factor de columna.
3. Detenerse si se rechaza $H_0$ del paso 2.

   Si no se rechaza $H_0$ del paso 1 (de manera que al parecer no existe un efecto de interacción), continúe con las siguientes dos pruebas:

   Prueba de los efectos del factor de renglón.

   Prueba de los efectos del factor de columna.

## Capítulo 3: Estadística descriptiva

$\bar{x} = \frac{\Sigma x}{n}$ Media

$\bar{x} = \frac{\Sigma f \cdot x}{\Sigma f}$ Media (tabla de frecuencias)

$s = \sqrt{\frac{\Sigma (x - \bar{x})^2}{n - 1}}$ Desviación estándar

$s = \sqrt{\frac{n(\Sigma x^2) - (\Sigma x)^2}{n(n - 1)}}$ Desviación estándar (método rápido)

$s = \sqrt{\frac{n[\Sigma (f \cdot x^2)] - [\Sigma (f \cdot x)]^2}{n(n - 1)}}$ Desviación estándar (tabla de frecuencias)

Varianza $= s^2$

## Capítulo 4: Probabilidad

$P(A \text{ o } B) = P(A) + P(B)$ si $A$ y $B$ son mutuamente excluyentes

$P(A \text{ o } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ y } B)$
si $A$ y $B$ no son mutuamente excluyentes

$P(A \text{ y } B) = P(A) \cdot P(B)$ si $A$ y $B$ son independientes

$P(A \text{ y } B) = P(A) \cdot P(B|A)$ si $A$, $B$ son dependientes

$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ Regla de los sucesos complementarios

${}_nP_r = \frac{n!}{(n - r)!}$ Permutaciones (sin elementos iguales)

$\frac{n!}{n_1!\, n_2! \ldots n_k!}$ Permutaciones ($n_1$ iguales,...)

${}_nC_r = \frac{n!}{(n - r)!\, r!}$ Combinaciones

## Capítulo 5: Distribuciones de probabilidad

$\mu = \Sigma x \cdot P(x)$ Media (distribución de probabilidad)

$\sigma = \sqrt{[\Sigma x^2 \cdot P(x)] - \mu^2}$ Desviación estándar (dist. de prob.)

$P(x) = \frac{n!}{(n - x)!\, x!} \cdot p^x \cdot q^{n-x}$ Probabilidad binomial

$\mu = n \cdot p$ Media (binomial)

$\sigma^2 = n \cdot p \cdot q$ Varianza (binomial)

$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q}$ Desviación estándar (binomial)

$P(x) = \frac{\mu^x \cdot e^{-\mu}}{x!}$ Distribución de Poisson donde $e = 2.71828$

## Capítulo 6: Distribución normal

$z = \frac{x - \bar{x}}{s}$ or $\frac{x - \mu}{\sigma}$ Puntuación estándar

$\mu_{\bar{x}} = \mu$ Teorema del límite central

$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ Teorema del límite central (error estándar)

## Capítulo 7: Intervalos de confianza (una población)

$\hat{p} - E < p < \hat{p} + E$ Proporción

donde $E = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$

$\bar{x} - E < \mu < \bar{x} + E$ Media

donde $E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ ($\sigma$ conocida)

o $E = t_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}}$ ($\sigma$ desconocida)

$\frac{(n - 1)s^2}{\chi_R^2} < \sigma^2 < \frac{(n - 1)s^2}{\chi_L^2}$ Varianza

## Capítulo 7: Determinación de tamaño de muestra

$n = \frac{[z_{\alpha/2}]^2 \cdot 0.25}{E^2}$ Proporción

$n = \frac{[z_{\alpha/2}]^2 \hat{p}\hat{q}}{E^2}$ Proporción ($\hat{p}$ y $\hat{q}$ conocidas)

$n = \left[\frac{z_{\alpha/2}\sigma}{E}\right]^2$ Media

## Capítulo 9: Intervalos de confianza (dos poblaciones)

$(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - E < (p_1 - p_2) < (\hat{p}_1 - \hat{p}_2) + E$

donde $E = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}_1\hat{q}_1}{n_1} + \frac{\hat{p}_2\hat{q}_2}{n_2}}$

$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - E < (\mu_1 - \mu_2) < (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) + E$ (Indep.)

donde $E = t_{\alpha/2}\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}$ (gl = el menor de $n_1 - 1$, $n_2 - 1$)

($\sigma_1$ y $\sigma_2$ desconocidas y se supone que no son iguales)

$E = t_{\alpha/2}\sqrt{\frac{s_p^2}{n_1} + \frac{s_p^2}{n_2}}$ (gl $= n_1 + n_2 - 2$)

$s_p^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{(n_1 - 1) + (n_2 - 1)}$

($\sigma_1$ y $\sigma_2$ desconocidas, pero se supone que son iguales)

$E = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$

($\sigma_1$, $\sigma_2$ conocidas)

$\bar{d} - E < \mu_d < \bar{d} + E$ (Datos apareados)

donde $E = t_{\alpha/2}\frac{s_d}{\sqrt{n}}$ (gl $= n - 1$)